Algèbre linéaire

Rappels et compléments

Sylvain Pelletier

PSI - LMSC

Espaces vectoriels

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne si u et v sont éléments de E, la `somme` $u + v$ est un élément de E,

la multiplication externe si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le `produit externe` λu est un élément de E.

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- Si Ω est un ensemble, l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ (noté aussi $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel.
- Pour deux entiers (n, p), l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel. Cet espace est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne si u et v sont éléments de E, la `somme` $u + v$ est un élément de E,

la multiplication externe si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le `produit externe` λu est un élément de E.

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- Si Ω est un ensemble, l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ (noté aussi $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel.
- Pour deux entiers (n, p), l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel. Cet espace est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Un **espace vectoriel** E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne si u et v sont éléments de E, la `somme` $u + v$ est un élément de E,

la multiplication externe si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le `produit externe` λu est un élément de E.

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- Si Ω est un ensemble, l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ (noté aussi $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel.
- Pour deux entiers (n, p), l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel. Cet espace est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Espaces vectoriels

Un **espace vectoriel** E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne si u et v sont éléments de E, la `somme` $u + v$ est un élément de E,

la multiplication externe si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le `produit externe` λu est un élément de E.

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- Si Ω est un ensemble, l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ (noté aussi $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel.
- Pour deux entiers (n, p), l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel. Cet espace est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Espaces vectoriels

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne si u et v sont éléments de E, la `somme` $u + v$ est un élément de E,

la multiplication externe si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le `produit externe` λu est un élément de E.

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- Si Ω est un ensemble, l'ensemble $\mathbb{K}^{\Omega}$ (noté aussi $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel.
- Pour deux entiers (n, p), l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel. Cet espace est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne si u et v sont éléments de E, la somme $u + v$ est un élément de E,

la multiplication externe si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le produit externe λu est un élément de E.

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- Si Ω est un ensemble, l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ (noté aussi $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel.
- Pour deux entiers (n, p), l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel. Cet espace est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Espaces vectoriels

Un **espace vectoriel** E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne
: si u et v sont éléments de E, la `somme` $u + v$ est un élément de E,

la multiplication externe
: si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le `produit externe` λu est un élément de E.

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- Si Ω est un ensemble, l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ (noté aussi $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel.
- Pour deux entiers (n, p), l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel. Cet espace est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Espaces vectoriels

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne si u et v sont éléments de E, la `somme` $u+v$ est un élément de E,

la multiplication externe si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le `produit externe` λu est un élément de E.

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- Si Ω est un ensemble, l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ (noté aussi $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel.
- Pour deux entiers (n, p), l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel. Cet espace est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Espaces vectoriels

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :

l'addition interne
: si u et v sont éléments de E, la `somme` $u + v$ est un élément de E,

la multiplication externe
: si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le `produit externe` λu est un élément de E.

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- Si Ω est un ensemble, l'ensemble $\mathbb{K}^\Omega$ (noté aussi $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ est un espace vectoriel.
- Pour deux entiers (n, p), l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel. Cet espace est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Sous-espace vectoriel

Si E est un espace vectoriel et F une partie de E, alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide, stable par addition et par multiplication externe.

Pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel on vérifie :

- $0 \in F$,
- $\forall (x, y) \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda y \in F$.

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0,\ P'(3) = 0$.
- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel

Si E est un espace vectoriel et F une partie de E, alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide, stable par addition et par multiplication externe.

Pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel on vérifie :

- $0 \in F$,
- $\forall (x, y) \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda y \in F$.

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0,\ P'(3) = 0$.
- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel

Si E est un espace vectoriel et F une partie de E, alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide, stable par addition et par multiplication externe.

Pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel on vérifie :

- $0 \in F$,
- $\forall (x, y) \in F, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ x + \lambda y \in F$.

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0, \ P'(3) = 0$.
- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel

Si E est un espace vectoriel et F une partie de E, alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide, stable par addition et par multiplication externe.

Pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel on vérifie :

- $0 \in F$, F est non vide
- $\forall (x, y) \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $x + \lambda y \in F$.

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0$, $P'(3) = 0$.
- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Si E est un espace vectoriel et F une partie de E, alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide, stable par addition et par multiplication externe.

Pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel on vérifie :

- $0 \in F$, F est non vide
- $\forall (x, y) \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda y \in F$.

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0,\ P'(3) = 0$.
- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel

Si E est un espace vectoriel et F une partie de E, alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide, stable par addition et par multiplication externe.

Pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel on vérifie :

- $0 \in F$, F est non vide
- $\forall (x, y) \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda y \in F$.

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0,\ P'(3) = 0$.
- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel

Si E est un espace vectoriel et F une partie de E, alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide, stable par addition et par multiplication externe.

Pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel on vérifie :

- $0 \in F$, F est non vide
- $\forall (x, y) \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda y \in F$.

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0,\ P'(3) = 0$.
- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel

Si E est un espace vectoriel et F une partie de E, alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide, stable par addition et par multiplication externe.

Pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel on vérifie :

- $0 \in F$, F est non vide
- $\forall (x, y) \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda y \in F$.

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0,\ P'(3) = 0$.
- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel

Si E est un espace vectoriel et F une partie de E, alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide, stable par addition et par multiplication externe.

Pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel on vérifie :

- $0 \in F$, F est non vide
- $\forall (x, y) \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda y \in F$.

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0,\ P'(3) = 0$.
- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel

- Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est un SEV de E. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{Vect}((u_1, \ldots, u_p)) = \left\{ x \in E \middle| \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) sont des SEV de E (respectivement de F).
  - Noyau = équations cartésiennes = solutions d'un système homogène.
  - Image = paramètres = l'ensemble des Y tel que le système $AX = Y$ admet au moins une solution.

Dans le cas de la dimension finie, le théorème du rang permet de donner la dimension d'un SEV en l'écrivant comme un noyau ou comme une image.

Sous-espace vectoriel

- Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel (jamais une réunion sauf cas trivial).
- Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est un SEV de E. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{Vect}((u_1, \dots, u_p)) = \left\{ x \in E \middle| \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) sont des SEV de E (respectivement de F).
  - Noyau = équations cartésiennes = solutions d'un système homogène.
  - Image = paramètres = l'ensemble des Y tel que le système $AX = Y$ admet au moins une solution.

Dans le cas de la dimension finie, le théorème du rang permet de donner la dimension d'un SEV en l'écrivant comme un noyau ou comme une image.

Sous-espace vectoriel

- Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel (jamais une réunion sauf cas trivial).
- Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E, alors $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un SEV de E. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

$$\text{Vect}((u_1,\dots,u_p)) = \left\{x \in E \middle| \exists\,(\alpha_1,\dots,\alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right\}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\ker(f)$ (respectivement $\text{Im}(f)$) sont des SEV de E (respectivement de F).
  - Noyau = équations cartésiennes = solutions d'un système homogène.
  - Image = paramètres = l'ensemble des Y tel que le système $AX = Y$ admet au moins une solution.

Dans le cas de la dimension finie, le théorème du rang permet de donner la dimension d'un SEV en l'écrivant comme un noyau ou comme une image.

Sous-espace vectoriel

- Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel (jamais une réunion sauf cas trivial).
- Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est un SEV de E. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{Vect}((u_1, \ldots, u_p)) = \left\{ x \in E \middle| \exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) sont des SEV de E (respectivement de F).
  - Noyau = équations cartésiennes = solutions d'un système homogène.
  - Image = paramètres = l'ensemble des Y tel que le système $AX = Y$ admet au moins une solution.

Dans le cas de la dimension finie, le théorème du rang permet de donner la dimension d'un SEV en l'écrivant comme un noyau ou comme une image.

Sous-espace vectoriel

- Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel (jamais une réunion sauf cas trivial).
- Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est un SEV de E. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{Vect}((u_1, \dots, u_p)) = \left\{ x \in E \,\middle|\, \exists\, (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) sont des SEV de E (respectivement de F).
  - Noyau = équations cartésiennes = solutions d'un système homogène.
  - Image = paramètres = l'ensemble des Y tel que le système $AX = Y$ admet au moins une solution.

Dans le cas de la dimension finie, le théorème du rang permet de donner la dimension d'un SEV en l'écrivant comme un noyau ou comme une image.

Sous-espace vectoriel

- Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel (jamais une réunion sauf cas trivial).
- Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est un SEV de E. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{Vect}((u_1, \dots, u_p)) = \left\{ x \in E \middle| \exists\,(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) sont des SEV de E (respectivement de F).
  - Noyau = équations cartésiennes = solutions d'un système homogène.
  - Image = paramètres = l'ensemble des Y tel que le système $AX = Y$ admet au moins une solution.

Dans le cas de la dimension finie, le théorème du rang permet de donner la dimension d'un SEV en l'écrivant comme un noyau ou comme une image.

Sous-espace vectoriel

- Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel (jamais une réunion sauf cas trivial).
- Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est un SEV de E. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{Vect}((u_1, \dots, u_p)) = \left\{ x \in E \middle| \exists \, (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \; x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) sont des SEV de E (respectivement de F).
  - Noyau = équations cartésiennes = solutions d'un système homogène.
  - Image = paramètres = l'ensemble des Y tel que le système $AX = Y$ admet au moins une solution.

Dans le cas de la dimension finie, le théorème du rang permet de donner la dimension d'un SEV en l'écrivant comme un noyau ou comme une image.

Sous-espace vectoriel

- Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel (jamais une réunion sauf cas trivial).
- Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est un SEV de E. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{Vect}((u_1, \dots, u_p)) = \left\{ x \in E \middle| \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\ker(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) sont des SEV de E (respectivement de F).
  - Noyau = équations cartésiennes = solutions d'un système homogène.
  - Image = paramètres = l'ensemble des Y tel que le système $AX = Y$ admet au moins une solution.

  Dans le cas de la dimension finie, le théorème du rang permet de donner la dimension d'un SEV en l'écrivant comme un noyau ou comme une image.

Exemples basiques dans $\mathbb{K}^n$

- $E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y-z=0, \text{ et } x+3z=0\Big\}$
- $E = \ker(f)$ où
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, x+3z) \end{cases}$$
- Le théorème du rang donne sa dimension, puis $E = \text{Vect}\Big((-3,2,1)\Big)$.

- $F = \Big\{(a+c, a+b+2c, b+c, b+c) | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\Big\}$.
- On a facilement une famille génératrice puis une base : $F = \text{Vect}\left((1,1,0,0),(0,1,1,1)\right)$
- $F = \text{Im}(f)$ où
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+c, a+b+2c, b+c, b+c) \end{cases}$$
- Là aussi le théorème du rang donne la dimension.

Exemples basiques dans $\mathbb{K}^n$

- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0, \text{ et } x + 3z = 0\right\}$
- $E = \ker(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, x + 3z) \end{array} \right.$$
- Le théorème du rang donne sa dimension, puis $E = \mathrm{Vect}\left((-3, 2, 1)\right)$.

- $F = \left\{(a + c, a + b + 2c, b + c, b + c) | (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
- On a facilement une famille génératrice puis une base : $F = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\right)$
- $F = \mathrm{Im}(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c) & \longmapsto & (a + c, a + b + 2c, b + c, b + c) \end{array} \right.$$
- Là aussi le théorème du rang donne la dimension.

Exemples basiques dans $\mathbb{K}^n$

- $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0, \text{ et } x + 3z = 0\right\}$
- $E = \ker(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, x+3z) \end{array} \right.$$
- Le théorème du rang donne sa dimension, puis $E = \mathrm{Vect}\left((-3,2,1)\right)$.

- $F = \left\{(a+c, a+b+2c, b+c, b+c) | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
- On a facilement une famille génératrice puis une base : $F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0,0),(0,1,1,1)\right)$
- $F = \mathrm{Im}(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+c, a+b+2c, b+c, b+c) \end{array} \right.$$
- Là aussi le théorème du rang donne la dimension.

Exemples basiques dans $\mathbb{K}^n$

- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0, \text{ et } x + 3z = 0\right\}$
- $E = \ker(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, x + 3z) \end{array} \right.$$
- Le théorème du rang donne sa dimension, puis $E = \text{Vect}\left((-3, 2, 1)\right)$.

- $F = \left\{(a + c, a + b + 2c, b + c, b + c) | (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
- On a facilement une famille génératrice puis une base : $F = \text{Vect}\left((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\right)$
- $F = \text{Im}(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c) & \longmapsto & (a + c, a + b + 2c, b + c, b + c) \end{array} \right.$$
- Là aussi le théorème du rang donne la dimension.

Exemples basiques dans $\mathbb{K}^n$

- $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0, \text{ et } x + 3z = 0\right\}$
- $E = \ker(f)$ où
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, x+3z) \end{cases}$$
- Le théorème du rang donne sa dimension, puis $E = \text{Vect}\left((-3,2,1)\right)$.

$$Rg(f) = Rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = Rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi :

$$u = (x,y,z) \in E \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{cases} \iff u = (-3,2,1)z$$

- $F = \left\{(a+c, a+b+2c, b+c, b+c) | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
- On a facilement une famille génératrice puis une base :

- $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y-z=0, \text{ et } x+3z=0\right\}$
- $E = \ker(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, x+3z) \end{array} \right.$$
- Le théorème du rang donne sa dimension, puis $E = \mathrm{Vect}\left((-3,2,1)\right)$.

- $F = \left\{(a+c, a+b+2c, b+c, b+c) | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
- On a facilement une famille génératrice puis une base : $F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0,0),(0,1,1,1)\right)$
- $F = \mathrm{Im}(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+c, a+b+2c, b+c, b+c) \end{array} \right.$$
- Là aussi le théorème du rang donne la dimension.

Exemples basiques dans $\mathbb{K}^n$

- $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+2y-z=0,\ \text{et}\ x+3z=0\right\}$
- $E=\ker(f)$ où
$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z,x+3z)\end{array}\right.$$
- Le théorème du rang donne sa dimension, puis $E=\text{Vect}\big((-3,2,1)\big)$.

- $F=\left\{(a+c,a+b+2c,b+c,b+c) | (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.
- On a facilement une famille génératrice puis une base : $F=\text{Vect}\left((1,1,0,0),(0,1,1,1)\right)$
- $F=\text{Im}(f)$ où
$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4\\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+c,a+b+2c,b+c,b+c)\end{array}\right.$$
- Là aussi le théorème du rang donne la dimension.

Exemples basiques dans $\mathbb{K}^n$

- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0, \text{ et } x + 3z = 0\right\}$
- $E = \ker(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, x + 3z) \end{array} \right.$$
- Le théorème du rang donne sa dimension, puis $E = \text{Vect}\left((-3, 2, 1)\right)$.

- $F = \left\{(a + c, a + b + 2c, b + c, b + c) | (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
- On a facilement une famille génératrice puis une base :
$F = \text{Vect}\left((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\right)$
- $F = \text{Im}(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c) & \longmapsto & (a + c, a + b + 2c, b + c, b + c) \end{array} \right.$$
- Là aussi le théorème du rang donne la dimension.

Exemples basiques dans $\mathbb{K}^n$

- $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y-z=0, \text{ et } x+3z=0\right\}$
- $E = \ker(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, x+3z) \end{array} \right.$$
- Le théorème du rang donne sa dimension, puis $E = \text{Vect}\left((-3,2,1)\right)$.

- $F = \left\{(a+c, a+b+2c, b+c, b+c) | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
- On a facilement une famille génératrice puis une base :
$F = \text{Vect}\left((1,1,0,0),(0,1,1,1)\right)$
- $F = \text{Im}(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+c, a+b+2c, b+c, b+c) \end{array} \right.$$
- Là aussi le théorème du rang donne la dimension.

Exemples basiques dans $\mathbb{K}^n$

- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0, \text{ et } x + 3z = 0\right\}$
- $E = \ker(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, x + 3z) \end{array} \right.$$
- Le théorème du rang donne sa dimension, puis $E = \text{Vect}\left((-3, 2, 1)\right)$.

- $F = \left\{(a + c, a + b + 2c, b + c, b + c) | (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
- On a facilement une famille génératrice puis une base : $F = \text{Vect}\left((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\right)$
- $F = \text{Im}(f)$ où
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c) & \longmapsto & (a + c, a + b + 2c, b + c, b + c) \end{array} \right.$$
- Là aussi le théorème du rang donne la dimension.

Exemple de sous-espace vectoriel

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- On considère l'EV des suites E et l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \left(u_{n+2} - u_{n+1} - u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de E.

- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0$, $P'(3) = 0$.
- On considère :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & \left(P(0), P'(3)\right) \end{array} \right.$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple de sous-espace vectoriel

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- On considère l'EV des suites E et l'application :

$$\varphi : \begin{cases} E & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \big(u_{n+2} - u_{n+1} - u_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de E.

- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0$, $P'(3) = 0$.
- On considère :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & \big(P(0), P'(3)\big) \end{cases}$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple de sous-espace vectoriel

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- On considère l'EV des suites E et l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \Big(u_{n+2} - u_{n+1} - u_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de E.

- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0$, $P'(3) = 0$.
- On considère :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & \Big(P(0), P'(3)\Big) \end{array} \right.$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple de sous-espace vectoriel

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- On considère l'EV des suites E et l'application :
$$\varphi : \begin{cases} E & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \left(u_{n+2} - u_{n+1} - u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$
- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de E.

- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0, \; P'(3) = 0$.
- On considère :
$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & \left(P(0), P'(3)\right) \end{cases}$$
- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple de sous-espace vectoriel

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- On considère l'EV des suites E et l'application :

$$\varphi : \begin{cases} E & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \Big(u_{n+2} - u_{n+1} - u_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de E.

- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0,\ P'(3) = 0$.
- On considère :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & \Big(P(0), P'(3)\Big) \end{cases}$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple de sous-espace vectoriel

- Les suites vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- On considère l'EV des suites E et l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \Big(u_{n+2} - u_{n+1} - u_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de E.

- Les polynômes P vérifiant : $P(0) = 0,\ P'(3) = 0$.
- On considère :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & \Big(P(0), P'(3)\Big) \end{array} \right.$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathbb{K}[X]$.

- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- C'est l'EV engendré par la famille de vecteurs :

$$(x \longmapsto \cos(x), x \longmapsto \sin(x))$$

- Les solutions de l'équation différentielle homogène :

$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ avec a et b deux fonctions continues.

- On considère :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(I) & \to & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & (x \longmapsto y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)) \end{array} \right.$$

- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathcal{C}^2$.

Sous-espace vectoriel

- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- C'est l'EV engendré par la famille de vecteurs :
$$(x \longmapsto \cos(x), x \longmapsto \sin(x))$$

- Les solutions de l'équation différentielle homogène :
$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ avec a et b deux fonctions continues.
- On considère :
$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^2(I) & \rightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & (x \longmapsto y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)) \end{cases}$$
- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathcal{C}^2$.

Sous-espace vectoriel

- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- C'est l'EV engendré par la famille de vecteurs :
$$(x \longmapsto \cos(x), x \longmapsto \sin(x))$$

- Les solutions de l'équation différentielle homogène :
$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ avec a et b deux fonctions continues.
- On considère :
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(I) & \to & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & (x \longmapsto y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)) \end{array} \right.$$
- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathcal{C}^2$.

Sous-espace vectoriel

- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- C'est l'EV engendré par la famille de vecteurs :
$$(x \longmapsto \cos(x), x \longmapsto \sin(x))$$

- Les solutions de l'équation différentielle homogène :
$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ avec a et b deux fonctions continues.
- On considère :
$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^2(I) & \rightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & (x \longmapsto y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)) \end{cases}$$
- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathcal{C}^2$.

- Les fonctions de la forme $x \longmapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- C'est l'EV engendré par la famille de vecteurs :
$$(x \longmapsto \cos(x), x \longmapsto \sin(x))$$

- Les solutions de l'équation différentielle homogène :
$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ avec a et b deux fonctions continues.
- On considère :
$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^2(I) & \rightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & (x \longmapsto y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)) \end{cases}$$
- L'ensemble cherché est $\ker(\varphi)$ c'est donc un SEV de $\mathcal{C}^2$.

- Si E est un EV et F et G sont deux SEV de E, l'égalité $F = G$ peut se démontrer simplement par double inclusion (comme une égalité d'ensembles) mais on a aussi :
  - dans le cas de la dimension finie : $F = G$ est équivalent à $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ ce qui est plus simple.
  - les inclusions $\{0\} \subset F$ et $F \subset E$ sont évidentes !
  - Si on doit montrer $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$ alors il suffit de vérifier que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans le SEV G !

- Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $x = (1, 1, 0)$ et $y = (1, 0, 1)$ engendrent le même SEV que les deux vecteurs $u = (1, 3, -2)$ et $v = (1, 4, -3)$.

- Si E est muni d'un produit scalaire et si A est une partie de E, alors $A^\perp$ est un SEV de E.
  C'est :
  $$A^\perp = \left\{ x \in E \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\}$$

- Si E est un EV et F et G sont deux SEV de E, l'égalité $F = G$ peut se démontrer simplement par double inclusion (comme une égalité d'ensembles) mais on a aussi :
  - dans le cas de la dimension finie : $F = G$ est équivalent à $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ ce qui est plus simple.
  - les inclusions $\{0\} \subset F$ et $F \subset E$ sont évidentes !
  - Si on doit montrer $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$ alors il suffit de vérifier que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans le SEV G !

- Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $x = (1, 1, 0)$ et $y = (1, 0, 1)$ engendrent le même SEV que les deux vecteurs $u = (1, 3, -2)$ et $v = (1, 4, -3)$.

- Si E est muni d'un produit scalaire et si A est une partie de E, alors $A^{\perp}$ est un SEV de E.
  C'est :

$$A^{\perp} = \left\{ x \in E \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\}$$

- Si E est un EV et F et G sont deux SEV de E, l'égalité $F = G$ peut se démontrer simplement par double inclusion (comme une égalité d'ensembles) mais on a aussi :
  - dans le cas de la dimension finie : $F = G$ est équivalent à $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ ce qui est plus simple.
  - les inclusions $\{0\} \subset F$ et $F \subset E$ sont évidentes !
  - Si on doit montrer $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$ alors il suffit de vérifier que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans le SEV G !

- Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $x = (1, 1, 0)$ et $y = (1, 0, 1)$ engendrent le même SEV que les deux vecteurs $u = (1, 3, -2)$ et $v = (1, 4, -3)$.

- Si E est muni d'un produit scalaire et si A est une partie de E, alors $A^\perp$ est un SEV de E.
  C'est :
  $$A^\perp = \left\{ x \in E \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\}$$

- Si E est un EV et F et G sont deux SEV de E, l'égalité $F = G$ peut se démontrer simplement par double inclusion (comme une égalité d'ensembles) mais on a aussi :
  - dans le cas de la dimension finie : $F = G$ est équivalent à $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ ce qui est plus simple.
  - les inclusions $\{0\} \subset F$ et $F \subset E$ sont évidentes !
  - Si on doit montrer $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$ alors il suffit de vérifier que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans le SEV G !

- Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $x = (1, 1, 0)$ et $y = (1, 0, 1)$ engendrent le même SEV que les deux vecteurs $u = (1, 3, -2)$ et $v = (1, 4, -3)$.

- Si E est muni d'un produit scalaire et si A est une partie de E, alors $A^{\perp}$ est un SEV de E.
  C'est :
  $$A^{\perp} = \left\{ x \in E \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\}$$

- Si E est un EV et F et G sont deux SEV de E, l'égalité $F = G$ peut se démontrer simplement par double inclusion (comme une égalité d'ensembles) mais on a aussi :
  - dans le cas de la dimension finie : $F = G$ est équivalent à $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ ce qui est plus simple.
  - les inclusions $\{0\} \subset F$ et $F \subset E$ sont évidentes !
  - Si on doit montrer $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$ alors il suffit de vérifier que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans le SEV G !

- Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $x = (1, 1, 0)$ et $y = (1, 0, 1)$ engendrent le même SEV que les deux vecteurs $u = (1, 3, -2)$ et $v = (1, 4, -3)$.

- Si E est muni d'un produit scalaire et si A est une partie de E, alors $A^\perp$ est un SEV de E.
  C'est :

$$A^\perp = \left\{ x \in E \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\}$$

- Si E est un EV et F et G sont deux SEV de E, l'égalité $F = G$ peut se démontrer simplement par double inclusion (comme une égalité d'ensembles) mais on a aussi :
  - dans le cas de la dimension finie : $F = G$ est équivalent à $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ ce qui est plus simple.
  - les inclusions $\{0\} \subset F$ et $F \subset E$ sont évidentes !
  - Si on doit montrer $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$ alors il suffit de vérifier que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans le SEV G !

- Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $x = (1, 1, 0)$ et $y = (1, 0, 1)$ engendrent le même SEV que les deux vecteurs $u = (1, 3, -2)$ et $v = (1, 4, -3)$.

- Si E est muni d'un produit scalaire et si A est une partie de E, alors $A^{\perp}$ est un SEV de E.
C'est :

$$A^{\perp} = \left\{ x \in E \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\}$$

- Si E est un EV et F et G sont deux SEV de E, l'égalité $F = G$ peut se démontrer simplement par double inclusion (comme une égalité d'ensembles) mais on a aussi :
  - dans le cas de la dimension finie : $F = G$ est équivalent à $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ ce qui est plus simple.
  - les inclusions $\{0\} \subset F$ et $F \subset E$ sont évidentes !
  - Si on doit montrer $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$ alors il suffit de vérifier que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans le SEV G !

- Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $x = (1, 1, 0)$ et $y = (1, 0, 1)$ engendrent le même SEV que les deux vecteurs $u = (1, 3, -2)$ et $v = (1, 4, -3)$.

- Si E est muni d'un produit scalaire et si A est une partie de E, alors $A^\perp$ est un SEV de E.
  C'est :
$$A^\perp = \left\{ x \in E \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\}$$

- Si E est un EV et F et G sont deux SEV de E, l'égalité $F = G$ peut se démontrer simplement par double inclusion (comme une égalité d'ensembles) mais on a aussi :
  - dans le cas de la dimension finie : $F = G$ est équivalent à $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ ce qui est plus simple.
  - les inclusions $\{0\} \subset F$ et $F \subset E$ sont évidentes !
  - Si on doit montrer $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$ alors il suffit de vérifier que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans le SEV G !

- Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $x = (1, 1, 0)$ et $y = (1, 0, 1)$ engendrent le même SEV que les deux vecteurs $u = (1, 3, -2)$ et $v = (1, 4, -3)$.

- Si E est muni d'un produit scalaire et si A est une partie de E, alors $A^\perp$ est un SEV de E.

  C'est :
$$A^\perp = \left\{ x \in E \middle| \forall a \in A, < a, x >= 0 \right\}$$

Produit de deux EVs

- Rappel : Le produit cartésien de deux ensembles E et F est :

$$E \times F = \left\{ (e, f) \middle| e \in E \text{ et } f \in F \right\}$$

- Si E et F sont des EV sur $\mathbb{K}$, alors on peut munir $E \times F$ d'une structure d'EV :
  - Le 0 est $(0_E, 0_F)$.
  - L'addition est : $(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$
  - La multiplication externe est : $\lambda(e_1, f_1) = (\lambda e_1, \lambda f_1)$

- Si E et F sont deux EV de dimension finie, alors :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_m)$ est une base de F, alors $\left(\left((e_i, 0) \right)_{i \in [\![1,n]\!]}, \left((0, f_j) \right)_{j \in [\![1,m]\!]} \right)$ est base de $E \times F$.

Produit de deux EVs

- **Rappel :** Le produit cartésien de deux ensembles E et F est :

$$E \times F = \left\{ (e, f) \middle| e \in E \text{ et } f \in F \right\}$$

- Si E et F sont des EV sur $\mathbb{K}$, alors on peut munir $E \times F$ d'une structure d'EV :
  - Le 0 est $(0_E, 0_F)$.
  - L'addition est : $(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$
  - La multiplication externe est : $\lambda(e_1, f_1) = (\lambda e_1, \lambda f_1)$

- Si E et F sont deux EV de dimension finie, alors :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ est une base de F, alors $\left(\left((e_i, 0) \right)_{i \in [\![1,n]\!]}, \left((0, f_j) \right)_{j \in [\![1,m]\!]} \right)$ est base de $E \times F$.

Produit de deux EVs

- **Rappel :** Le produit cartésien de deux ensembles E et F est :

$$E \times F = \left\{ (e, f) \middle| e \in E \text{ et } f \in F \right\}$$

- Si E et F sont des EV sur $\mathbb{K}$, alors on peut munir $E \times F$ d'une structure d'EV :
  - Le 0 est $(0_E, 0_F)$.
  - L'addition est : $(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$
  - La multiplication externe est : $\lambda(e_1, f_1) = (\lambda e_1, \lambda f_1)$

- Si E et F sont deux EV de dimension finie, alors :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ est une base de F, alors $\left(\left((e_i, 0) \right)_{i \in [\![1,n]\!]}, \left((0, f_j) \right)_{j \in [\![1,m]\!]} \right)$ est base de $E \times F$.

Produit de deux EVs

- **Rappel :** Le produit cartésien de deux ensembles E et F est :

$$E \times F = \left\{ (e, f) \middle| e \in E \text{ et } f \in F \right\}$$

- Si E et F sont des EV sur $\mathbb{K}$, alors on peut munir $E \times F$ d'une structure d'EV :
  - Le 0 est $(0_E, 0_F)$.
  - L'addition est : $(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$
  - La multiplication externe est : $\lambda(e_1, f_1) = (\lambda e_1, \lambda f_1)$

- Si E et F sont deux EV de dimension finie, alors :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ est une base de F, alors $\left(\left((e_i, 0) \right)_{i \in [\![1,n]\!]}, \left((0, f_j) \right)_{j \in [\![1,m]\!]} \right)$ est base de $E \times F$.

Produit de deux EVs

- Rappel : Le produit cartésien de deux ensembles E et F est :

$$E \times F = \left\{(e, f) \middle| e \in E \text{ et } f \in F\right\}$$

- Si E et F sont des EV sur $\mathbb{K}$, alors on peut munir $E \times F$ d'une structure d'EV :
  - Le 0 est $(0_E, 0_F)$.
  - L'addition est : $(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$
  - La multiplication externe est : $\lambda(e_1, f_1) = (\lambda e_1, \lambda f_1)$

- Si E et F sont deux EV de dimension finie, alors :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_m)$ est une base de F, alors $\left(\left((e_i, 0)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}, \left((0, f_j)\right)_{j \in [\![1,m]\!]}\right)$ est base de $E \times F$.

Produit de deux EVs

- Rappel : Le produit cartésien de deux ensembles E et F est :

$$E \times F = \left\{(e, f) \middle| e \in E \text{ et } f \in F\right\}$$

- Si E et F sont des EV sur $\mathbb{K}$, alors on peut munir $E \times F$ d'une structure d'EV :
  - Le 0 est $(0_E, 0_F)$.
  - L'addition est : $(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$
  - La multiplication externe est : $\lambda(e_1, f_1) = (\lambda e_1, \lambda f_1)$

- Si E et F sont deux EV de dimension finie, alors :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ est une base de F, alors $\left(\left((e_i, 0)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}, \left((0, f_j)\right)_{j \in [\![1,m]\!]}\right)$ est base de $E \times F$.

Produit de deux EVs

- Rappel : Le produit cartésien de deux ensembles E et F est :

$$E \times F = \left\{ (e, f) \middle| e \in E \text{ et } f \in F \right\}$$

- Si E et F sont des EV sur $\mathbb{K}$, alors on peut munir $E \times F$ d'une structure d'EV :
  - Le 0 est $(0_E, 0_F)$.
  - L'addition est : $(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$
  - La multiplication externe est : $\lambda(e_1, f_1) = (\lambda e_1, \lambda f_1)$

- Si E et F sont deux EV de dimension finie, alors :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_m)$ est une base de F, alors $\left(\left((e_i, 0) \right)_{i \in [\![1,n]\!]}, \left((0, f_j) \right)_{j \in [\![1,m]\!]} \right)$ est base de $E \times F$.

Produit de deux EVs

- Rappel : Le produit cartésien de deux ensembles E et F est :

$$E \times F = \left\{(e, f) \middle| e \in E \text{ et } f \in F\right\}$$

- Si E et F sont des EV sur $\mathbb{K}$, alors on peut munir $E \times F$ d'une structure d'EV :
  - Le 0 est $(0_E, 0_F)$.
  - L'addition est : $(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$
  - La multiplication externe est : $\lambda(e_1, f_1) = (\lambda e_1, \lambda f_1)$

- Si E et F sont deux EV de dimension finie, alors :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ est une base de F, alors $\left(\left((e_i, 0)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}, \left((0, f_j)\right)_{j \in [\![1,m]\!]}\right)$ est base de $E \times F$.

Produit d'un nombre fini d'EVs

- Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n ensembles, alors le produit cartésien, noté $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est défini par :

$$\prod_{i=1}^{n} E_i = \left\{ (u_1, \ldots, u_n) \middle| \forall i \in [\![1, n]\!],\ u_i \in E_i \right\}$$

- Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des EV, alors on peut munir $\prod_{i=1}^{n} E_i$ d'une structure d'espace vectoriel : addition terme à terme, multiplication externe de chaque composante.

- Exactement comme $\mathbb{R}^n$ sauf que la i-ième composante est un élément de E_i.

Produit d'un nombre fini d'EVs

- Si $E_1, \dots, E_n$ sont n ensembles, alors le produit cartésien, noté $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est défini par :

$$\prod_{i=1}^{n} E_i = \left\{ (u_1, \dots, u_n) \middle| \forall i \in [\![1, n]\!],\ u_i \in E_i \right\}$$

- Si $E_1, \dots, E_n$ sont des EV, alors on peut munir $\prod_{i=1}^{n} E_i$ d'une structure d'espace vectoriel : addition terme à terme, multiplication externe de chaque composante.

- Exactement comme $\mathbb{R}^n$ sauf que la i-ième composante est un élément de E_i.

Produit d'un nombre fini d'EVs

- Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n ensembles, alors le produit cartésien, noté $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est défini par :
$$\prod_{i=1}^{n} E_i = \left\{ (u_1, \ldots, u_n) \middle| \forall i \in [\![1, n]\!],\ u_i \in E_i \right\}$$
- Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des EV, alors on peut munir $\prod_{i=1}^{n} E_i$ d'une structure d'espace vectoriel : addition terme à terme, multiplication externe de chaque composante.

- Exactement comme $\mathbb{R}^n$ sauf que la i-ième composante est un élément de E_i.

Produit d'un nombre fini de SEVs

- Si $E_1, \dots, E_n$ sont des EV de dimension finie, alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

- Une base est obtenue en prenant la base de E_1 suivi de 0, puis base de E_2 « entourée » de 0, etc.

- En particulier si E est de dimension finie alors E^p est de dimension finie et :

$$\dim(E^p) = p \dim(E)$$

Produit d'un nombre fini de SEVs

- Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des EV de dimension finie, alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

- Une base est obtenue en prenant la base de E_1 suivi de 0, puis base de E_2 « entourée » de 0, etc.

- En particulier si E est de dimension finie alors E^p est de dimension finie et :

$$\dim(E^p) = p\dim(E)$$

Produit d'un nombre fini de SEVs

- Si $E_1, \dots, E_n$ sont des EV de dimension finie, alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est de dimension finie et :
$$\dim\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$
- Une base est obtenue en prenant la base de E_1 suivi de 0, puis base de E_2 « entourée » de 0, etc.

- En particulier si E est de dimension finie alors E^p est de dimension finie et :
$$\dim(E^p) = p \dim(E)$$

Somme de deux SEV

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On définit $F+G$ comme :

$$F+G=\left\{u+v \middle| u\in F,\ v\in G\right\}.$$

- Si on considère :

$$\varphi:\begin{cases} F\times G & \rightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{cases} \quad \text{alors} \quad F+G=\mathrm{Im}(\varphi)$$

- Le symbole $+$ est donc un opérateur entre SEV de E (à partir de deux SEV on en crée un troisième).
- On peut montrer $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$, ie $F+G$ est le plus petit SEV qui contient F et G.

Somme de deux SEV

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On définit $F+G$ comme :
$$F+G=\left\{u+v \middle| u\in F,\, v\in G\right\}.$$
- Si on considère :
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} F\times G & \to & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad F+G=\mathrm{Im}(\varphi)$$

- Le symbole $+$ est donc un opérateur entre SEV de E (à partir de deux SEV on en crée un troisième).
- On peut montrer $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$, ie $F+G$ est le plus petit SEV qui contient F et G.

Somme de deux SEV

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On définit $F + G$ comme :
$$F + G = \left\{ u + v \middle| u \in F,\ v \in G \right\}.$$
- Si on considère :
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} F \times G & \rightarrow & E \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad F + G = \mathrm{Im}(\varphi)$$

- Le symbole $+$ est donc un opérateur entre SEV de E (à partir de deux SEV on en crée un troisième).
- On peut montrer $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$, ie $F + G$ est le plus petit SEV qui contient F et G.

Somme de deux SEV

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On définit $F+G$ comme :
$$F+G=\left\{u+v \middle| u\in F,\ v\in G\right\}.$$
- Si on considère :
$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} F\times G & \rightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}\right. \quad \text{alors} \quad F+G=\mathrm{Im}(\varphi)$$

- Le symbole $+$ est donc un opérateur entre SEV de E (à partir de deux SEV on en crée un troisième).
- On peut montrer $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$, ie $F+G$ est le plus petit SEV qui contient F et G.

Somme de deux SEV

- Lorsque l'on sait que $x \in F + G$, alors on sait que x s'écrit sous la forme $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.
- Pour montrer qu'un élément x de E vérifie $x \in F + G$, il faut construire $u \in F$ et $v \in G$, tels que $x = u + v$. On peut utiliser une analyse /synthèse.
- Dans le cas de SEV engendré par des vecteurs, on a :
$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) + \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Somme de deux SEV

- Lorsque l'on sait que $x \in F + G$, alors on sait que x s'écrit sous la forme $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.
- Pour montrer qu'un élément x de E vérifie $x \in F + G$, il faut construire $u \in F$ et $v \in G$, tels que $x = u + v$. On peut utiliser une analyse /synthèse.
- Dans le cas de SEV engendré par des vecteurs, on a :
$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) + \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Somme de deux SEV

- Lorsque l'on sait que $x \in F + G$, alors on sait que x s'écrit sous la forme $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.
- Pour montrer qu'un élément x de E vérifie $x \in F + G$, il faut construire $u \in F$ et $v \in G$, tels que $x = u + v$. On peut utiliser une analyse /synthèse.
- Dans le cas de SEV engendré par des vecteurs, on a :
$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) + \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Soit $E_1, \ldots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On définit le SEV somme de ces SEV $\sum_{i=1}^{n} E_i$ comme :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \middle| \forall i \in [\![1, n]\!] \,,\ x_i \in E_i \right\}$$

- Si on considère :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{n} E_i & \rightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Im}(\varphi)$$

Somme d'une famille finie de SEVs

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On définit le SEV somme de ces SEV $\sum_{i=1}^{n} E_i$ comme :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \middle| \forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ x_i \in E_i \right\}$$

- Si on considère :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{n} E_i & \rightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \sum_{i=1}^{n} E_i = \operatorname{Im}(\varphi)$$

Somme d'une famille finie de SEVs

Soit $E_1, \ldots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On définit le SEV somme de ces SEV $\sum_{i=1}^{n} E_i$ comme :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \middle| \forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ x_i \in E_i \right\}$$

- Si on considère :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{n} E_i & \to & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \sum_{i=1}^{n} E_i = \mathrm{Im}(\varphi)$$

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont en somme directe si pour tout $x \in F + G$ la décomposition sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(u, v) \mapsto u + v$ est injective ie la seule écriture $0 = u + v$ est triviale.

- C'est équivalent à $F \cap G = \{0\}$. On le démontre généralement ainsi.

- Pour indiquer que la somme est directe, on ajoute un décorateur autour de $+$ et on écrit $F \oplus G$ à la place de $F + G$.

Somme directe de deux SEVs

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont en **somme directe** si pour tout $x \in F + G$ la décomposition sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(u, v) \mapsto u + v$ est injective ie la seule écriture $0 = u + v$ est triviale.

- C'est équivalent à $F \cap G = \{0\}$. On le démontre généralement ainsi.

- Pour indiquer que la somme est directe, on ajoute un décorateur autour de $+$ et on écrit $F \oplus G$ à la place de $F + G$.

Somme directe de deux SEVs

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont en **somme directe** si pour tout $x \in F + G$ la décomposition sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(u, v) \mapsto u + v$ est **injective** ie la seule écriture $0 = u + v$ est triviale.

- C'est équivalent à $F \cap G = \{0\}$. On le démontre généralement ainsi.

- Pour indiquer que la somme est directe, on ajoute un décorateur autour de $+$ et on écrit $F \oplus G$ à la place de $F + G$.

Somme directe de deux SEVs

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont en somme directe si pour tout $x \in F + G$ la décomposition sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(u, v) \mapsto u + v$ est injective ie la seule écriture $0 = u + v$ est triviale.

- C'est équivalent à $F \cap G = \{0\}$. On le démontre généralement ainsi.

- Pour indiquer que la somme est directe, on ajoute un décorateur autour de $+$ et on écrit $F \oplus G$ à la place de $F + G$.

Somme directe de deux SEVs

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont en somme directe si pour tout $x \in F + G$ la décomposition sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(u, v) \mapsto u + v$ est injective ie la seule écriture $0 = u + v$ est triviale.

- C'est équivalent à $F \cap G = \{0\}$. On le démontre généralement ainsi.

- Pour indiquer que la somme est directe, on ajoute un décorateur autour de $+$ et on écrit $F \oplus G$ à la place de $F + G$.

Somme directe de deux SEVs

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont en **somme directe** si pour tout $x \in F + G$ la décomposition sous la forme $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(u, v) \mapsto u + v$ est injective ie la seule écriture $0 = u + v$ est triviale.

- C'est équivalent à $F \cap G = \{0\}$. On le démontre généralement ainsi.

- Pour indiquer que la somme est directe, on ajoute un décorateur autour de $+$ et on écrit $F \oplus G$ à la place de $F + G$.

Somme directe d'une famille de SEVs

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que la somme de la famille (E_i) est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ la décomposition sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est injective ou encore :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = 0 \right)$$

- On n'a plus de caractérisation par l'intersection. Il faut revenir à la résolution de $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Somme directe d'une famille de SEVs

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que la somme de la famille (E_i) est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ la décomposition sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est injective ou encore :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = 0 \right)$$

- On n'a plus de caractérisation par l'intersection. Il faut revenir à la résolution de $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Somme directe d'une famille de SEVs

Soit $E_1, \ldots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que la somme de la famille (E_i) est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ la décomposition sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est injective ou encore :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1, n]\!], \; x_i = 0 \right)$$

- On n'a plus de caractérisation par l'intersection. Il faut revenir à la résolution de $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Somme directe d'une famille de SEVs

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que la somme de la famille (E_i) est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ la décomposition sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est injective ou encore :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = 0 \right)$$

- On n'a plus de caractérisation par l'intersection. Il faut revenir à la résolution de $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Somme directe d'une famille de SEVs

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que la somme de la famille (E_i) est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ la décomposition sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est injective ou encore :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = 0 \right)$$

- On n'a plus de caractérisation par l'intersection. Il faut revenir à la résolution de $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Somme directe d'une famille de SEVs

Soit $E_1, \ldots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que la somme de la famille (E_i) est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ la décomposition sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est unique.
- C'est-à-dire si l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est injective ou encore :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = 0 \right)$$

- On n'a plus de caractérisation par l'intersection. Il faut revenir à la résolution de $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Somme directe d'une famille finie de SEVs

Soit $E_1, \ldots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que la somme de la famille (E_i) est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ la décomposition sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est unique.

- Pour indiquer que la somme est directe, on ajoute un décorateur : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ à la place de $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

Somme directe d'une famille finie de SEVs

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que la somme de la famille (E_i) est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^{n} E_i$ la décomposition sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est unique.

- Pour indiquer que la somme est directe, on ajoute un décorateur : $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ à la place de $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

SEV supplémentaires

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont supplémentaires dans E, lorsque l'on a $E = F \oplus G$.
- Cela signifie donc que $F + G = E$ et que F et G sont en somme directe. Autrement dit que $(u, v) \longmapsto u + v$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $u + v$, ie :
$$\forall x \in E,\ \exists!(u, v) \in F \times G,\ x = u + v$$

- Dans ce cas E est isomorphe à $F \times G$!

SEV supplémentaires

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E, lorsque l'on a $E = F \oplus G$.
- Cela signifie donc que $F + G = E$ et que F et G sont en somme directe. Autrement dit que $(u, v) \longmapsto u + v$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $u + v$, ie :

$$\forall x \in E,\ \exists!(u, v) \in F \times G,\ x = u + v$$

- Dans ce cas E est isomorphe à $F \times G$!

SEV supplémentaires

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E, lorsque l'on a $E = F \oplus G$.
- Cela signifie donc que $F + G = E$ et que F et G sont en somme directe. Autrement dit que $(u, v) \longmapsto u + v$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $u + v$, ie :

$$\forall x \in E, \ \exists!(u, v) \in F \times G, \ x = u + v$$

- Dans ce cas E est isomorphe à $F \times G$!

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont supplémentaires dans E, lorsque l'on a $E = F \oplus G$.
- Cela signifie donc que $F + G = E$ et que F et G sont en somme directe. Autrement dit que $(u, v) \longmapsto u + v$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $u + v$, ie :
$$\forall x \in E, \ \exists!(u, v) \in F \times G, \ x = u + v$$

- Dans ce cas E est isomorphe à $F \times G$!

SEV supplémentaires

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont supplémentaires dans E, lorsque l'on a $E = F \oplus G$.
- Cela signifie donc que $F + G = E$ et que F et G sont en somme directe. Autrement dit que $(u, v) \longmapsto u + v$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $u + v$, ie :
$$\forall x \in E,\ \exists!(u, v) \in F \times G,\ x = u + v$$

- Dans ce cas E est isomorphe à $F \times G$!

SEV supplémentaires

Soit E un EV et F et G deux SEV de E.

- On dit que F et G sont supplémentaires dans E, lorsque l'on a $E = F \oplus G$.
- Cela signifie donc que $F + G = E$ et que F et G sont en somme directe. Autrement dit que $(u, v) \longmapsto u + v$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $u + v$, ie :
$$\forall x \in E,\ \exists!(u, v) \in F \times G,\ x = u + v$$

- Dans ce cas E est isomorphe à $F \times G$!

SEV supplémentaire en analyse

- On note $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1], \mathbb{R}\Big)$ le $\mathbb{R}$-ev des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On note aussi :
$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$$
- Pour $k \in \{0,1,2\}$, on note : $e_k : x \longmapsto x^k$ et $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.
- Montrer que F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E.

SEV supplémentaire en analyse

- On note $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1], \mathbb{R}\Big)$ le $\mathbb{R}$-ev des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On note aussi :
$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$$
- Pour $k \in \{0,1,2\}$, on note : $e_k : x \longmapsto x^k$ et $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.
- Montrer que F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E.

SEV supplémentaire en analyse

- On note $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1], \mathbb{R}\Big)$ le $\mathbb{R}$-ev des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On note aussi :
$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$$
- Pour $k \in \{0,1,2\}$, on note : $e_k : x \longmapsto x^k$ et $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.
- Montrer que F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E.

SEV supplémentaire en analyse

- On note $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1],\mathbb{R}\Big)$ le $\mathbb{R}$-ev des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On note aussi :
$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$$
- Pour $k \in \{0,1,2\}$, on note : $e_k : x \longmapsto x^k$ et $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.
- Montrer que F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E.

SEV supplémentaire en analyse

- On note $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1], \mathbb{R}\Big)$ le $\mathbb{R}$-ev des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On note aussi :
$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$$
- Pour $k \in \{0,1,2\}$, on note : $e_k : x \longmapsto x^k$ et $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.
- Montrer que F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E.

- $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1],\ R\Big)$,
  $F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$, $e_k : x \longmapsto x^k$ et
  $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$. Montrons $E = F \oplus G$
- F et G sont des SEV de E. Il s'agit de prouver $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$

- $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1],\ R\Big)$,
  $F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$, $e_k : x \longmapsto x^k$ et
  $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$. Montrons $E = F \oplus G$
- F et G sont des SEV de E. Il s'agit de prouver $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$

- $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1],\ R\Big)$,
  $F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$, $e_k : x \longmapsto x^k$ et
  $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$. Montrons $E = F \oplus G$
- F et G sont des SEV de E. Il s'agit de prouver $F \cap G = \{0\}$ et
  $E = F + G$

- $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1],\ R\Big)$,
  $F = \left\{ f \in E \middle| \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$, $e_k : x \longmapsto x^k$ et
  $G = \text{Vect}(e_0, e_1, e_2)$. Montrons $E = F \oplus G$
- F et G sont des SEV de E. Il s'agit de prouver $F \cap G = \{0\}$ et
  $E = F + G$

Pour montrer $F \cap G = \{0\}$, on considère $u \in F \cap G$. On a alors :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in [0,1],\ u(x) = ax^2 + bx + c$$

$$u(0) = 0 \qquad u'(1) = 0 \qquad \int_0^1 u(t)dt = 0$$

Ce qui donne le système : $\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 0 \\ c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ On trouve alors $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ et donc $u = 0$.

- $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1],\ R\Big)$,
  $F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$, $e_k : x \longmapsto x^k$ et
  $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$. Montrons $E = F \oplus G$
- F et G sont des SEV de E. Il s'agit de prouver $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$

Pour montrer $E = F + G$, on considère $f \in E$. Il faut faire une analyse synthèse.

- $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1],\ R\Big)$,
  $F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$, $e_k : x \longmapsto x^k$ et
  $G = \text{Vect}(e_0, e_1, e_2)$. Montrons $E = F \oplus G$
- F et G sont des SEV de E. Il s'agit de prouver $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$

On fixe $f \in E$ et on cherche $u \in F$ et $v \in G$, tel que : $f = u + v$. On écrit $v = ae_2 + be_1 + ce_0$ et on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = \int_0^1 f(t)dt \\ c = f(0) \\ 2a + b = f'(1) \end{cases}$$

On a un système échelonné donc une unique solution.

- $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1],\ R\Big)$,
  $F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$, $e_k : x \longmapsto x^k$ et
  $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$. Montrons $E = F \oplus G$
- F et G sont des SEV de E. Il s'agit de prouver $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$

Pour la synthèse à $f \in E$ fixé, on pose (a, b, c) les trois solutions précédentes $v = ae_2 + be_1 + ce_0$ et $u = f - v$.
On a alors :

- Ces valeurs sont bien définies puisque f est $\mathcal{C}^1$, et que le système admet une unique solution.
- $v \in G$ (évident),
- $f = u + v$ (évident)
- Il faut donc vérifier que $u \in F$! (en utilisant le système précédent).

SEV supplémentaires

Soit $E_1, \ldots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que les SEV $E_1, \ldots, E_n$ sont supplémentaires dans E, lorsque l'on a $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
- Cela signifie donc que $\sum_{i=1}^{n} E_i = E$ et que les E_i sont en somme directe.

  Autrement dit que $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $\sum_{i=1}^{n} x_i$, ie :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

SEV supplémentaires

Soit $E_1, \ldots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que les SEV $E_1, \ldots, E_n$ sont **supplémentaires** dans E, lorsque l'on a $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
- Cela signifie donc que $\sum_{i=1}^{n} E_i = E$ et que les E_i sont en somme directe.

  Autrement dit que $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $\sum_{i=1}^{n} x_i$, ie :

$$\forall x \in E, \ \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

SEV supplémentaires

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que les SEV $E_1, \dots, E_n$ sont supplémentaires dans E, lorsque l'on a $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
- Cela signifie donc que $\sum_{i=1}^{n} E_i = E$ et que les E_i sont en somme directe.

  Autrement dit que $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $\sum_{i=1}^{n} x_i$, ie :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

SEV supplémentaires

Soit $E_1, \ldots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que les SEV $E_1, \ldots, E_n$ sont **supplémentaires** dans E, lorsque l'on a $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
- Cela signifie donc que $\sum_{i=1}^{n} E_i = E$ et que les E_i sont en somme directe.

  Autrement dit que $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $\sum_{i=1}^{n} x_i$, ie :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

SEV supplémentaires

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E.

- On dit que les SEV $E_1, \dots, E_n$ sont supplémentaires dans E, lorsque l'on a $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
- Cela signifie donc que $\sum_{i=1}^{n} E_i = E$ et que les E_i sont en somme directe.

  Autrement dit que $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est un isomorphisme.
- On a alors existence et unicité de l'écriture $\sum_{i=1}^{n} x_i$, ie :

$$\forall x \in E,\ \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Dans le cadre de la dimension finie :

- Si $E = F \oplus G$, soit $\mathcal{B}$ une base de F et $\mathcal{C}$ une base de G, alors la famille obtenue en réunissant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_p)$ une base de l'EV E. On considère les SEV suivants :
$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \text{ et } G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_p)$$
Alors $E = F \oplus G$.

Relations sur les dimensions

- Si F et G sont en somme directe, alors
$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Dans le cadre de la dimension finie :

- Si $E = F \oplus G$, soit $\mathcal{B}$ une base de F et $\mathcal{C}$ une base de G, alors la famille obtenue en réunissant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_p)$ une base de l'EV E. On considère les SEV suivants :

$$F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \text{ et } G = \text{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_p)$$

Alors $E = F \oplus G$.

Relations sur les dimensions

- Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Dans le cadre de la dimension finie :

- Si $E = F \oplus G$, soit $\mathcal{B}$ une base de F et $\mathcal{C}$ une base de G, alors la famille obtenue en réunissant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_p)$ une base de l'EV E. On considère les SEV suivants :
$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \text{ et } G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p)$$
Alors $E = F \oplus G$.

Relations sur les dimensions

- Si F et G sont en somme directe, alors
$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Dans le cadre de la dimension finie :

- Si $E = F \oplus G$, soit $\mathcal{B}$ une base de F et $\mathcal{C}$ une base de G, alors la famille obtenue en réunissant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_p)$ une base de l'EV E. On considère les SEV suivants :
$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \text{ et } G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_p)$$
Alors $E = F \oplus G$.

Relations sur les dimensions

- Si F et G sont en somme directe, alors
$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Dans le cadre de la dimension finie :

- Si $E = F \oplus G$, soit $\mathcal{B}$ une base de F et $\mathcal{C}$ une base de G, alors la famille obtenue en réunissant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_p)$ une base de l'EV E. On considère les SEV suivants :
$$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \text{ et } G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_p)$$
Alors $E = F \oplus G$.

Relations sur les dimensions

- Si F et G sont en somme directe, alors
$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Caractérisation des SEVs supplémentaires par la dimension

Relations sur les dimensions

- Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
- Dans le cas général : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. (relation de Grassmann)
- En particulier : $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$.

On peut montrer plus facilement que F et G sont supplémentaires :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\iff E = F + G \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

- Si on peut on fait : $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Caractérisation des SEVs supplémentaires par la dimension

Relations sur les dimensions

- Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
- Dans le cas général : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. (relation de Grassmann)
- En particulier : $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$.

On peut montrer plus facilement que F et G sont supplémentaires :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\iff E = F + G \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

- Si on peut on fait : $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Caractérisation des SEVs supplémentaires par la dimension

Relations sur les dimensions

- Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
- Dans le cas général : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. (relation de Grassmann)
- En particulier : $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$.

On peut montrer plus facilement que F et G sont supplémentaires :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\iff E = F + G \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

- Si on peut on fait : $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Caractérisation des SEVs supplémentaires par la dimension

Relations sur les dimensions

- Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
- Dans le cas général : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. (relation de Grassmann)
- En particulier : $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$.

On peut montrer plus facilement que F et G sont supplémentaires :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\iff E = F + G \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

- Si on peut on fait : $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Caractérisation des SEVs supplémentaires par la dimension

Relations sur les dimensions

- Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
- Dans le cas général : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. (relation de Grassmann)
- En particulier : $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$.

On peut montrer plus facilement que F et G sont supplémentaires :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\iff E = F + G \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

- Si on peut on fait : $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E de dimension finie.

- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i pour tout i, et $\mathcal{B}$ la famille obtenue en réunissant toutes les bases $\mathcal{B}_i$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de l'EV E. On la fractionne en n parties $(\mathcal{B}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et on considère les SEV : $E_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ pour toutes les valeurs de i.

  Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

Relations sur les dimensions

- Si les (E_i) sont en somme directe, alors

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E de dimension finie.

- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i pour tout i, et $\mathcal{B}$ la famille obtenue en réunissant toutes les bases $\mathcal{B}_i$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de l'EV E. On la fractionne en n parties $(\mathcal{B}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et on considère les SEV : $E_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ pour toutes les valeurs de i.

  Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

Relations sur les dimensions

- Si les (E_i) sont en somme directe, alors

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E de dimension finie.

- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i pour tout i, et $\mathcal{B}$ la famille obtenue en réunissant toutes les bases $\mathcal{B}_i$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E. On parle de **base adaptée à une somme directe**.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de l'EV E. On la fractionne en n parties $(\mathcal{B}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et on considère les SEV : $E_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ pour toutes les valeurs de i.

  Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

Relations sur les dimensions

- Si les (E_i) sont en somme directe, alors

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E de dimension finie.

- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i pour tout i, et $\mathcal{B}$ la famille obtenue en réunissant toutes les bases $\mathcal{B}_i$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E. On parle de **base adaptée à une somme directe**.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de l'EV E. On la fractionne en n parties $(\mathcal{B}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et on considère les SEV : $E_i = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$ pour toutes les valeurs de i.

  Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

Relations sur les dimensions

- Si les (E_i) sont en somme directe, alors

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E de dimension finie.

- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i pour tout i, et $\mathcal{B}$ la famille obtenue en réunissant toutes les bases $\mathcal{B}_i$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de l'EV E. On la fractionne en n parties $(\mathcal{B}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et on considère les SEV : $E_i = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$ pour toutes les valeurs de i.

  Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

Relations sur les dimensions

- Si les (E_i) sont en somme directe, alors

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soit $E_1, \dots, E_n$ une famille de SEV de E de dimension finie.

- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i pour tout i, et $\mathcal{B}$ la famille obtenue en réunissant toutes les bases $\mathcal{B}_i$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de l'EV E. On la fractionne en n parties $(\mathcal{B}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et on considère les SEV : $E_i = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$ pour toutes les valeurs de i.

  Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

Relations sur les dimensions

- Si les (E_i) sont en somme directe, alors

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Caractérisation des SEVs supplémentaires par la dimension

Relations sur les dimensions

- Si les (E_i) sont en somme directe, alors $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.
- Dans le cas général : $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

On peut montrer plus facilement que les (E_i) sont en somme directe :

$$(E_i) \text{ sont en somme directe} \iff \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

Caractérisation des SEVs supplémentaires par la dimension

Relations sur les dimensions

- Si les (E_i) sont en somme directe, alors $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.
- Dans le cas général : $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$. car la famille obtenue en réunissant chacune des bases des E_i est génératrice !

On peut montrer plus facilement que les (E_i) sont en somme directe :

$$(E_i) \text{ sont en somme directe} \iff \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

Caractérisation des SEVs supplémentaires par la dimension

Relations sur les dimensions

- Si les (E_i) sont en somme directe, alors $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.
- Dans le cas général : $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

On peut montrer plus facilement que les (E_i) sont en somme directe :

$$(E_i) \text{ sont en somme directe } \iff \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

Caractérisation des SEVs supplémentaires par la dimension

Relations sur les dimensions

- Si les (E_i) sont en somme directe, alors $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.
- Dans le cas général : $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

On peut montrer plus facilement que les (E_i) sont en somme directe :

$$(E_i) \text{ sont en somme directe} \iff \dim\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

car dans ce cas, la famille obtenu en réunissant chacune des base des E_i est une base !

Sous-espace vectoriel et bases

- Si F est un SEV de E et que E est de dimension finie, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.
- Une base de E adaptée au SEV F est une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F, avec $\dim(F) = p$.

- Il existe toujours des bases adaptées Il suffit de partir d'une base de F puis de compléter en une base de E.
- $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est alors une base d'un supplémentaire de F.
- Pour trouver un supplémentaire de F dans E, on part d'une base de F que l'on complète pour avoir une base de E. L'espace engendré par les vecteurs ajoutés est un supplémentaire de F.
- Tout SEV admet des supplémentaires. L'un d'entre eux est unique et particulier, c'est le supplémentaire orthogonal.

Sous-espace vectoriel et bases

- Si F est un SEV de E et que E est de dimension finie, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.
- Une base de E adaptée au SEV F est une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F, avec $\dim(F) = p$.

- Il existe toujours des bases adaptées Il suffit de partir d'une base de F puis de compléter en une base de E.
- $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est alors une base d'un supplémentaire de F.
- Pour trouver un supplémentaire de F dans E, on part d'une base de F que l'on complète pour avoir une base de E. L'espace engendré par les vecteurs ajoutés est un supplémentaire de F.
- Tout SEV admet des supplémentaires. L'un d'entre eux est unique et particulier, c'est le supplémentaire orthogonal.

Sous-espace vectoriel et bases

- Si F est un SEV de E et que E est de dimension finie, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.
- Une base de E adaptée au SEV F est une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F, avec $\dim(F) = p$.

- Il existe toujours des bases adaptées Il suffit de partir d'une base de F puis de compléter en une base de E.
- $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est alors une base d'un supplémentaire de F.
- Pour trouver un supplémentaire de F dans E, on part d'une base de F que l'on complète pour avoir une base de E. L'espace engendré par les vecteurs ajoutés est un supplémentaire de F.
- Tout SEV admet des supplémentaires. L'un d'entre eux est unique et particulier, c'est le supplémentaire orthogonal.

Sous-espace vectoriel et bases

- Si F est un SEV de E et que E est de dimension finie, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.
- Une base de E adaptée au SEV F est une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F, avec $\dim(F) = p$.

- Il existe toujours des bases adaptées Il suffit de partir d'une base de F puis de compléter en une base de E.
- $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est alors une base d'un supplémentaire de F.
- Pour trouver un supplémentaire de F dans E, on part d'une base de F que l'on complète pour avoir une base de E. L'espace engendré par les vecteurs ajoutés est un supplémentaire de F.
- Tout SEV admet des supplémentaires. L'un d'entre eux est unique et particulier, c'est le supplémentaire orthogonal.

Sous-espace vectoriel et bases

- Si F est un SEV de E et que E est de dimension finie, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.
- Une base de E adaptée au SEV F est une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F, avec $\dim(F) = p$.

- Il existe toujours des bases adaptées Il suffit de partir d'une base de F puis de compléter en une base de E.
- $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est alors une base d'un supplémentaire de F.
- Pour trouver un supplémentaire de F dans E, on part d'une base de F que l'on complète pour avoir une base de E. L'espace engendré par les vecteurs ajoutés est un supplémentaire de F.
- Tout SEV admet des supplémentaires. L'un d'entre eux est unique et particulier, c'est le supplémentaire orthogonal.

Sous-espace vectoriel et bases

- Si F est un SEV de E et que E est de dimension finie, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.
- Une base de E adaptée au SEV F est une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F, avec $\dim(F) = p$.

- Il existe toujours des bases adaptées Il suffit de partir d'une base de F puis de compléter en une base de E.
- $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est alors une base d'un supplémentaire de F.
- Pour trouver un supplémentaire de F dans E, on part d'une base de F que l'on complète pour avoir une base de E. L'espace engendré par les vecteurs ajoutés est un supplémentaire de F.
- Tout SEV admet des supplémentaires. L'un d'entre eux est unique et particulier, c'est le supplémentaire orthogonal.

Sous-espace vectoriel et bases

- Si F est un SEV de E et que E est de dimension finie, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $E = F$.
- Une base de E adaptée au SEV F est une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F, avec $\dim(F) = p$.

- Il existe toujours des bases adaptées Il suffit de partir d'une base de F puis de compléter en une base de E.
- $\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est alors une base d'un supplémentaire de F.
- Pour trouver un supplémentaire de F dans E, on part d'une base de F que l'on complète pour avoir une base de E. L'espace engendré par les vecteurs ajoutés est un supplémentaire de F.
- Tout SEV admet des supplémentaires. L'un d'entre eux est unique et particulier, c'est le supplémentaire orthogonal.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est libre si la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle triviale où tous les poids sont nuls.
- C'est-à-dire :

$$\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_p = 0\right)$$

- Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

- Pour une famille $\mathcal{F}$ infinie de vecteurs, elle est libre si toute sous-famille finie extraite de $\mathcal{F}$ est libre.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est libre si la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle triviale où tous les poids sont nuls.
- C'est-à-dire :
$$\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_p = 0 \right)$$
- Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

- Pour une famille $\mathcal{F}$ infinie de vecteurs, elle est libre si toute sous-famille finie extraite de $\mathcal{F}$ est libre.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est libre si la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle triviale où tous les poids sont nuls.
- C'est-à-dire :

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_p = 0 \right)$$

- Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

- Pour une famille $\mathcal{F}$ infinie de vecteurs, elle est libre si toute sous-famille finie extraite de $\mathcal{F}$ est libre.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est libre si la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle triviale où tous les poids sont nuls.
- C'est-à-dire :

$$\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_p = 0 \right)$$

- Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

- Pour une famille $\mathcal{F}$ infinie de vecteurs, elle est libre si toute sous-famille finie extraite de $\mathcal{F}$ est libre.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est libre si la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle triviale où tous les poids sont nuls.
- C'est-à-dire :
$$\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_p = 0 \right)$$
- Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

- Pour une famille $\mathcal{F}$ infinie de vecteurs, elle est libre si toute sous-famille finie extraite de $\mathcal{F}$ est libre.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est libre si
$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_p = 0 \right)$$

- La famille est libre si et seulement si elle est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On peut aussi dire que son rang est le nombre de vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est liée si et seulement si au moins l'un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres, ie si l'un des vecteurs appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.
- Une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.
- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, une famille orthonormale de vecteurs est libre.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est libre si
$$\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_p = 0 \right)$$

- La famille est libre si et seulement si elle est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On peut aussi dire que son rang est le nombre de vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est liée si et seulement si au moins l'un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres, ie si l'un des vecteurs appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.
- Une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.
- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, une famille orthonormale de vecteurs est libre.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est libre si
$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_p = 0 \right)$$

- La famille est libre si et seulement si elle est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On peut aussi dire que son rang est le nombre de vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est liée si et seulement si au moins l'un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres, ie si l'un des vecteurs appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.
- Une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.
- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, une famille orthonormale de vecteurs est libre.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est libre si
$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_p = 0 \right)$$

- La famille est libre si et seulement si elle est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On peut aussi dire que son rang est le nombre de vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est liée si et seulement si au moins l'un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres, ie si l'un des vecteurs appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.
- Une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.
- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, une famille orthonormale de vecteurs est libre.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est libre si
$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_p = 0 \right)$$

- La famille est libre si et seulement si elle est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On peut aussi dire que son rang est le nombre de vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est liée si et seulement si au moins l'un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres, ie si l'un des vecteurs appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.
- Une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.
- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, une famille orthonormale de vecteurs est libre.

Famille libre

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est **libre** si

$$\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_p = 0 \right)$$

- La famille est libre si et seulement si elle est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On peut aussi dire que son rang est le nombre de vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est liée si et seulement si au moins l'un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres, ie si l'un des vecteurs appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.
- Une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.
- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, une famille orthonormale de vecteurs est libre.

Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit qu'une famille finie $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'éléments de F est génératrice du SEV F si $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
- On a l'existence de la décomposition :

$$\forall x \in F, \exists(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \; x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$$

- Dans le cas d'une famille $\mathcal{F}$ de cardinal infinie, cela signifie que tout vecteur de F s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Un espace F est de dimension finie si et seulement si il admet une famille génératrice finie (il admet alors une base constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit qu'une famille finie $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ d'éléments de F est **génératrice** du SEV F si $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
- On a l'existence de la décomposition :

$$\forall x \in F, \exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$$

- Dans le cas d'une famille $\mathcal{F}$ de cardinal infinie, cela signifie que tout vecteur de F s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Un espace F est de dimension finie si et seulement si il admet une famille génératrice finie (il admet alors une base constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit qu'une famille finie $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ d'éléments de F est **génératrice** du SEV F si $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
- On a l'existence de la décomposition :

$$\forall x \in F, \exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$$

- Dans le cas d'une famille $\mathcal{F}$ de cardinal infinie, cela signifie que tout vecteur de F s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Un espace F est de dimension finie si et seulement si il admet une famille génératrice finie (il admet alors une base constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit qu'une famille finie $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ d'éléments de F est **génératrice** du SEV F si $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
- On a l'existence de la décomposition :

$$\forall x \in F, \exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$$

- Dans le cas d'une famille $\mathcal{F}$ de cardinal infinie, cela signifie que tout vecteur de F s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Un espace F est de dimension finie si et seulement si il admet une famille génératrice finie (il admet alors une base constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit qu'une famille finie $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'éléments de F est **génératrice** du SEV F si $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
- On a l'existence de la décomposition :

$$\forall x \in F, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$$

- Dans le cas d'une famille $\mathcal{F}$ de cardinal infinie, cela signifie que tout vecteur de F s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Un espace F est de dimension finie si et seulement si il admet une famille génératrice finie (il admet alors une base constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Famille finie génératrice et libre

Pour une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ d'un SEV F, si considère l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \to & F \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \end{cases}$$

φ est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

φ est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de F

φ est bijective si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de F

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Il y a existence (famille génératrice) et unicité (famille libre) des coordonnées dans une base.

- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension. Si la dimension est finie, on choisit une base et on peut travailler dans E comme dans $\mathbb{K}^n$ en identifiant un vecteur et ses coordonnées.
- On peut construire une base en
  - partant d'une famille génératrice et en enlevant les vecteurs combinaison linéaire des autres. On extrait une base d'une famille génératrice.
  - en partant d'une famille libre et en ajoutant des vecteurs d'une famille génératrice qui ne sont pas dans l'espace engendré par les précédents. On dit que l'on complète une famille libre en une base.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Il y a existence (famille génératrice) et unicité (famille libre) des coordonnées dans une base.

- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension. Si la dimension est finie, on choisit une base et on peut travailler dans E comme dans $\mathbb{K}^n$ en identifiant un vecteur et ses coordonnées.
- On peut construire une base en
  - partant d'une famille génératrice et en enlevant les vecteurs combinaison linéaire des autres. On extrait une base d'une famille génératrice.
  - en partant d'une famille libre et en ajoutant des vecteurs d'une famille génératrice qui ne sont pas dans l'espace engendré par les précédents. On dit que l'on complète une famille libre en une base.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Il y a existence (famille génératrice) et unicité (famille libre) des coordonnées dans une base.

- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension. Si la dimension est finie, on choisit une base et on peut travailler dans E comme dans $\mathbb{K}^n$ en identifiant un vecteur et ses coordonnées.
- On peut construire une base en
  - partant d'une famille génératrice et en enlevant les vecteurs combinaison linéaire des autres. On extrait une base d'une famille génératrice.
  - en partant d'une famille libre et en ajoutant des vecteurs d'une famille génératrice qui ne sont pas dans l'espace engendré par les précédents. On dit que l'on complète une famille libre en une base.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Il y a existence (famille génératrice) et unicité (famille libre) des coordonnées dans une base.

- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension. Si la dimension est finie, on choisit une base et on peut travailler dans E comme dans $\mathbb{K}^n$ en identifiant un vecteur et ses coordonnées.
- On peut construire une base en
  - partant d'une famille génératrice et en enlevant les vecteurs combinaison linéaire des autres. On extrait une base d'une famille génératrice
  - en partant d'une famille libre et en ajoutant des vecteurs d'une famille génératrice qui ne sont pas dans l'espace engendré par les précédents. On dit que l'on complète une famille libre en une base.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Il y a existence (famille génératrice) et unicité (famille libre) des coordonnées dans une base.

- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension. Si la dimension est finie, on choisit une base et on peut travailler dans E comme dans $\mathbb{K}^n$ en identifiant un vecteur et ses coordonnées.
- On peut construire une base en
  - partant d'une famille génératrice et en enlevant les vecteurs combinaison linéaire des autres. On extrait une base d'une famille génératrice
  - en partant d'une famille libre et en ajoutant des vecteurs d'une famille génératrice qui ne sont pas dans l'espace engendré par les précédents. On dit que l'on complète une famille libre en une base.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Il y a existence (famille génératrice) et unicité (famille libre) des coordonnées dans une base.

- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension. Si la dimension est finie, on choisit une base et on peut travailler dans E comme dans $\mathbb{K}^n$ en identifiant un vecteur et ses coordonnées.
- On peut construire une base en
  - partant d'une famille génératrice et en enlevant les vecteurs combinaison linéaire des autres. On extrait une base d'une famille génératrice
  - en partant d'une famille libre et en ajoutant des vecteurs d'une famille génératrice qui ne sont pas dans l'espace engendré par les précédents. On dit que l'on complète une famille libre en une base.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Il y a existence (famille génératrice) et unicité (famille libre) des coordonnées dans une base.

- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension. Si la dimension est finie, on choisit une base et on peut travailler dans E comme dans $\mathbb{K}^n$ en identifiant un vecteur et ses coordonnées.
- On peut construire une base en
  - partant d'une famille génératrice et en enlevant les vecteurs combinaison linéaire des autres. On extrait une base d'une famille génératrice
  - en partant d'une famille libre et en ajoutant des vecteurs d'une famille génératrice qui ne sont pas dans l'espace engendré par les précédents. On dit que l'on complète une famille libre en une base.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Il y a existence (famille génératrice) et unicité (famille libre) des coordonnées dans une base.

- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension. Si la dimension est finie, on choisit une base et on peut travailler dans E comme dans $\mathbb{K}^n$ en identifiant un vecteur et ses coordonnées.
- On peut construire une base en
  - partant d'une famille génératrice et en enlevant les vecteurs combinaison linéaire des autres. On extrait une base d'une famille génératrice
  - en partant d'une famille libre et en ajoutant des vecteurs d'une famille génératrice qui ne sont pas dans l'espace engendré par les précédents. On dit que l'on complète une famille libre en une base.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension.

- En conséquence une famille libre contient nécessairement moins de vecteurs que la dimension, et une famille génératrice contient nécessairement plus de vecteurs que la dimension.

- Une famille qui a le bon nombre de vecteurs est automatiquement une base si elle est libre ou génératrice.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension.

- En conséquence une famille libre contient nécessairement moins de vecteurs que la dimension, et une famille génératrice contient nécessairement plus de vecteurs que la dimension.

- Une famille qui a le bon nombre de vecteurs est automatiquement une base si elle est libre ou génératrice.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension.

- En conséquence une famille libre contient nécessairement moins de vecteurs que la dimension, et une famille génératrice contient nécessairement plus de vecteurs que la dimension.

- Une famille qui a le bon nombre de vecteurs est automatiquement une base si elle est libre ou génératrice.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension.

- En conséquence une famille libre contient nécessairement moins de vecteurs que la dimension, et une famille génératrice contient nécessairement plus de vecteurs que la dimension.

- Une famille qui a le bon nombre de vecteurs est automatiquement une base si elle est libre ou génératrice.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension.

- En conséquence une famille libre contient nécessairement moins de vecteurs que la dimension, et une famille génératrice contient nécessairement plus de vecteurs que la dimension.

- Une famille qui a le bon nombre de vecteurs est automatiquement une base si elle est libre ou génératrice.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension.

- En conséquence une famille libre contient nécessairement moins de vecteurs que la dimension, et une famille génératrice contient nécessairement plus de vecteurs que la dimension.

- Une famille qui a le bon nombre de vecteurs est automatiquement une base si elle est libre ou génératrice.

Bases

- Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.
- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la dimension.

- En conséquence une famille libre contient nécessairement moins de vecteurs que la dimension, et une famille génératrice contient nécessairement plus de vecteurs que la dimension.

- Une famille qui a le bon nombre de vecteurs est automatiquement une base si elle est libre ou génératrice.

Dimension des EV de référence

- La dimension de $\mathbb{K}^p$ est p.
- La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est $n+1$.
- La dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $n \times p$. C'est aussi la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie, une base est $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$

Dimension des EV de référence

- La dimension de $\mathbb{K}^p$ est p.
- La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est $n+1$.
- La dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $n \times p$. C'est aussi la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie, une base est $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$

Dimension des EV de référence

- La dimension de $\mathbb{K}^p$ est p.
- La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est $n+1$.
- La dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $n \times p$. C'est aussi la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie, une base est $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$

Dimension des EV de référence

- La dimension de $\mathbb{K}^p$ est p.
- La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est $n+1$.
- La dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $n \times p$. C'est aussi la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie, une base est $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$

Dimension des EV de référence

- La dimension de $\mathbb{K}^p$ est p.
- La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est $n+1$.
- La dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $n \times p$. C'est aussi la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie, une base est $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E, et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ base de F.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- Une fois les bases choisies, la matrice caractérise l'application linéaire.
- On cherche les bases dans laquelle la matrice est la plus simple.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ base de E, et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ base de F.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- Une fois les bases choisies, la matrice caractérise l'application linéaire.
- On cherche les bases dans laquelle la matrice est la plus simple.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ base de E, et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ base de F.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- Une fois les bases choisies, la matrice caractérise l'application linéaire.
- On cherche les bases dans laquelle la matrice est la plus simple.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ base de E, et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ base de F.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- Une fois les bases choisies, la matrice caractérise l'application linéaire.
- On cherche les bases dans laquelle la matrice est la plus simple.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E, et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ base de F.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- Une fois les bases choisies, la matrice caractérise l'application linéaire.
- On cherche les bases dans laquelle la matrice est la plus simple.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E, et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ base de F.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- Une fois les bases choisies, la matrice caractérise l'application linéaire.
- On cherche les bases dans laquelle la matrice est la plus simple.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E, et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ base de F.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- Une fois les bases choisies, la matrice caractérise l'application linéaire.
- On cherche les bases dans laquelle la matrice est la plus simple.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E, et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ base de F.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- Une fois les bases choisies, la matrice caractérise l'application linéaire.
- On cherche les bases dans laquelle la matrice est la plus simple.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E, et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ base de F.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.
- Une fois les bases choisies, la matrice caractérise l'application linéaire.
- On cherche les bases dans laquelle la matrice est la plus simple.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de E avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ un base de E.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées du vecteur u_j.
- En particulier si $x \in E$, $Mat_{\mathcal{B}}(x)$ est le vecteur colonne des coordonnées.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une famille de E avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ un base de E.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées du vecteur u_j.
- En particulier si $x \in E$, $Mat_{\mathcal{B}}(x)$ est le vecteur colonne des coordonnées.

Matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

- un tableau de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$,
- une représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à la matrice.
- une représentation d'une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Si $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de E avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ un base de E.

- La matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est obtenue en mettant dans la colonne j les coordonnées du vecteur u_j.
- En particulier si $x \in E$, $Mat_{\mathcal{B}}(x)$ est le vecteur colonne des coordonnées.

Produit matriciel

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}$ On définit le produit matriciel de A par B comme la matrice C de taille p, r telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, r]\!], \; C_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} B_{k,j}$$

- C'est le produit scalaire de la ligne i de A et de la colonne j de B.
- On se déplace le long d'une ligne de A et d'une colonne de B. C'est la somme sur la dimension commune.

- Le produit n'est pas commutatif (puisqu'il correspond à la composée),
- Le produit n'est pas intègre (on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$).

Produit matriciel

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}$ On définit le produit matriciel de A par B comme la matrice C de taille p, r telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, r]\!], \ C_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} B_{k,j}$$

- C'est le produit scalaire de la ligne i de A et de la colonne j de B.
- On se déplace le long d'une ligne de A et d'une colonne de B. C'est la somme sur la dimension commune.

- Le produit n'est pas commutatif (puisqu'il correspond à la composée),
- Le produit n'est pas intègre (on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$).

Produit matriciel

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}$ On définit le produit matriciel de A par B comme la matrice C de taille p, r telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, r]\!], \; C_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} B_{k,j}$$

- C'est le produit scalaire de la ligne i de A et de la colonne j de B.
- On se déplace le long d'une ligne de A et d'une colonne de B. C'est la somme sur la dimension commune.

- Le produit n'est pas commutatif (puisqu'il correspond à la composée),
- Le produit n'est pas intègre (on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$).

Produit matriciel

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}$ On définit le produit matriciel de A par B comme la matrice C de taille p, r telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, r]\!], \ C_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} B_{k,j}$$

- C'est le produit scalaire de la ligne i de A et de la colonne j de B.
- On se déplace le long d'une ligne de A et d'une colonne de B. C'est la somme sur la dimension commune.

- Le produit n'est pas commutatif (puisqu'il correspond à la composée),
- Le produit n'est pas intègre (on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$).

Produit matriciel

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}$ On définit le produit matriciel de A par B comme la matrice C de taille p, r telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, r]\!], \; C_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} B_{k,j}$$

- C'est le produit scalaire de la ligne i de A et de la colonne j de B.
- On se déplace le long d'une ligne de A et d'une colonne de B. C'est la somme sur la dimension commune.

- Le produit n'est pas commutatif (puisqu'il correspond à la composée),
- Le produit n'est pas intègre (on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$).

Matrices comme support de calculs

Les matrices sont un support de calcul lorsque l'on a les coordonnées.

- image d'un vecteur : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{C}}(f(x))$
- combinaison linéaire d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f + \alpha g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \alpha Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$
- composée d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$
- On peut calculer le rang, l'image, le noyau d'une matrice par la méthode de Gauss = rang, noyau et image de l'application linéaire canoniquement associé.

- Pour montrer une relation du type $f \circ g = g \circ f$ ou $p \circ p = p$ on utilise les matrices.

Matrices comme support de calculs

Les matrices sont un support de calcul lorsque l'on a les coordonnées.

- image d'un vecteur : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{C}}(f(x))$
- combinaison linéaire d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+\alpha g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \alpha Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$
- composée d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$
- On peut calculer le rang, l'image, le noyau d'une matrice par la méthode de Gauss = rang, noyau et image de l'application linéaire canoniquement associé.

- Pour montrer une relation du type $f \circ g = g \circ f$ ou $p \circ p = p$ on utilise les matrices.

Matrices comme support de calculs

Les matrices sont un support de calcul lorsque l'on a les coordonnées.

- image d'un vecteur : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{C}}(f(x))$
- combinaison linéaire d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f + \alpha g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \alpha Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$
- composée d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$
- On peut calculer le rang, l'image, le noyau d'une matrice par la méthode de Gauss = rang, noyau et image de l'application linéaire canoniquement associé.

- Pour montrer une relation du type $f \circ g = g \circ f$ ou $p \circ p = p$ on utilise les matrices.

Matrices comme support de calculs

Les matrices sont un support de calcul lorsque l'on a les coordonnées.

- image d'un vecteur : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{C}}(f(x))$
- combinaison linéaire d'application linéaire :
  $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f + \alpha g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \alpha Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$
- composée d'application linéaire :
  $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$
- On peut calculer le rang, l'image, le noyau d'une matrice par la méthode de Gauss = rang, noyau et image de l'application linéaire canoniquement associé.

- Pour montrer une relation du type $f \circ g = g \circ f$ ou $p \circ p = p$ on utilise les matrices.

Matrices comme support de calculs

Les matrices sont un support de calcul lorsque l'on a les coordonnées.

- image d'un vecteur : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{C}}(f(x))$
- combinaison linéaire d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+\alpha g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \alpha Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$
- composée d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$
- On peut calculer le rang, l'image, le noyau d'une matrice par la méthode de Gauss = rang, noyau et image de l'application linéaire canoniquement associé.

- Pour montrer une relation du type $f \circ g = g \circ f$ ou $p \circ p = p$ on utilise les matrices.

Les matrices sont un support de calcul lorsque l'on a les coordonnées.

- image d'un vecteur : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{C}}(f(x))$
- combinaison linéaire d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f + \alpha g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \alpha Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$
- composée d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$
- On peut calculer le rang, l'image, le noyau d'une matrice par la méthode de Gauss = rang, noyau et image de l'application linéaire canoniquement associé.

- Pour montrer une relation du type $f \circ g = g \circ f$ ou $p \circ p = p$ on utilise les matrices.

Matrices comme support de calculs

Les matrices sont un support de calcul lorsque l'on a les coordonnées.

- image d'un vecteur : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{C}}(f(x))$
- combinaison linéaire d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f + \alpha g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \alpha Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$
- composée d'application linéaire : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$
- On peut calculer le rang, l'image, le noyau d'une matrice par la méthode de Gauss = rang, noyau et image de l'application linéaire canoniquement associé.

- Pour montrer une relation du type $f \circ g = g \circ f$ ou $p \circ p = p$ on utilise les matrices.

Cas d'un endomorphisme

Si on considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ base de E

- On considère généralement la même base dans l'espace de départ et d'arrivée (c'est le même espace E). SAUF : pour les formules de changement de base.
- Un endomorphisme est bijectif si et seulement si la matrice associée est inversible. On a de plus : $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.
- Pour montrer qu'un endomorphisme f est bijectif, on utilise sa matrice A et Gauss-Jordan, $\det(A)$ ou une relation algébrique du type $P(A) = 0$, où P est un polynôme.

- Attention à différentier l'application I_d et la matrice I_n. Plus grave, la matrice I_n et 1 !

Cas d'un endomorphisme

Si on considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ base de E

- On considère généralement la même base dans l'espace de départ et d'arrivée (c'est le même espace E). SAUF : pour les formules de changement de base.
- Un endomorphisme est bijectif si et seulement si la matrice associée est inversible. On a de plus : $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.
- Pour montrer qu'un endomorphisme f est bijectif, on utilise sa matrice A et Gauss-Jordan, $\det(A)$ ou une relation algébrique du type $P(A) = 0$, où P est un polynôme.

- Attention à différentier l'application I_d et la matrice I_n. Plus grave, la matrice I_n et 1 !

Cas d'un endomorphisme

Si on considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ base de E

- On considère généralement la même base dans l'espace de départ et d'arrivée (c'est le même espace E). SAUF : pour les formules de changement de base.
- Un endomorphisme est bijectif si et seulement si la matrice associée est inversible. On a de plus : $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.
- Pour montrer qu'un endomorphisme f est bijectif, on utilise sa matrice A et Gauss-Jordan, $\det(A)$ ou une relation algébrique du type $P(A) = 0$, où P est un polynôme.

- Attention à différentier l'application I_d et la matrice I_n. Plus grave, la matrice I_n et 1 !

Cas d'un endomorphisme

Si on considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ base de E

- On considère généralement la même base dans l'espace de départ et d'arrivée (c'est le même espace E). SAUF : pour les formules de changement de base.
- Un endomorphisme est bijectif si et seulement si la matrice associée est inversible. On a de plus : $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.
- Pour montrer qu'un endomorphisme f est bijectif, on utilise sa matrice A et Gauss-Jordan, $\det(A)$ ou une relation algébrique du type $P(A) = 0$, où P est un polynôme.

- Attention à différentier l'application I_d et la matrice I_n. Plus grave, la matrice I_n et 1 !

Cas d'un endomorphisme

Si on considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ base de E

- On considère généralement la même base dans l'espace de départ et d'arrivée (c'est le même espace E). SAUF : pour les formules de changement de base.
- Un endomorphisme est bijectif si et seulement si la matrice associée est inversible. On a de plus : $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.
- Pour montrer qu'un endomorphisme f est bijectif, on utilise sa matrice A et Gauss-Jordan, $\det(A)$ ou une relation algébrique du type $P(A) = 0$, où P est un polynôme.

- Attention à différentier l'application I_d et la matrice I_n. Plus grave, la matrice I_n et 1 !

Cas d'un endomorphisme

Si on considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ base de E

- On considère généralement la même base dans l'espace de départ et d'arrivée (c'est le même espace E). SAUF : pour les formules de changement de base.
- Un endomorphisme est bijectif si et seulement si la matrice associée est inversible. On a de plus : $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.
- Pour montrer qu'un endomorphisme f est bijectif, on utilise sa matrice A et Gauss-Jordan, $\det(A)$ ou une relation algébrique du type $P(A) = 0$, où P est un polynôme. Par exemple de $A^2 = 3A + 2I_n$, on déduit $A\left(\frac{1}{2}(A - 3I_n)\right) = I_n$, donc A inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 3I_n)$.

- Attention à différentier l'application I_d et la matrice I_n. Plus grave, la matrice I_n et 1 !

Cas d'un endomorphisme

Si on considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie et $\mathcal{B}$ base de E

- On considère généralement la même base dans l'espace de départ et d'arrivée (c'est le même espace E). SAUF : pour les formules de changement de base.
- Un endomorphisme est bijectif si et seulement si la matrice associée est inversible. On a de plus : $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.
- Pour montrer qu'un endomorphisme f est bijectif, on utilise sa matrice A et Gauss-Jordan, $\det(A)$ ou une relation algébrique du type $P(A) = 0$, où P est un polynôme.

- Attention à différentier l'application I_d et la matrice I_n. Plus grave, la matrice I_n et 1 !

Formule de changement de bases

Pour un vecteur x de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)Mat_{\mathcal{B}'}(x)$
- on a donc une formule donnant les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
- La matrice $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de passage : elle contient les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- $\left(Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\right)^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$, ie l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Pour une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.

- $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc :
  $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$

Formule de changement de bases

Pour un vecteur x de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)Mat_{\mathcal{B}'}(x)$
- on a donc une formule donnant les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
- La matrice $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de passage : elle contient les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- $\left(Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\right)^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$, ie l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Pour une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.

- $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc :
  $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id_F})Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$

Formule de changement de bases

Pour un vecteur x de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)Mat_{\mathcal{B}'}(x)$
- on a donc une formule donnant les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
- La matrice $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de passage : elle contient les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- $\left(Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\right)^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$, ie l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Pour une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.

- $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc :
  $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$

Formule de changement de bases

Pour un vecteur x de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)Mat_{\mathcal{B}'}(x)$
- on a donc une formule donnant les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
- La matrice $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de passage : elle contient les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- $\left(Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\right)^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$, ie l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Pour une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.

- $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc :
  $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$

Formule de changement de bases

Pour un vecteur x de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) Mat_{\mathcal{B}'}(x)$
- on a donc une formule donnant les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
- La matrice $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de passage : elle contient les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- $\left(Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\right)^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$, ie l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Pour une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.

- $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc :
  $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F) Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$

Formule de changement de bases

Pour un vecteur x de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)Mat_{\mathcal{B}'}(x)$
- on a donc une formule donnant les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
- La matrice $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de passage : elle contient les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- $\left(Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\right)^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$, ie l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Pour une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.

- $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc :
  $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id_F})Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$

Formule de changement de bases

Pour un vecteur x de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)Mat_{\mathcal{B}'}(x)$
- on a donc une formule donnant les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
- La matrice $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de passage : elle contient les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
- $\left(Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)\right)^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$, ie l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Pour une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.

- $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc :
  $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id_F})Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$

Cas d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- On a : $f = \mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E})Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Ainsi : $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(f)P$ où P est la matrice de passage $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$.

- Une matrice inversible correspond à un endomorphisme qui transforme la base canonique de $\mathbb{K}^n$ en une autre base.
- Ainsi, toute matrice inversible est donc une matrice de passage.
- Si on note $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, alors toute matrice qui s'écrit $B = P^{-1}AP$ (avec P inversible) sera la matrice de l'endomorphisme f dans une autre base.

Cas d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- On a : $f = \mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc
  $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E}) Mat_{\mathcal{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Ainsi : $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P$ où P est la matrice de passage $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$.

- Une matrice inversible correspond à un endomorphisme qui transforme la base canonique de $\mathbb{K}^n$ en une autre base.
- Ainsi, toute matrice inversible est donc une matrice de passage.
- Si on note $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, alors toute matrice qui s'écrit $B = P^{-1}AP$ (avec P inversible) sera la matrice de l'endomorphisme f dans une autre base.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- On a : $f = \mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E}) Mat_{\mathcal{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Ainsi : $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P$ où P est la matrice de passage $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$.

- Une matrice inversible correspond à un endomorphisme qui transforme la base canonique de $\mathbb{K}^n$ en une autre base.
- Ainsi, toute matrice inversible est donc une matrice de passage.
- Si on note $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, alors toute matrice qui s'écrit $B = P^{-1}AP$ (avec P inversible) sera la matrice de l'endomorphisme f dans une autre base.

Cas d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- On a : $f = \mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc
  $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E}) Mat_{\mathcal{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Ainsi : $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P$ où P est la matrice de passage $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$.

- Une matrice inversible correspond à un endomorphisme qui transforme la base canonique de $\mathbb{K}^n$ en une autre base.
- Ainsi, toute matrice inversible est donc une matrice de passage.
- Si on note $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, alors toute matrice qui s'écrit $B = P^{-1}AP$ (avec P inversible) sera la matrice de l'endomorphisme f dans une autre base.

Cas d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- On a : $f = \mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E}) Mat_{\mathcal{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Ainsi : $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P$ où P est la matrice de passage $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$.

- Une matrice inversible correspond à un endomorphisme qui transforme la base canonique de $\mathbb{K}^n$ en une autre base.
- Ainsi, toute matrice inversible est donc une matrice de passage.
- Si on note $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, alors toute matrice qui s'écrit $B = P^{-1}AP$ (avec P inversible) sera la matrice de l'endomorphisme f dans une autre base.

Cas d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- On a : $f = \mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E}) Mat_{\mathcal{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Ainsi : $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P$ où P est la matrice de passage $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$.

- Une matrice inversible correspond à un endomorphisme qui transforme la base canonique de $\mathbb{K}^n$ en une autre base.
- Ainsi, toute matrice inversible est donc une matrice de passage.
- Si on note $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, alors toute matrice qui s'écrit $B = P^{-1}AP$ (avec P inversible) sera la matrice de l'endomorphisme f dans une autre base.

Réciproquement :

- Réciproquement : si on considère deux matrices A et B telle qu'il existe une matrice $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ avec $B = P^{-1}AP$.
- On interprète P comme la matrice de passage de une base $\mathcal{B}'$ à la base canonique $\mathcal{B}$. L'inverse de P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
- On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, ie $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$,
- On a alors : $B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E})Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Et donc A et B représentent toutes les deux le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Réciproquement :

- Réciproquement : si on considère deux matrices A et B telle qu'il existe une matrice $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ avec $B = P^{-1}AP$.
- On interprète P comme la matrice de passage de une base $\mathcal{B}'$ à la base canonique $\mathcal{B}$. L'inverse de P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
- On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, ie $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$,
- On a alors : $B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E})Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Et donc A et B représentent toutes les deux le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Réciproquement :

- Réciproquement : si on considère deux matrices A et B telle qu'il existe une matrice $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ avec $B = P^{-1}AP$.
- On interprète P comme la matrice de passage de une base $\mathcal{B}'$ à la base canonique $\mathcal{B}$. L'inverse de P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
- On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, ie $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$,
- On a alors : $B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E})Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Et donc A et B représentent toutes les deux le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Réciproquement :

- Réciproquement : si on considère deux matrices A et B telle qu'il existe une matrice $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ avec $B = P^{-1}AP$.
- On interprète P comme la matrice de passage de une base $\mathcal{B}'$ à la base canonique $\mathcal{B}$. L'inverse de P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
- On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, ie $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$,
- On a alors : $B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E})Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Et donc A et B représentent toutes les deux le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Réciproquement :

- Réciproquement : si on considère deux matrices A et B telle qu'il existe une matrice $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ avec $B = P^{-1}AP$.
- On interprète P comme la matrice de passage de une base $\mathcal{B}'$ à la base canonique $\mathcal{B}$. L'inverse de P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
- On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, ie $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$,
- On a alors : $B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E})Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Et donc A et B représentent toutes les deux le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Réciproquement :

- Réciproquement : si on considère deux matrices A et B telle qu'il existe une matrice $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ avec $B = P^{-1}AP$.
- On interprète P comme la matrice de passage de une base $\mathcal{B}'$ à la base canonique $\mathcal{B}$. L'inverse de P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
- On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, ie $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$,
- On a alors : $B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id_E})Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id_E})$
- Et donc A et B représentent toutes les deux le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Matrices semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement si : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

- les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si elles sont semblables.
- C'est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables ont plusieurs propriétés en commun (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), on parle d'invariants de similitude. C'est le cas :
  - du déterminant, puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$,
  - de la trace, des valeurs propres et du polynôme caractéristique.
- De plus $B^n = P^{-1}A^nP$.

Matrices semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement si : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

- les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si elles sont semblables.
- C'est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables ont plusieurs propriétés en commun (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), on parle d'invariants de similitude. C'est le cas :
  - du déterminant, puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$,
  - de la trace, des valeurs propres et du polynôme caractéristique.
- De plus $B^n = P^{-1}A^nP$.

Matrices semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement si : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

- les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si elles sont semblables.
- C'est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables ont plusieurs propriétés en commun (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), on parle d'invariants de similitude. C'est le cas :
  - du déterminant, puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$,
  - de la trace, des valeurs propres et du polynôme caractéristique.
- De plus $B^n = P^{-1}A^nP$.

Matrices semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement si : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

- les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si elles sont semblables.
- C'est une relation d'équivalence.
  Réflexivité : $A = (I_n)^{-1}AI_n$
  Symétrie : Si $B = P^{-1}AP$ alors $A = \left(P^{-1}\right)^{-1} BP^{-1}$
  Transitivité : Si $B = P^{-1}AP$ et $A = Q^{-1}CQ$, alors
  $B = (QP)^{-1}\, C\, (QP)$
- Deux matrices semblables ont plusieurs propriétés en commun (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), on parle d'invariants de similitude. C'est le cas :
  - du déterminant, puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$,
  - de la trace, des valeurs propres et du polynôme caractéristique.
- De plus $B^n = P^{-1}A^nP$.

Matrices semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement si : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

- les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si elles sont semblables.
- C'est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables ont plusieurs propriétés en commun (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), on parle d'invariants de similitude. C'est le cas :
  - du déterminant, puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$,
  - de la trace, des valeurs propres et du polynôme caractéristique.
- De plus $B^n = P^{-1}A^nP$.

Matrices semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement si : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

- les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si elles sont semblables.
- C'est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables ont plusieurs propriétés en commun (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), on parle d'invariants de similitude. C'est le cas :
  - du déterminant, puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$,
  - de la trace, des valeurs propres et du polynôme caractéristique.
- De plus $B^n = P^{-1}A^nP$.

Matrices semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement si : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

- les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si elles sont semblables.
- C'est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables ont plusieurs propriétés en commun (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), on parle d'invariants de similitude. C'est le cas :
  - du déterminant, puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$,
  - de la trace, des valeurs propres et du polynôme caractéristique.
- De plus $B^n = P^{-1}A^nP$.

Matrices semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement si : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

- les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si elles sont semblables.
- C'est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables ont plusieurs propriétés en commun (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), on parle d'invariants de similitude. C'est le cas :
  - du déterminant, puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$,
  - de la trace, des valeurs propres et du polynôme caractéristique.
- De plus $B^n = P^{-1}A^nP$.

Matrices semblables

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement si : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

- les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si elles sont semblables.
- C'est une relation d'équivalence.
- Deux matrices semblables ont plusieurs propriétés en commun (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), on parle d'invariants de similitude. C'est le cas :
  - du déterminant, puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$,
  - de la trace, des valeurs propres et du polynôme caractéristique.
- De plus $B^n = P^{-1}A^nP$.

Calcul matriciel algébrique

- On peut effectuer du calcul algébrique avec les matrices carrées.
  Attention : le produit n'est pas commutatif.
- Formule de Newton : $(I_n + A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k$
- Série géométrique : $I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
- $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ n'est vraie que si A et B commutent.

- La formule de Newton n'est intéressante que si l'on sait calculer A^k.
  - A est diagonale,
  - A nilpotente : $\exists k \geqslant 2, \; A^k = 0$.
  - On a une relation du type $A^2 = \alpha A$.

- On peut effectuer du calcul algébrique avec les matrices carrées.
  Attention : le produit n'est pas commutatif.
- Formule de Newton : $(I_n + A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k$
- Série géométrique : $I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
- $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ n'est vraie que si A et B commutent.

- La formule de Newton n'est intéressante que si l'on sait calculer A^k.
  - A est diagonale,
  - A nilpotente : $\exists k \geqslant 2,\ A^k = 0$.
  - On a une relation du type $A^2 = \alpha A$.

- On peut effectuer du calcul algébrique avec les matrices carrées.
  Attention : le produit n'est pas commutatif.
- Formule de Newton : $(I_n + A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k$
- Série géométrique : $I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
- $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ n'est vraie que si A et B commutent.

- La formule de Newton n'est intéressante que si l'on sait calculer A^k.
  - A est diagonale,
  - A nilpotente : $\exists k \geqslant 2,\ A^k = 0$.
  - On a une relation du type $A^2 = \alpha A$.

Calcul matriciel algébrique

- On peut effectuer du calcul algébrique avec les matrices carrées.
  Attention : le produit n'est pas commutatif.
- Formule de Newton : $(I_n + A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k$
- Série géométrique : $I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
- $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ n'est vraie que si A et B commutent.

- La formule de Newton n'est intéressante que si l'on sait calculer A^k.
  - A est diagonale,
  - A nilpotente : $\exists k \geqslant 2,\ A^k = 0$.
  - On a une relation du type $A^2 = \alpha A$.

Calcul matriciel algébrique

- On peut effectuer du calcul algébrique avec les matrices carrées.
  Attention : le produit n'est pas commutatif.
- Formule de Newton : $(I_n + A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k$
- Série géométrique : $I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
- $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ n'est vraie que si A et B commutent.

- La formule de Newton n'est intéressante que si l'on sait calculer A^k.
  - A est diagonale,
  - A nilpotente : $\exists k \geqslant 2,\ A^k = 0$.
  - On a une relation du type $A^2 = \alpha A$.

Calcul matriciel algébrique

- On peut effectuer du calcul algébrique avec les matrices carrées.
  Attention : le produit n'est pas commutatif.
- Formule de Newton : $(I_n + A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k$
- Série géométrique : $I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
- $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ n'est vraie que si A et B commutent.

- La formule de Newton n'est intéressante que si l'on sait calculer A^k.
  - A est diagonale,
  - A nilpotente : $\exists k \geqslant 2, \ A^k = 0$.
  - On a une relation du type $A^2 = \alpha A$.

- On peut effectuer du calcul algébrique avec les matrices carrées.
  Attention : le produit n'est pas commutatif.
- Formule de Newton : $(I_n + A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k$
- Série géométrique : $I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
- $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ n'est vraie que si A et B commutent.

- La formule de Newton n'est intéressante que si l'on sait calculer A^k.
  - A est diagonale,
  - A nilpotente : $\exists k \geqslant 2,\ A^k = 0$.
  - On a une relation du type $A^2 = \alpha A$.

- On peut effectuer du calcul algébrique avec les matrices carrées. Attention : le produit n'est pas commutatif.
- Formule de Newton : $(I_n + A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k$
- Série géométrique : $I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.
- $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ n'est vraie que si A et B commutent.

- La formule de Newton n'est intéressante que si l'on sait calculer A^k.
  - A est diagonale,
  - A nilpotente : $\exists k \geqslant 2,\ A^k = 0$.
  - On a une relation du type $A^2 = \alpha A$.

Calcul de A^n par Newton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix}$ avec a et c réels. On écrit :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = aI_2 + cN \text{ avec } N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\forall n \geqslant 2,\ N^n = N^{n-2}N^2 = 0.$
- on utilise Newton : $A^n = a^n I_2 + n a^{n-1} c N$

Calcul de A^n par Newton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix}$ avec a et c réels. On écrit :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = aI_2 + cN \text{ avec } N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\forall n \geqslant 2, N^n = N^{n-2}N^2 = 0.$
- on utilise Newton : $A^n = a^n I_2 + na^{n-1}cN$

Calcul de A^n par Newton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix}$ avec a et c réels. On écrit :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = aI_2 + cN \text{ avec } N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\forall n \geqslant 2, N^n = N^{n-2}N^2 = 0.$
- on utilise Newton : $A^n = a^n I_2 + na^{n-1}cN$

Calcul de A^n par Newton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix}$ avec a et c réels. On écrit :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = aI_2 + cN \text{ avec } N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\forall n \geqslant 2, N^n = N^{n-2}N^2 = 0.$
- on utilise Newton : $A^n = a^n I_2 + na^{n-1}cN$

Calcul de A^n par Newton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{bmatrix}$ avec a et b réels. On écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aI_2 + bJ, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On obtient facilement $J^2 = 2J$. Puis, par récurrence, on démontre $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1}J$.
- Avec Newton : $A^n = a^n I_2 + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k 2^{k-1}\right]}_{\in\mathbb{R}} J$.
- On calcule la somme pour obtenir : $A^n = a^n I_2 + \frac{1}{2}\left[(a+2b)^n - a^n\right] J$

Calcul de A^n par Newton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{bmatrix}$ avec a et b réels. On écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aI_2 + bJ, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On obtient facilement $J^2 = 2J$. Puis, par récurrence, on démontre $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1}J$.
- Avec Newton : $A^n = a^n I_2 + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k 2^{k-1}\right]}_{\in\mathbb{R}} J.$
- On calcule la somme pour obtenir : $A^n = a^n I_2 + \frac{1}{2}\Big[(a+2b)^n - a^n\Big] J$

Calcul de A^n par Newton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{bmatrix}$ avec a et b réels. On écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aI_2 + bJ, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On obtient facilement $J^2 = 2J$. Puis, par récurrence, on démontre $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1}J$.
- Avec Newton : $A^n = a^n I_2 + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k 2^{k-1}\right]}_{\in\mathbb{R}} J$.
- On calcule la somme pour obtenir : $A^n = a^n I_2 + \frac{1}{2}\Big[(a+2b)^n - a^n\Big]J$

Calcul de A^n par Newton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{bmatrix}$ avec a et b réels. On écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aI_2 + bJ, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On obtient facilement $J^2 = 2J$. Puis, par récurrence, on démontre $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1}J$. (Attention la formule n'est pas vraie si $n = 0$).
- Avec Newton : $A^n = a^n I_2 + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k 2^{k-1}\right]}_{\in\mathbb{R}} J$.
- On calcule la somme pour obtenir : $A^n = a^n I_2 + \frac{1}{2}\Big[(a+2b)^n - a^n\Big] J$

Calcul de A^n par Newton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{bmatrix}$ avec a et b réels. On écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aI_2 + bJ, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On obtient facilement $J^2 = 2J$. Puis, par récurrence, on démontre $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1}J$. (Attention la formule n'est pas vraie si $n = 0$).
- Avec Newton : $A^n = a^n I_2 + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k 2^{k-1}\right]}_{\in\mathbb{R}} J.$
- On calcule la somme pour obtenir : $A^n = a^n I_2 + \frac{1}{2}\Big[(a+2b)^n - a^n\Big] J$

Calcul de A^n par Newton

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrit : $A = \begin{bmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{bmatrix}$ avec a et b réels. On écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aI_2 + bJ, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On obtient facilement $J^2 = 2J$. Puis, par récurrence, on démontre $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1}J$. (Attention la formule n'est pas vraie si $n = 0$).
- Avec Newton : $A^n = a^n I_2 + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k 2^{k-1}\right]}_{\in\mathbb{R}} J$.
- On calcule la somme pour obtenir : $A^n = a^n I_2 + \frac{1}{2}\Big[(a+2b)^n - a^n\Big] J$

Calcul d'inverse par série géométrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^4 = 0$. Montrer que $A - I_n$ est inversible et donner $(A - I_n)^{-1}$.

- On a

$$\begin{aligned} I_n - A^4 = I_n &= (I_n - A)\left(I_n + A + A^2 + A^3\right) \\ &= \left(I_n + A + A^2 + A^3\right)(I_n - A) \end{aligned}$$

Calcul d'inverse par série géométrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^4 = 0$. Montrer que $A - I_n$ est inversible et donner $(A - I_n)^{-1}$.

- On a

$$I_n - A^4 = I_n = (I_n - A)\left(I_n + A + A^2 + A^3\right) = \left(I_n + A + A^2 + A^3\right)(I_n - A)$$

Calcul d'inverse par série géométrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^4 = 0$. Montrer que $A - I_n$ est inversible et donner $(A - I_n)^{-1}$.

- On a

$$\begin{aligned} I_n - A^4 = I_n &= (I_n - A)\left(I_n + A + A^2 + A^3\right) \\ &= \left(I_n + A + A^2 + A^3\right)(I_n - A) \end{aligned}$$

Trace d'une matrice

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **trace** de A est la somme des éléments diagonaux :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- L'application $A \longmapsto Tr(A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- $Tr(A^T) = Tr(A)$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \ Tr(AB) = Tr(BA)$.
- En particulier, $Tr\left((P^{-1})AP\right) = Tr(APP^{-1}) = Tr(A)$ et deux matrices semblables ont la même trace.
- $(A, B) \longmapsto Tr(A^T B)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Trace d'une matrice

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **trace** de A est la somme des éléments diagonaux :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- L'application $A \longmapsto Tr(A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- $Tr(A^T) = Tr(A)$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \ Tr(AB) = Tr(BA)$.
- En particulier, $Tr\left((P^{-1})AP\right) = Tr(APP^{-1}) = Tr(A)$ et deux matrices semblables ont la même trace.
- $(A, B) \longmapsto Tr(A^T B)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Trace d'une matrice

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **trace** de A est la somme des éléments diagonaux :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- L'application $A \longmapsto Tr(A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- $Tr(A^T) = Tr(A)$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \ Tr(AB) = Tr(BA)$.
- En particulier, $Tr\left((P^{-1})AP\right) = Tr(APP^{-1}) = Tr(A)$ et deux matrices semblables ont la même trace.
- $(A, B) \longmapsto Tr(A^T B)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Trace d'une matrice

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **trace** de A est la somme des éléments diagonaux :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- L'application $A \longmapsto Tr(A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- $Tr(A^T) = Tr(A)$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \; Tr(AB) = Tr(BA)$.
- En particulier, $Tr\left((P^{-1})AP\right) = Tr(APP^{-1}) = Tr(A)$ et deux matrices semblables ont la même trace.
- $(A, B) \longmapsto Tr(A^T B)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Trace d'une matrice

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **trace** de A est la somme des éléments diagonaux :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- L'application $A \longmapsto Tr(A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- $Tr(A^T) = Tr(A)$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\,,\ Tr(AB) = Tr(BA)$.

$$\begin{aligned} Tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{ki}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk} = Tr(BA) \end{aligned}$$

Trace d'une matrice

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **trace** de A est la somme des éléments diagonaux :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- L'application $A \longmapsto Tr(A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- $Tr(A^T) = Tr(A)$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \; Tr(AB) = Tr(BA)$.
- En particulier, $Tr\left((P^{-1})AP\right) = Tr(APP^{-1}) = Tr(A)$ et deux matrices semblables ont la même trace.
- $(A, B) \longmapsto Tr(A^T B)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Trace d'une matrice

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **trace** de A est la somme des éléments diagonaux :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- L'application $A \longmapsto Tr(A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- $Tr(A^T) = Tr(A)$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ Tr(AB) = Tr(BA)$.
- En particulier, $Tr\left((P^{-1})AP\right) = Tr(APP^{-1}) = Tr(A)$ et deux matrices semblables ont la même trace.
- $(A, B) \longmapsto Tr(A^T B)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Trace d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère une base $\mathcal{B}$ de E, et on définit la **trace de f** comme $Tr(f) = Tr(Mat_{\mathcal{B}}(f))$.

- Cela ne dépends pas du choix de la base $\mathcal{B}$, puisque deux matrices représentant f sont semblables et ont donc la même trace.
- L'application $f \longmapsto Tr(f)$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$ est une application linéaire.

Trace d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère une base $\mathcal{B}$ de E, et on définit la **trace de f** comme
$Tr(f) = Tr(Mat_{\mathcal{B}}(f))$.

- Cela ne dépends pas du choix de la base $\mathcal{B}$, puisque deux matrices représentant f sont semblables et ont donc la même trace.
- L'application $f \longmapsto Tr(f)$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$ est une application linéaire.

Trace d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère une base $\mathcal{B}$ de E, et on définit la **trace de f** comme $Tr(f) = Tr(Mat_{\mathcal{B}}(f))$.

- Cela ne dépends pas du choix de la base $\mathcal{B}$, puisque deux matrices représentant f sont semblables et ont donc la même trace.
- L'application $f \longmapsto Tr(f)$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$ est une application linéaire.

Trace d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère une base $\mathcal{B}$ de E, et on définit la **trace de f** comme $Tr(f) = Tr(Mat_{\mathcal{B}}(f))$.

- Cela ne dépends pas du choix de la base $\mathcal{B}$, puisque deux matrices représentant f sont semblables et ont donc la même trace.
- L'application $f \longmapsto Tr(f)$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$ est une application linéaire.

Soit E et F des espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle vérifie les deux propriétés :

- $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$,
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

- $f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(u_i)$.
- $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi un espace vectoriel. On peut aussi composer les applications linéaires.
- Si f est linéaire et bijective, c'est un isomorphisme.

Applications linéaires

Soit E et F des espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle vérifie les deux propriétés :

- $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

- $f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(u_i).$
- $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi un espace vectoriel. On peut aussi composer les applications linéaires.
- Si f est linéaire et bijective, c'est un isomorphisme.

Soit E et F des espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle vérifie les deux propriétés :

- $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

- $f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(u_i).$
- $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi un espace vectoriel. On peut aussi composer les applications linéaires.
- Si f est linéaire et bijective, c'est un isomorphisme.

Applications linéaires

Soit E et F des espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle vérifie les deux propriétés :

- $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$
- $\forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

- $f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(u_i).$
- $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi un espace vectoriel. On peut aussi composer les applications linéaires.
- Si f est linéaire et bijective, c'est un isomorphisme.

Applications linéaires

Soit E et F des espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle vérifie les deux propriétés :

- $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$

- $f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(u_i).$
- $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi un espace vectoriel. On peut aussi composer les applications linéaires.
- Si f est linéaire et bijective, c'est un isomorphisme.

Applications linéaires

Soit E et F des espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une **application linéaire** si elle vérifie les deux propriétés :

- $\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

- $f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(u_i)$.
- $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi un espace vectoriel. On peut aussi composer les applications linéaires.
- Si f est linéaire et bijective, c'est un isomorphisme.

Endomorphisme

Soit E un espace vectoriel.

- Une application linéaire $f : E \to E$ est appelé un endomorphisme. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphisme.
- Si il est bijectif, c'est un automorphisme. Dans ce cas f^{-1} est aussi linéaire. On note $GL(E)$ (groupe linéaire) l'ensemble des applications linéaires et bijectives.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut définir $f^k = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec la convention $f^0 = Id_E$.
- Si $f \in GL(E)$, on peut définir f^{-k} pour $k \in \mathbb{N}$, avec : $f^{-k} = \left(f^k\right)^{-1} = (f^{-1})^k$.

Endomorphisme

Soit E un espace vectoriel.

- Une application linéaire $f : E \to E$ est appelé un endomorphisme. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphisme.
- Si il est bijectif, c'est un automorphisme. Dans ce cas f^{-1} est aussi linéaire. On note $GL(E)$ (groupe linéaire) l'ensemble des applications linéaires et bijectives.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut définir $f^k = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec la convention $f^0 = Id_E$.
- Si $f \in GL(E)$, on peut définir f^{-k} pour $k \in \mathbb{N}$, avec : $f^{-k} = \left(f^k\right)^{-1} = (f^{-1})^k$.

Endomorphisme

Soit E un espace vectoriel.

- Une application linéaire $f : E \to E$ est appelé un endomorphisme. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphisme.
- Si il est bijectif, c'est un automorphisme. Dans ce cas f^{-1} est aussi linéaire. On note $GL(E)$ (groupe linéaire) l'ensemble des applications linéaires et bijectives.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut définir $f^k = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec la convention $f^0 = Id_E$.
- Si $f \in GL(E)$, on peut définir f^{-k} pour $k \in \mathbb{N}$, avec : $f^{-k} = \left(f^k\right)^{-1} = (f^{-1})^k$.

Endomorphisme

Soit E un espace vectoriel.

- Une application linéaire $f : E \to E$ est appelé un endomorphisme. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphisme.
- Si il est bijectif, c'est un automorphisme. Dans ce cas f^{-1} est aussi linéaire. On note $GL(E)$ (groupe linéaire) l'ensemble des applications linéaires et bijectives.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut définir $f^k = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec la convention $f^0 = Id_E$.
- Si $f \in GL(E)$, on peut définir f^{-k} pour $k \in \mathbb{N}$, avec : $f^{-k} = \left(f^k\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^k$.

Image

- On définit $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
- L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
- En dimension finie, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !

Si E est de dimension finie, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.

- On met les coordonnées de cette famille dans la matrice. Cette famille détermine l'application linéaire : deux applications égales sur une base sont égales partout.
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$
- f est injective $\iff$ $\mathcal{F}$ est libre
- f est surjective $\iff$ $\mathcal{F}$ est génératrice de F
- f est bijective $\iff$ $\mathcal{F}$ est une base.

Image

- On définit $\operatorname{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
- L'application f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.
- En dimension finie, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !

Si E est de dimension finie, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

- On met les coordonnées de cette famille dans la matrice. Cette famille détermine l'application linéaire : deux applications égales sur une base sont égales partout.
- $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$
- f est injective $\iff$ $\mathcal{F}$ est libre
- f est surjective $\iff$ $\mathcal{F}$ est génératrice de F
- f est bijective $\iff$ $\mathcal{F}$ est une base.

Image

- On définit $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
- L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
- En dimension finie, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !

Si E est de dimension finie, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

- On met les coordonnées de cette famille dans la matrice. Cette famille détermine l'application linéaire : deux applications égales sur une base sont égales partout.
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$
- f est injective $\iff$ $\mathcal{F}$ est libre
- f est surjective $\iff$ $\mathcal{F}$ est génératrice de F
- f est bijective $\iff$ $\mathcal{F}$ est une base.

Image

- On définit $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
- L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
- En dimension finie, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !

Si E est de dimension finie, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

- On met les coordonnées de cette famille dans la matrice. Cette famille détermine l'application linéaire : deux applications égales sur une base sont égales partout.
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$
- f est injective $\iff$ $\mathcal{F}$ est libre
- f est surjective $\iff$ $\mathcal{F}$ est génératrice de F
- f est bijective $\iff$ $\mathcal{F}$ est une base.

Image

- On définit $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
- L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
- En dimension finie, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !

Si E est de dimension finie, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

- On met les coordonnées de cette famille dans la matrice. Cette famille détermine l'application linéaire : deux applications égales sur une base sont égales partout.
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$
- f est injective $\iff$ $\mathcal{F}$ est libre
- f est surjective $\iff$ $\mathcal{F}$ est génératrice de F
- f est bijective $\iff$ $\mathcal{F}$ est une base.

Image

- On définit $\operatorname{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
- L'application f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.
- En dimension finie, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !

Si E est de dimension finie, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.

- On met les coordonnées de cette famille dans la matrice. Cette famille détermine l'application linéaire : deux applications égales sur une base sont égales partout.
- $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$
- f est injective $\iff$ $\mathcal{F}$ est libre
- f est surjective $\iff$ $\mathcal{F}$ est génératrice de F
- f est bijective $\iff$ $\mathcal{F}$ est une base.

Image

- On définit $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
- L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
- En dimension finie, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !

Si E est de dimension finie, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

- On met les coordonnées de cette famille dans la matrice. Cette famille détermine l'application linéaire : deux applications égales sur une base sont égales partout.
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$
- f est injective $\iff$ $\mathcal{F}$ est libre
- f est surjective $\iff$ $\mathcal{F}$ est génératrice de F
- f est bijective $\iff$ $\mathcal{F}$ est une base.

Image

- On définit $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
- L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
- En dimension finie, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !

Si E est de dimension finie, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

- On met les coordonnées de cette famille dans la matrice. Cette famille détermine l'application linéaire : deux applications égales sur une base sont égales partout.
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$
- f est injective $\iff$ $\mathcal{F}$ est libre
- f est surjective $\iff$ $\mathcal{F}$ est génératrice de F
- f est bijective $\iff$ $\mathcal{F}$ est une base.

Image

- On définit $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
- L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
- En dimension finie, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !

Si E est de dimension finie, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathcal{F} = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

- On met les coordonnées de cette famille dans la matrice. Cette famille détermine l'application linéaire : deux applications égales sur une base sont égales partout.
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$
- f est injective $\iff$ $\mathcal{F}$ est libre
- f est surjective $\iff$ $\mathcal{F}$ est génératrice de F
- f est bijective $\iff$ $\mathcal{F}$ est une base.

Noyau

On note $\ker(f)$ le noyau de f c'est : $\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}$.

- L'application est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{0\}$.

Raisonnement algébrique

- Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
- Si on veut montrer que $x \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.
- Lorsque $y \in \mathrm{Im}(f)$, on sait qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$
- Pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il faut construire un x tel que $y = f(x)$.

Pour un endomorphisme, on a : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$

Noyau

On note $\ker(f)$ le noyau de f c'est : $\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}$.

- L'application est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{0\}$.

Raisonnement algébrique

- Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
- Si on veut montrer que $x \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.
- Lorsque $y \in \mathrm{Im}(f)$, on sait qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$
- Pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il faut construire un x tel que $y = f(x)$.

Pour un endomorphisme, on a : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$

Noyau

On note $\ker(f)$ le noyau de f c'est : $\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}$.

- L'application est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{0\}$.

Raisonnement algébrique

- Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
- Si on veut montrer que $x \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.
- Lorsque $y \in \mathrm{Im}(f)$, on sait qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$
- Pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il faut construire un x tel que $y = f(x)$.

Pour un endomorphisme, on a : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$

Noyau

On note $\ker(f)$ le noyau de f c'est : $\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}$.

- L'application est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{0\}$.

Raisonnement algébrique

- Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
- Si on veut montrer que $x \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.
- Lorsque $y \in \text{Im}(f)$, on sait qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$
- Pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\text{Im}(f)$, il faut construire un x tel que $y = f(x)$.

Pour un endomorphisme, on a : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

Noyau

On note $\ker(f)$ le noyau de f c'est : $\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}$.

- L'application est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{0\}$.

Raisonnement algébrique

- Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
- Si on veut montrer que $x \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.
- Lorsque $y \in \mathrm{Im}(f)$, on sait qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$
- Pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il faut construire un x tel que $y = f(x)$.

Pour un endomorphisme, on a : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$

Noyau

On note $\ker(f)$ le noyau de f c'est : $\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}$.

- L'application est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{0\}$.

Raisonnement algébrique

- Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
- Si on veut montrer que $x \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.
- Lorsque $y \in \operatorname{Im}(f)$, on sait qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$
- Pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\operatorname{Im}(f)$, il faut construire un x tel que $y = f(x)$.

Pour un endomorphisme, on a : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$

Noyau

On note $\ker(f)$ le noyau de f c'est : $\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}$.

- L'application est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{0\}$.

Raisonnement algébrique

- Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
- Si on veut montrer que $x \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.
- Lorsque $y \in \mathrm{Im}(f)$, on sait qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$
- Pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il faut construire un x tel que $y = f(x)$.

Pour un endomorphisme, on a : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$

Noyau

On note $\ker(f)$ le noyau de f c'est : $\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}$.

- L'application est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{0\}$.

Raisonnement algébrique

- Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
- Si on veut montrer que $x \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.
- Lorsque $y \in \operatorname{Im}(f)$, on sait qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$
- Pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\operatorname{Im}(f)$, il faut construire un x tel que $y = f(x)$.

Pour un endomorphisme, on a : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$

Dimension et application linéaire

- Si il existe une application linéaire injective de E dans F alors $\dim(F) \geqslant \dim(E)$.
- Si il existe une application linéaire surjective de E dans F alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- Si il existe un application linéaire bijective (isomorphisme) de E dans F alors $\dim(F) = \dim(E)$.

Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Vrai en particulier si $f \in \mathcal{L}(E)$.

Dimension et application linéaire

- Si il existe une application linéaire injective de E dans F alors $\dim(F) \geqslant \dim(E)$.
- Si il existe une application linéaire surjective de E dans F alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- Si il existe un application linéaire bijective (isomorphisme) de E dans F alors $\dim(F) = \dim(E)$.

Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Vrai en particulier si $f \in \mathcal{L}(E)$.

Dimension et application linéaire

- Si il existe une application linéaire injective de E dans F alors $\dim(F) \geqslant \dim(E)$.
- Si il existe une application linéaire surjective de E dans F alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- Si il existe un application linéaire bijective (isomorphisme) de E dans F alors $\dim(F) = \dim(E)$.

Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Vrai en particulier si $f \in \mathcal{L}(E)$.

Dimension et application linéaire

- Si il existe une application linéaire injective de E dans F alors $\dim(F) \geqslant \dim(E)$.
- Si il existe une application linéaire surjective de E dans F alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- Si il existe un application linéaire bijective (isomorphisme) de E dans F alors $\dim(F) = \dim(E)$.

Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Vrai en particulier si $f \in \mathcal{L}(E)$.

Dimension et application linéaire

- Si il existe une application linéaire injective de E dans F alors $\dim(F) \geqslant \dim(E)$.
- Si il existe une application linéaire surjective de E dans F alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- Si il existe un application linéaire bijective (isomorphisme) de E dans F alors $\dim(F) = \dim(E)$.

Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Vrai en particulier si $f \in \mathcal{L}(E)$.

Rang

- Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré :
  $Rg(\mathcal{F}) = Rg(u_1, \ldots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n))$
- Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est la dimension de l'espace image : $Rg(f) = \dim(Im(f))$
- Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ est le nombre de pivots après réduction de Gauss.

- Ces trois définitions donnent le même rang : en pratique, on construit la matrice associée à l'application linéaire ou à la famille en choisissant une base, puis on calcule le rang par réduction de la matrice.

Rang

- Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré :
$Rg(\mathcal{F}) = Rg(u_1, \dots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n))$
- Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est la dimension de l'espace image : $Rg(f) = \dim(Im(f))$
- Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ est le nombre de pivots après réduction de Gauss.

- Ces trois définitions donnent le même rang : en pratique, on construit la matrice associée à l'application linéaire ou à la famille en choisissant une base, puis on calcule le rang par réduction de la matrice.

Rang

- Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré :
  $Rg(\mathcal{F}) = Rg(u_1, \dots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n))$
- Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est la dimension de l'espace image : $Rg(f) = \dim(Im(f))$
- Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ est le nombre de pivots après réduction de Gauss.

- Ces trois définitions donnent le même rang : en pratique, on construit la matrice associée à l'application linéaire ou à la famille en choisissant une base, puis on calcule le rang par réduction de la matrice.

Rang

- Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré :
  $Rg(\mathcal{F}) = Rg(u_1, \dots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n))$
- Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est la dimension de l'espace image : $Rg(f) = \dim(Im(f))$
- Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ est le nombre de pivots après réduction de Gauss.

- Ces trois définitions donnent le même rang : en pratique, on construit la matrice associée à l'application linéaire ou à la famille en choisissant une base, puis on calcule le rang par réduction de la matrice.

Rang

- Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré :
  $Rg(\mathcal{F}) = Rg(u_1, \ldots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n))$
- Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est la dimension de l'espace image : $Rg(f) = \dim(Im(f))$
- Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ est le nombre de pivots après réduction de Gauss.

- Ces trois définitions donnent le même rang : en pratique, on construit la matrice associée à l'application linéaire ou à la famille en choisissant une base, puis on calcule le rang par réduction de la matrice.

Rang

- Une famille est libre si et seulement si son rang est égal au nombre vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est génératrice de E si et seulement si son rang est égal à la dimension de E.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux valeurs.

- Une application linéaire est injective si et seulement si son rang est égal à la dimension de son espace de départ.
- Une application linéaire est surjective si et seulement si son rang est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux dimensions.

Rang

- Une famille est libre si et seulement si son rang est égal au nombre vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est génératrice de E si et seulement si son rang est égal à la dimension de E.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux valeurs.

- Une application linéaire est injective si et seulement si son rang est égal à la dimension de son espace de départ.
- Une application linéaire est surjective si et seulement si son rang est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux dimensions.

Rang

- Une famille est libre si et seulement si son rang est égal au nombre vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est génératrice de E si et seulement si son rang est égal à la dimension de E.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux valeurs.

- Une application linéaire est injective si et seulement si son rang est égal à la dimension de son espace de départ.
- Une application linéaire est surjective si et seulement si son rang est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux dimensions.

Rang

- Une famille est libre si et seulement si son rang est égal au nombre vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est génératrice de E si et seulement si son rang est égal à la dimension de E.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux valeurs.

- Une application linéaire est injective si et seulement si son rang est égal à la dimension de son espace de départ.
- Une application linéaire est surjective si et seulement si son rang est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux dimensions.

Rang

- Une famille est libre si et seulement si son rang est égal au nombre vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est génératrice de E si et seulement si son rang est égal à la dimension de E.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux valeurs.

- Une application linéaire est injective si et seulement si son rang est égal à la dimension de son espace de départ.
- Une application linéaire est surjective si et seulement si son rang est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux dimensions.

Rang

- Une famille est libre si et seulement si son rang est égal au nombre vecteurs qu'elle contient.
- Une famille est génératrice de E si et seulement si son rang est égal à la dimension de E.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux valeurs.

- Une application linéaire est injective si et seulement si son rang est égal à la dimension de son espace de départ.
- Une application linéaire est surjective si et seulement si son rang est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.
- Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux dimensions.

Théorème du rang

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est de rang fini et : $Rg(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$

Rang d'une composée

Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.

- $Rg(u \circ v) \leqslant \min(Rg(u), Rg(v))$.
- Si u est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(v)$.
- Si v est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(u)$.

En conséquence, on ne change pas le rang d'une matrice par opération élémentaire inversible sur les lignes ou les colonnes.

Théorème du rang

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est de rang fini et : $Rg(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$

Rang d'une composée

Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.

- $Rg(u \circ v) \leqslant \min(Rg(u), Rg(v))$.
- Si u est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(v)$.
- Si v est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(u)$.

En conséquence, on ne change pas le rang d'une matrice par opération élémentaire inversible sur les lignes ou les colonnes.

Théorème du rang

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est de rang fini et :
$Rg(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$

Rang d'une composée

Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.

- $Rg(u \circ v) \leqslant \min(Rg(u), Rg(v))$.
- Si u est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(v)$.
- Si v est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(u)$.

En conséquence, on ne change pas le rang d'une matrice par opération élémentaire inversible sur les lignes ou les colonnes.

Théorème du rang

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f est de rang fini et : $Rg(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$

Rang d'une composée

Soit $u \in \mathcal{L}(F,G)$ et $v \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang fini.

- $Rg(u \circ v) \leqslant \min(Rg(u), Rg(v))$.
- Si u est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(v)$.
- Si v est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(u)$.

En conséquence, on ne change pas le rang d'une matrice par opération élémentaire inversible sur les lignes ou les colonnes.

Théorème du rang

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est de rang fini et :
$Rg(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$

Rang d'une composée

Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.

- $Rg(u \circ v) \leqslant \min(Rg(u), Rg(v))$.
- Si u est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(v)$.
- Si v est un isomorphisme alors $Rg(u \circ v) = Rg(u)$.

En conséquence, on ne change pas le rang d'une matrice par opération élémentaire inversible sur les lignes ou les colonnes.

Polynôme d'endomorphisme de matrices

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- On peut définir $P(f)$ et $P(M)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \in \mathcal{L}(E) \qquad P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- On a les propriétés naturelles :

$$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f) \qquad (\lambda P)(f) = \lambda P(f)$$
$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

- On peut dire :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(f) \end{array} \right. \text{ est un morphisme}$$

Idem pour les matrices

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- On peut définir $P(f)$ et $P(M)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \in \mathcal{L}(E) \qquad P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- On a les propriétés naturelles :

$$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f) \qquad (\lambda P)(f) = \lambda P(f)$$

$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

- On peut dire :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(f) \end{array} \right. \text{ est un morphisme}$$

Idem pour les matrices

Polynôme d'endomorphisme de matrices

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- On peut définir $P(f)$ et $P(M)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \in \mathcal{L}(E) \qquad P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- On a les propriétés naturelles :

$$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f) \qquad (\lambda P)(f) = \lambda P(f)$$
$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

- On peut dire :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(f) \end{array} \right. \text{ est un morphisme}$$

Idem pour les matrices

Polynôme d'endomorphisme de matrices

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- On peut définir $P(f)$ et $P(M)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \in \mathcal{L}(E) \qquad P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- On a les propriétés naturelles :

$$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f) \qquad (\lambda P)(f) = \lambda P(f)$$
$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

- On peut dire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(f) \end{cases} \quad \text{est un morphisme}$$

Idem pour les matrices

Polynômes annulateurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$,

- le noyau de l'application $P \longmapsto P(f)$ est l'ensemble des polynômes annulateurs de f. C'est l'ensemble des polynômes qui vérifient : $P(f) = 0$
- On peut aussi définir l'ensemble des polynôme annulateur d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un endomorphisme est nilpotent si il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^p = 0$, ie tel que X^p est un polynôme annulateur.
- Pour un projecteur $p \circ p = p$, ce qui signifie que le polynôme $X^2 - X$ est annulateur !

Polynômes annulateurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$,

- le noyau de l'application $P \longmapsto P(f)$ est l'ensemble des polynômes annulateurs de f. C'est l'ensemble des polynômes qui vérifient : $P(f) = 0$ l'application nulle
- On peut aussi définir l'ensemble des polynôme annulateur d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un endomorphisme est nilpotent si il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^p = 0$, ie tel que X^p est un polynôme annulateur.
- Pour un projecteur $p \circ p = p$, ce qui signifie que le polynôme $X^2 - X$ est annulateur !

Polynômes annulateurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$,

- le noyau de l'application $P \longmapsto P(f)$ est l'ensemble des polynômes annulateurs de f. C'est l'ensemble des polynômes qui vérifient : $P(f) = 0$
- On peut aussi définir l'ensemble des polynôme annulateur d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un endomorphisme est nilpotent si il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^p = 0$, ie tel que X^p est un polynôme annulateur.
- Pour un projecteur $p \circ p = p$, ce qui signifie que le polynôme $X^2 - X$ est annulateur !

Polynômes annulateurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$,

- le noyau de l'application $P \longmapsto P(f)$ est l'ensemble des polynômes annulateurs de f. C'est l'ensemble des polynômes qui vérifient : $P(f) = 0$
- On peut aussi définir l'ensemble des polynôme annulateur d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un endomorphisme est nilpotent si il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^p = 0$, ie tel que X^p est un polynôme annulateur.
- Pour un projecteur $p \circ p = p$, ce qui signifie que le polynôme $X^2 - X$ est annulateur !

Polynômes annulateurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$,

- le noyau de l'application $P \longmapsto P(f)$ est l'ensemble des polynômes annulateurs de f. C'est l'ensemble des polynômes qui vérifient : $P(f) = 0$
- On peut aussi définir l'ensemble des polynôme annulateur d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un endomorphisme est nilpotent si il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^p = 0$, ie tel que X^p est un polynôme annulateur.
- Pour un projecteur $p \circ p = p$, ce qui signifie que le polynôme $X^2 - X$ est annulateur !

Projecteurs

Soit E un espace vectoriel, qui se décompose en une somme directe. On note $E = F \oplus G$.

On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u \end{cases} \qquad \text{avec } x = u + v \text{ et } u \in F, \ v \in G.$$

- Le projecteur p sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant : $\forall x \in F, \ p(x) = x$ et $\forall x \in G, \ p(x) = 0$
- On a : $p^2 = p$ et $G = \ker p$ et $F = \operatorname{Im} p = \left\{x \in E | p(x) = x\right\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur, il suffit de vérifier $p^2 = p$. On a alors $\operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ et p est alors le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Projecteurs

Soit E un espace vectoriel, qui se décompose en une somme directe. On note $E = F \oplus G$.

On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u \end{array} \right. \qquad \text{avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G.$$

- Le projecteur p sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant : $\forall x \in F,\ p(x) = x$ et $\forall x \in G,\ p(x) = 0$
- On a : $p^2 = p$ et $G = \ker p$ et $F = \operatorname{Im} p = \left\{ x \in E | p(x) = x \right\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur, il suffit de vérifier $p^2 = p$. On a alors $\operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ et p est alors le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Projecteurs

Soit E un espace vectoriel, qui se décompose en une somme directe. On note $E = F \oplus G$.

On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u \end{cases} \qquad \text{avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G.$$

- Le projecteur p sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant : $\forall x \in F,\ p(x) = x$ et $\forall x \in G,\ p(x) = 0$
- On a : $p^2 = p$ et $G = \ker p$ et $F = \operatorname{Im} p = \left\{x \in E | p(x) = x\right\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur, il suffit de vérifier $p^2 = p$. On a alors $\operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ et p est alors le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Projecteurs

Soit E un espace vectoriel, qui se décompose en une somme directe. On note $E = F \oplus G$.

On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u \end{array} \right. \qquad \text{avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G.$$

- Le projecteur p sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant : $\forall x \in F,\ p(x) = x$ et $\forall x \in G,\ p(x) = 0$
- On a : $p^2 = p$ et $G = \ker p$ et
  $F = \operatorname{Im} p = \Big\{ x \in E | p(x) = x \Big\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur, il suffit de vérifier $p^2 = p$. On a alors $\operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ et p est alors le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Projecteurs

Soit E un espace vectoriel, qui se décompose en une somme directe. On note $E = F \oplus G$.

On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u \end{cases} \qquad \text{avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G.$$

- Le projecteur p sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant : $\forall x \in F,\ p(x) = x$ et $\forall x \in G,\ p(x) = 0$
- On a : $p^2 = p$ et $G = \ker p$ et $F = \operatorname{Im} p = \left\{x \in E | p(x) = x\right\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$. Ainsi, l'application linéaire p permet de retrouver G et F.
- Réciproquement, pour montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur, il suffit de vérifier $p^2 = p$. On a alors $\operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ et p est alors le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Projecteurs

Soit E un espace vectoriel, qui se décompose en une somme directe. On note $E = F \oplus G$.

On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u \end{array} \right. \qquad \text{avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ \ v \in G.$$

- Le projecteur p sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant : $\forall x \in F,\ p(x) = x$ et $\forall x \in G,\ p(x) = 0$
- On a : $p^2 = p$ et $G = \ker p$ et $F = \operatorname{Im} p = \left\{ x \in E | p(x) = x \right\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur, il suffit de vérifier $p^2 = p$. On a alors $\operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ et p est alors le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Projecteurs

Soit E un espace vectoriel, qui se décompose en une somme directe. On note $E = F \oplus G$.

On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u \end{array} \right. \qquad \text{avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G.$$

- Le projecteur p sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant : $\forall x \in F,\ p(x) = x$ et $\forall x \in G,\ p(x) = 0$
- On a : $p^2 = p$ et $G = \ker p$ et $F = \operatorname{Im} p = \left\{ x \in E | p(x) = x \right\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur, il suffit de vérifier $p^2 = p$. On a alors $\operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ et p est alors le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Symétries

Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$.

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application :

$$s : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u - v \text{ avec } x = u + v \text{ et } u \in F, \ v \in G. \end{cases}$$

- On a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ où p est le projecteur.
- On a $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer que s est une symétrie, il suffit de vérifier $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et on a $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Symétries

Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$.

On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u - v \text{ avec } x = u + v \text{ et } u \in F, \; v \in G. \end{array} \right.$$

- On a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ où p est le projecteur.
- On a $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer que s est une symétrie, il suffit de vérifier $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et on a $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Symétries

Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$.

On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u - v \text{ avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G. \end{array} \right.$$

- On a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ où p est le projecteur.
- On a $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer que s est une symétrie, il suffit de vérifier $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et on a $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Symétries

Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$.

On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u - v \text{ avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G. \end{array} \right.$$

- On a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ où p est le projecteur.
- On a $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer que s est une symétrie, il suffit de vérifier $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et on a $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Symétries

Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$.

On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u - v \text{ avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G. \end{array} \right.$$

- On a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ où p est le projecteur.
- On a $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, pour montrer que s est une symétrie, il suffit de vérifier $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et on a $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Équations linéaires

Une **équation linéaire** est une équation de la forme : $f(x) = y$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le second membre $y \in F$ et l'inconnue $x \in E$.
L'équation homogène associée est : $f(x) = 0$. L'ensemble des solution de l'équation homogène est le noyau de f

Exemples

- Les équations différentielles,
- Les systèmes linéaires $AX = B$.
- L'ensemble des suites vérifiant
$(R): \quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 2n + 5$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = y$ est

- soit l'ensemble vide,
- soit $\{x_0 + x | x \in \ker(f)\}$, où x_0 est une solution particulière.

Équations linéaires

Une équation linéaire est une équation de la forme : $f(x) = y$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le second membre $y \in F$ et l'inconnue $x \in E$.
L'équation homogène associée est : $f(x) = 0$. L'ensemble des solution de l'équation homogène est le noyau de f

Exemples

- Les équations différentielles,
- Les systèmes linéaires $AX = B$.
- L'ensemble des suites vérifiant
  (R) : $\quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 2n + 5$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = y$ est

- soit l'ensemble vide,
- soit $\{x_0 + x | x \in \ker(f)\}$, où x_0 est une solution particulière.

Équations linéaires

Une **équation linéaire** est une équation de la forme : $f(x) = y$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le second membre $y \in F$ et l'inconnue $x \in E$.
L'équation homogène associée est : $f(x) = 0$. L'ensemble des solution de l'équation homogène est le noyau de f

Exemples

- Les équations différentielles,
- Les systèmes linéaires $AX = B$.
- L'ensemble des suites vérifiant
$(R) : \quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 2n + 5$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = y$ est

- soit l'ensemble vide,
- soit $\{x_0 + x | x \in \ker(f)\}$, où x_0 est une solution particulière.

Équations linéaires

Une **équation linéaire** est une équation de la forme : $f(x) = y$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le second membre $y \in F$ et l'inconnue $x \in E$.
L'équation homogène associée est : $f(x) = 0$. L'ensemble des solution de l'équation homogène est le noyau de f

Exemples

- Les équations différentielles,
- Les systèmes linéaires $AX = B$.
- L'ensemble des suites vérifiant
  (R) : $\quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 2n + 5$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = y$ est

- soit l'ensemble vide,
- soit $\{x_0 + x | x \in \ker(f)\}$, où x_0 est une solution particulière.

Équations linéaires

Une **équation linéaire** est une équation de la forme : $f(x) = y$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le second membre $y \in F$ et l'inconnue $x \in E$.
L'équation homogène associée est : $f(x) = 0$. L'ensemble des solution de l'équation homogène est le noyau de f

Exemples

- Les équations différentielles,
- Les systèmes linéaires $AX = B$.
- L'ensemble des suites vérifiant
  (R) : $\quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 2n + 5$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = y$ est

- soit l'ensemble vide,
- soit $\{x_0 + x | x \in \ker(f)\}$, où x_0 est une solution particulière.

Équations linéaires

Une **équation linéaire** est une équation de la forme : $f(x) = y$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le second membre $y \in F$ et l'inconnue $x \in E$.
L'équation homogène associée est : $f(x) = 0$. L'ensemble des solution de l'équation homogène est le noyau de f

Exemples

- Les équations différentielles,
- Les systèmes linéaires $AX = B$.
- L'ensemble des suites vérifiant
  (R) : $\quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 2n + 5$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = y$ est

- soit l'ensemble vide,
- soit $\{x_0 + x | x \in \ker(f)\}$, où x_0 est une solution particulière.

Équations linéaires

Une **équation linéaire** est une équation de la forme : $f(x) = y$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le second membre $y \in F$ et l'inconnue $x \in E$.
L'équation homogène associée est : $f(x) = 0$. L'ensemble des solution de l'équation homogène est le noyau de f

Exemples

- Les équations différentielles,
- Les systèmes linéaires $AX = B$.
- L'ensemble des suites vérifiant
  (R) : $\quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 2n + 5$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = y$ est

- soit l'ensemble vide,
- soit $\{x_0 + x | x \in \ker(f)\}$, où x_0 est une solution particulière.

Équations linéaires

Une **équation linéaire** est une équation de la forme : $f(x) = y$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le second membre $y \in F$ et l'inconnue $x \in E$.
L'équation homogène associée est : $f(x) = 0$. L'ensemble des solution de l'équation homogène est le noyau de f

Exemples

- Les équations différentielles,
- Les systèmes linéaires $AX = B$.
- L'ensemble des suites vérifiant
  $(R) : \quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 2n + 5$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = y$ est

- soit l'ensemble vide,
- soit $\{x_0 + x | x \in \ker(f)\}$, où x_0 est une solution particulière.

Équations linéaires

Une **équation linéaire** est une équation de la forme : $f(x) = y$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le second membre $y \in F$ et l'inconnue $x \in E$.
L'équation homogène associée est : $f(x) = 0$. L'ensemble des solution de l'équation homogène est le noyau de f

Exemples

- Les équations différentielles,
- Les systèmes linéaires $AX = B$.
- L'ensemble des suites vérifiant
  (R) : $\quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 2n + 5$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = y$ est

- soit **l'ensemble vide**,
- soit $\{x_0 + x | x \in \ker(f)\}$, où x_0 est une **solution particulière**.

Équations linéaires

Une **équation linéaire** est une équation de la forme : $f(x) = y$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le second membre $y \in F$ et l'inconnue $x \in E$.
L'équation homogène associée est : $f(x) = 0$. L'ensemble des solution de l'équation homogène est le noyau de f

Exemples

- Les équations différentielles,
- Les systèmes linéaires $AX = B$.
- L'ensemble des suites vérifiant
  (R) : $\quad u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 2n + 5$

Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de l'équation $f(x) = y$ est

- soit l'ensemble vide,
- soit $\{x_0 + x | x \in \ker(f)\}$, où x_0 est une solution particulière.

Sous-espace stable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$, ie si $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- On peut alors définir l'endomorphisme induit :

$$\hat{f} : \begin{cases} F & \to & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

On restreint l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée à F.

- E et $\{0\}$ sont stables par tout endomorphisme.

Sous-espace stable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que **F est stable par f** si $f(F) \subset F$, ie si $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- On peut alors définir **l'endomorphisme induit** :

$$\hat{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

On restreint l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée à F.

- E et $\{0\}$ sont stables par tout endomorphisme.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que **F est stable par f** si $f(F) \subset F$, ie si $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- On peut alors définir **l'endomorphisme induit** :

$$\hat{f} : \begin{cases} F & \rightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

On restreint l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée à F.

- E et $\{0\}$ sont stables par tout endomorphisme.

Sous-espace stable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que **F est stable par f** si $f(F) \subset F$, ie si $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- On peut alors définir **l'endomorphisme induit** :

$$\hat{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

On restreint l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée à F.

- E et $\{0\}$ sont stables par tout endomorphisme.

Sous-espace stable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que **F est stable par f** si $f(F) \subset F$, ie si $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- On peut alors définir **l'endomorphisme induit** :

$$\hat{f} : \begin{cases} F & \rightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

On restreint l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée à F.

- E et $\{0\}$ sont stables par tout endomorphisme.

Sous-espace stable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que F **est stable par** f si $f(F) \subset F$, ie si $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- On peut alors définir **l'endomorphisme induit** :

$$\hat{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

On restreint l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée à F.

- E et $\{0\}$ sont **stables par tout endomorphisme.**

Sous-espace stable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que F est stable par f $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- Ainsi, pour montrer que F est stable, on part d'un élément $x \in F$ et on vérifie que $f(x) \in F$.

Caractérisation avec une base

- Dans le cas où F est de dimension finie, on peut considérer $\mathcal{B} = \left(e_1, \dots, e_n\right)$ une base de F.
- F est alors stable si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) \in F$.

Sous-espace stable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que F est stable par f $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- Ainsi, pour montrer que F est stable, on part d'un élément $x \in F$ et on vérifie que $f(x) \in F$.

Caractérisation avec une base

- Dans le cas où F est de dimension finie, on peut considérer $\mathcal{B} = \left(e_1, \dots, e_n\right)$ une base de F.
- F est alors stable si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!], \; f(e_i) \in F$.

Sous-espace stable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que F est stable par f $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- Ainsi, pour montrer que F est stable, on part d'un élément $x \in F$ et on vérifie que $f(x) \in F$.

Caractérisation avec une base

- Dans le cas où F est de dimension finie, on peut considérer $\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_n\right)$ une base de F.
- F est alors stable si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ f(e_i) \in F$.

Sous-espace stable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que F est stable par f $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- Ainsi, pour montrer que F est stable, on part d'un élément $x \in F$ et on vérifie que $f(x) \in F$.

Caractérisation avec une base

- Dans le cas où F est de dimension finie, on peut considérer $\mathcal{B} = \left(e_1, \dots, e_n\right)$ une base de F.
- F est alors stable si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ f(e_i) \in F$.

Sous-espace stable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un SEV de E.

- On dit que F est stable par f $\forall x \in F, f(x) \in F$.
- Ainsi, pour montrer que F est stable, on part d'un élément $x \in F$ et on vérifie que $f(x) \in F$.

Caractérisation avec une base

- Dans le cas où F est de dimension finie, on peut considérer $\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_n\right)$ une base de F.
- F est alors stable si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ f(e_i) \in F$.

Sous-espaces stables

- Soit $u : P \longmapsto (1 - X^2)P' + nXP$ défini dans $\mathbb{K}[X]$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par u.

Soit E un $\mathbb{R}$-EV non réduit à $\{0\}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$.

- Montrer que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, puis qu'une droite de E n'est stable par f.
- Montrer que le plan $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

- Soit $u : P \longmapsto (1 - X^2)P' + nXP$ défini dans $\mathbb{K}[X]$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par u.

Avec la caractérisation par la base, on a :

$$u(1) = nX \qquad u(X^n) = nX^{n-1}$$

$$\text{et } \forall k \in [\![1, n-1]\!]\,,\ u(X^k) = (n-k)X^{k+1} + kX^{k-1}$$

Toutes les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}_n[x]$ sont dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit E un $\mathbb{R}$-EV non réduit à $\{0\}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$.

- Montrer que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, puis qu'une droite de E n'est stable par f.
- Montrer que le plan $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

- Soit $u : P \longmapsto (1 - X^2)P' + nXP$ défini dans $\mathbb{K}[X]$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par u.

Soit E un $\mathbb{R}$-EV non réduit à $\{0\}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$.

- Montrer que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, puis qu'une droite de E n'est stable par f.
- Montrer que le plan $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

- Soit $u : P \longmapsto (1 - X^2)P' + nXP$ défini dans $\mathbb{K}[X]$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par u.

Soit E un $\mathbb{R}$-EV non réduit à $\{0\}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$.

- Montrer que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, puis qu'une droite de E n'est stable par f.
- Montrer que le plan $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

- Soit $u : P \longmapsto (1 - X^2)P' + nXP$ défini dans $\mathbb{K}[X]$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par u.

Soit E un $\mathbb{R}$-EV non réduit à $\{0\}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$.

- Montrer que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, puis qu'une droite de E n'est stable par f.
- Montrer que le plan $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

- Soit $u : P \longmapsto (1 - X^2)P' + nXP$ défini dans $\mathbb{K}[X]$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par u.

Soit E un $\mathbb{R}$-EV non réduit à $\{0\}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$.

- Montrer que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, puis qu'une droite de E n'est stable par f.
- Montrer que le plan $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

On suppose $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x$, en appliquant f, on obtient : $-x = \lambda f(x)$ puis $\lambda^2 = -1$, contradiction.

Sous-espaces stables

- Soit $u : P \longmapsto (1 - X^2)P' + nXP$ défini dans $\mathbb{K}[X]$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par u.

Soit E un $\mathbb{R}$-EV non réduit à $\{0\}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$.

- Montrer que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, puis qu'une droite de E n'est stable par f.
- Montrer que le plan $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

Si D est une droite de E, alors on peut écrire $D = \mathrm{Vect}(x)$ en prenant x base de D. Comme $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, on a $f(x) \notin D$ et donc D n'est pas stable.

- Soit $u : P \longmapsto (1-X^2)P' + nXP$ défini dans $\mathbb{K}[X]$, alors $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par u.

Soit E un $\mathbb{R}$-EV non réduit à $\{0\}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$.

- Montrer que $f(x)$ n'est pas colinéaire à x, puis qu'une droite de E n'est stable par f.
- Montrer que le plan $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

Soit $u \in \mathrm{Vect}(x, f(x))$, et donc u s'écrit $u = \alpha x + \beta f(x)$, on a $f(u) = \alpha f(x) - \beta x \in \mathrm{Vect}(x, f(x))$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par f

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Im}(P(f))$ et $\ker(P(f))$ sont stables par f.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par f

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, on écrit y sous la forme $y = f(x)$ et on a $f(y) = f\left(f(y)\right) \in \mathrm{Im}(f)$ Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est stable.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Im}(P(f))$ et $\ker(P(f))$ sont stables par f.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par f

Soit $x \in \ker(f)$, on a $f(x) = 0 \in \ker(f)$, donc $\ker(f)$ est stable.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Im}(P(f))$ et $\ker(P(f))$ sont stables par f.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par f

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\text{Im}(P(f))$ et $\ker(P(f))$ sont stables par f.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par f

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\operatorname{Im}(P(f))$ et $\ker(P(f))$ sont stables par f.

Soit $y \in \operatorname{Im}(P(f))$, on peut donc écrire $y = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x)$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) =& f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^{k+1}(x) \\ =& \sum_{k=0}^{n} a_k f^k\left(f(x)\right) \in \operatorname{Im}\left(P(f)\right) \end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par f

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Im}(P(f))$ et $\ker(P(f))$ sont stables par f.

Soit $x \in \ker(P(f))$, on sait alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x) = 0$, on a alors :

$$f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x)\right) = f(0) = 0$$

$$\text{ie } \sum_{k=0}^{n} a_k f^k\left(f(x)\right) = 0 \text{ et } f(x) \in \ker\left(P(f)\right)$$

Au final, $\ker(P(f))$ est stable par f.

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v.

Soit D une droite vectorielle de E. Montrer que D est stable par u si et seulement si la restriction de u à D est une homothétie.

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v.

- Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, on écrit $y = u(x)$. On a alors $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u)$.
- Soit $x \in \ker(u)$, on sait $u(x) = 0$, on a $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \ker(u)$.

Soit D une droite vectorielle de E. Montrer que D est stable par u si et seulement si la restriction de u à D est une homothétie.

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v.

Soit D une droite vectorielle de E. Montrer que D est stable par u si et seulement si la restriction de u à D est une homothétie.

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v.

Soit D une droite vectorielle de E. Montrer que D est stable par u si et seulement si la restriction de u à D est une homothétie.

On note $D = \mathrm{Vect}(e)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ on suppose D stable par u, donc on a $u(e) \in \mathrm{Vect}(e)$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}, u(e) = \lambda e$. On obtient : $\forall x \in D,\ u(x) = \lambda x$. Ainsi, la restriction de u à D est une homothétie.
$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in D,\ u(x) = \lambda \underbrace{x}_{\in D}$, on a donc :
$\forall x \in D,\ u(x) \in D$ et D est stable par u.

Espace stable et matrice

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un SEV stable par f.

- On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F, ie les p premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. La matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit.
- On parle de matrice triangulaire par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par f !

On a donc une traduction de la stabilité d'un SEV par l'écriture matricielle.

Espace stable et matrice

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un SEV stable par f.

- On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F, ie les p premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. La matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit.
- On parle de matrice triangulaire par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par f !

On a donc une traduction de la stabilité d'un SEV par l'écriture matricielle.

Espace stable et matrice

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un SEV stable par f.

- On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F, ie les p premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. La matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit.
- On parle de matrice triangulaire par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par f !

On a donc une traduction de la stabilité d'un SEV par l'écriture matricielle.

Espace stable et matrice

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un SEV stable par f.

- On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F, ie les p premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. La matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit.
- On parle de matrice triangulaire par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par f !

On a donc une traduction de la stabilité d'un SEV par l'écriture matricielle.

Espace stable et matrice

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un SEV stable par f.

- On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F, ie les p premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. La matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit.
- On parle de matrice triangulaire par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par f !

On a donc une traduction de la stabilité d'un SEV par l'écriture matricielle.

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un SEV stable par f.

- On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F, ie les p premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. La matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit.
- On parle de matrice triangulaire par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par f !

On a donc une traduction de la stabilité d'un SEV par l'écriture matricielle.

Espace stable et matrice

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un SEV stable par f.

- On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F, ie les p premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. La matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit.
- On parle de matrice triangulaire par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par f !

On a donc une traduction de la stabilité d'un SEV par l'écriture matricielle.

Espace stable et matrice

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un SEV stable par f.

- On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F, ie les p premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. La matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit.
- On parle de matrice triangulaire par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par f !

On a donc une traduction de la stabilité d'un SEV par l'écriture matricielle.

Espace stable et matrice

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un SEV stable par f.

- On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F, ie les p premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. La matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit.
- On parle de matrice triangulaire par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par f !

On a donc une traduction de la stabilité d'un SEV par l'écriture matricielle.

Espace stable et matrice

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un SEV stable par f.

- On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ adaptée à F, ie les p premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ forment une base de F.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$. La matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit.
- On parle de matrice triangulaire par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par bloc, alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est stable par f !

On a donc une traduction de la stabilité d'un SEV par l'écriture matricielle.

Espaces stables en somme directe

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = F \oplus G$ et que F et G sont stables par f.

- On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, ie les p premiers vecteurs sont une base de F, les $n-p$ derniers une base de G.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, $\forall i \in [\![p+1, n]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
- La matrice de E dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
- On parle de matrice diagonale par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, on pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
- On a alors $E = F \oplus G$ et F et G stable.

Espaces stables en somme directe

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = F \oplus G$ et que F et G sont stables par f.

- On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, ie les p premiers vecteurs sont une base de F, les $n-p$ derniers une base de G.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, $\forall i \in [\![p+1, n]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
- La matrice de E dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
- On parle de matrice diagonale par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, on pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
- On a alors $E = F \oplus G$ et F et G stable.

Espaces stables en somme directe

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = F \oplus G$ et que F et G sont stables par f.

- On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, ie les p premiers vecteurs sont une base de F, les $n-p$ derniers une base de G.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, $\forall i \in [\![p+1, n]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- La matrice de E dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
- On parle de matrice diagonale par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, on pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- On a alors $E = F \oplus G$ et F et G stable.

Espaces stables en somme directe

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = F \oplus G$ et que F et G sont stables par f.

- On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, ie les p premiers vecteurs sont une base de F, les $n-p$ derniers une base de G.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$,
  $\forall i \in [\![p+1, n]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- La matrice de E dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où
  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
- On parle de matrice diagonale par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, on pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- On a alors $E = F \oplus G$ et F et G stable.

Espaces stables en somme directe

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = F \oplus G$ et que F et G sont stables par f.

- On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, ie les p premiers vecteurs sont une base de F, les $n-p$ derniers une base de G.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, $\forall i \in [\![p+1, n]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- La matrice de E dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
- On parle de matrice diagonale par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, on pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- On a alors $E = F \oplus G$ et F et G stable.

Espaces stables en somme directe

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = F \oplus G$ et que F et G sont stables par f.

- On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, ie les p premiers vecteurs sont une base de F, les $n-p$ derniers une base de G.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$,
  $\forall i \in [\![p+1, n]\!], f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- La matrice de E dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où
  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
- On parle de matrice diagonale par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, on pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- On a alors $E = F \oplus G$ et F et G stable.

Espaces stables en somme directe

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = F \oplus G$ et que F et G sont stables par f.

- On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, ie les p premiers vecteurs sont une base de F, les $n-p$ derniers une base de G.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$,
  $\forall i \in [\![p+1, n]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- La matrice de E dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
- On parle de matrice diagonale par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, on pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- On a alors $E = F \oplus G$ et F et G stable.

Espaces stables en somme directe

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = F \oplus G$ et que F et G sont stables par f.

- On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, ie les p premiers vecteurs sont une base de F, les $n-p$ derniers une base de G.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$,
  $\forall i \in [\![p+1, n]\!]$, $f(e_i) \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- La matrice de E dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
- On parle de matrice diagonale par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, on pose $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- On a alors $E = F \oplus G$ et F et G stable.

Espaces stables en somme directe

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = F \oplus G$ et que F et G sont stables par f.

- On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, ie les p premiers vecteurs sont une base de F, les $n-p$ derniers une base de G.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$,
  $\forall i \in [\![p+1, n]\!]\,, f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- La matrice de E dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
- On parle de matrice diagonale par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, on pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On fractionne la base en deux parties et on en déduit une décomposition en somme directe.

Espaces stables en somme directe

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = F \oplus G$ et que F et G sont stables par f.

- On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe, ie les p premiers vecteurs sont une base de F, les $n-p$ derniers une base de G.
- On voit que : $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, $\forall i \in [\![p+1, n]\!], f(e_i) \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- La matrice de E dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit alors : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
- On parle de matrice diagonale par bloc.

- Réciproquement, si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc, on pose $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
- On a alors $E = F \oplus G$ et F et G stable.

Exemples

- Matrice associée à un projecteur dans une base adaptée.
- Matrice associée à une symétrie dans une base adaptée.

Exemples

- Matrice associée à un projecteur dans une base adaptée.
- Matrice associée à une symétrie dans une base adaptée.

Exemples

- Matrice associée à un projecteur dans une base adaptée.

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrice associée à une symétrie dans une base adaptée.

Exemples

- Matrice associée à un projecteur dans une base adaptée.

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrice associée à une symétrie dans une base adaptée.

Exemples

- Matrice associée à un projecteur dans une base adaptée.

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrice associée à une symétrie dans une base adaptée.

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Espaces stables en somme directe

Généralisation

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition ie obtenue en concaténant chacune des bases de E_i.

Chacun des sous-espaces propres E_i sont stables par f si et seulement si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix}$$

la matrice carrée A_i est alors la matrice de l'endomorphisme induit sur E_i

Espaces stables en somme directe

Généralisation

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition ie obtenue en concaténant chacune des bases de E_i.

Chacun des sous-espaces propres E_i sont stables par f si et seulement si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix}$$

la matrice carrée A_i est alors la matrice de l'endomorphisme induit sur E_i

Espaces stables en somme directe

Généralisation

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition ie obtenue en concaténant chacune des bases de E_i.

Chacun des sous-espaces propres E_i sont stables par f si et seulement si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix}$$

la matrice carrée A_i est alors la matrice de l'endomorphisme induit sur E_i

Généralisation

Soit E de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition ie obtenue en concaténant chacune des bases de E_i.
Chacun des sous-espaces propres E_i sont stables par f si et seulement si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par bloc :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix}$$

la matrice carrée A_i est alors la matrice de l'endomorphisme induit sur E_i

Matrices définies par blocs

- Soit $1 \leqslant r \leqslant n$ et $1 \leqslant s \leqslant p$. On dit que la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ admet une décomposition par blocs si la matrice M s'écrit : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{r,s}$, $B \in \mathcal{M}_{r,p-s}$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,s}$, $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}$.

- Autrement dit on décompose la matrice en plusieurs matrices plus petites.

Matrices définies par blocs

- Soit $1 \leqslant r \leqslant n$ et $1 \leqslant s \leqslant p$. On dit que la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ admet une décomposition par blocs si la matrice M s'écrit : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{r,s}$, $B \in \mathcal{M}_{r,p-s}$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,s}$, $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}$.

- Autrement dit on décompose la matrice en plusieurs matrices plus petites.

Matrices définies par blocs

- Soit $1 \leqslant r \leqslant n$ et $1 \leqslant s \leqslant p$. On dit que la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ admet une décomposition par blocs si la matrice M s'écrit : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{r,s}$, $B \in \mathcal{M}_{r,p-s}$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,s}$, $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}$.

- Autrement dit on décompose la matrice en plusieurs matrices plus petites.

Matrices définies par blocs

- Soit $1 \leqslant r \leqslant n$ et $1 \leqslant s \leqslant p$. On dit que la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ admet une décomposition par blocs si la matrice M s'écrit : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{r,s}$, $B \in \mathcal{M}_{r,p-s}$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,s}$, $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}$.

- Autrement dit on décompose la matrice en plusieurs matrices plus petites.

Addition de matrices définies par blocs

- Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ deux matrices définies par blocs, les blocs étant de même taille.
- On a alors pour $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \alpha A' & B + \alpha B' \\ C + \alpha C' & D + \alpha D' \end{pmatrix}$$

- La démonstration est évidente, mais il faut que les blocs aient la même taille.

Addition de matrices définies par blocs

- Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ deux matrices définies par blocs, les blocs étant de même taille.
- On a alors pour $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \alpha A' & B + \alpha B' \\ C + \alpha C' & D + \alpha D' \end{pmatrix}$$

- La démonstration est évidente, mais il faut que les blocs aient la même taille.

Addition de matrices définies par blocs

- Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ deux matrices définies par blocs, les blocs étant de même taille.
- On a alors pour $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \alpha A' & B + \alpha B' \\ C + \alpha C' & D + \alpha D' \end{pmatrix}$$

- La démonstration est évidente, mais il faut que les blocs aient la même taille.

Addition de matrices définies par blocs

- Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ deux matrices définies par blocs, les blocs étant de même taille.
- On a alors pour $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \alpha A' & B + \alpha B' \\ C + \alpha C' & D + \alpha D' \end{pmatrix}$$

- La démonstration est évidente, mais il faut que les blocs aient la même taille.

Multiplication de matrices définies par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}$ avec $n = n_1 + n_2$ et $p = p_1 + p_2$. On décompose par blocs :
$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

Soit $B \in \mathcal{M}_{pq}$ avec $q = q_1 + q_2$ on décompose : $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

alors :

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

- Ce résultat se voit bien en faisant le produit d'une ligne par une colonne.
- On verra que l'on peut calculer le déterminant par bloc.

Multiplication de matrices définies par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}$ avec $n = n_1 + n_2$ et $p = p_1 + p_2$. On décompose par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

Soit $B \in \mathcal{M}_{pq}$ avec $q = q_1 + q_2$ on décompose : $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

alors :

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

- Ce résultat se voit bien en faisant le produit d'une ligne par une colonne.
- On verra que l'on peut calculer le déterminant par bloc.

Multiplication de matrices définies par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}$ avec $n = n_1 + n_2$ et $p = p_1 + p_2$. On décompose par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

Soit $B \in \mathcal{M}_{pq}$ avec $q = q_1 + q_2$ on décompose : $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

alors :

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

- Ce résultat se voit bien en faisant le produit d'une ligne par une colonne.
- On verra que l'on peut calculer le déterminant par bloc.

Multiplication de matrices définies par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}$ avec $n = n_1 + n_2$ et $p = p_1 + p_2$. On décompose par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

Soit $B \in \mathcal{M}_{pq}$ avec $q = q_1 + q_2$ on décompose : $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

alors :

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

- Ce résultat se voit bien en faisant le produit d'une ligne par une colonne.
- On verra que l'on peut calculer le déterminant par bloc.

Hyperplans

Soit E un espace vectoriel

- Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel H de E admettant un supplémentaire de dimension 1 (ie une droite vectorielle).
- dans le cadre de la dimension finie : Soit E un espace vectoriel de dimension n, alors un sous-espace vectoriel H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

- $\{(x, y, z) | x + 2y + 3z = 0\}$ est un hyperplan.
- $\{P \in \mathbb{K}[X] | P(1) = 0\}$ est un hyperplan.

Hyperplans

Soit E un espace vectoriel

- Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel H de E admettant un supplémentaire de dimension 1 (ie une droite vectorielle). Valable que E soit de dimension finie ou non
- dans le cadre de la dimension finie : Soit E un espace vectoriel de dimension n, alors un sous-espace vectoriel H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

- $\{(x, y, z) | x + 2y + 3z = 0\}$ est un hyperplan.
- $\{P \in \mathbb{K}[X] | P(1) = 0\}$ est un hyperplan.

Hyperplans

Soit E un espace vectoriel

- Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel H de E admettant un supplémentaire de dimension 1 (ie une droite vectorielle). Valable que E soit de dimension finie ou non
- dans le cadre de la dimension finie : Soit E un espace vectoriel de dimension n, alors un sous-espace vectoriel H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

- $\{(x, y, z) | x + 2y + 3z = 0\}$ est un hyperplan.
- $\{P \in \mathbb{K}[X] | P(1) = 0\}$ est un hyperplan.

Hyperplans

Soit E un espace vectoriel

- Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel H de E admettant un supplémentaire de dimension 1 (ie une droite vectorielle). Valable que E soit de dimension finie ou non
- dans le cadre de la dimension finie : Soit E un espace vectoriel de dimension n, alors un sous-espace vectoriel H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

- $\{(x, y, z) | x + 2y + 3z = 0\}$ est un hyperplan.
- $\{P \in \mathbb{K}[X] | P(1) = 0\}$ est un hyperplan.

Hyperplans

Soit E un espace vectoriel

- Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel H de E admettant un supplémentaire de dimension 1 (ie une droite vectorielle). Valable que E soit de dimension finie ou non
- dans le cadre de la dimension finie : Soit E un espace vectoriel de dimension n, alors un sous-espace vectoriel H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

- $\{(x, y, z) | x + 2y + 3z = 0\}$ est un hyperplan.
- $\{P \in \mathbb{K}[X] | P(1) = 0\}$ est un hyperplan.

Hyperplans et forme linéaire

- Une forme linéaire est une application $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (ie linéaire à valeurs dans le corps).
- Une forme linéaire non nulle est surjective (car son rang est 1). Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$.
- Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

- Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

Hyperplans et forme linéaire

- Une forme linéaire est une application $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (ie linéaire à valeurs dans le corps).
- Une forme linéaire non nulle est surjective (car son rang est 1). Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$.
- Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

- Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

Hyperplans et forme linéaire

- Une forme linéaire est une application $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (ie linéaire à valeurs dans le corps).
- Une forme linéaire non nulle est surjective (car son rang est 1). Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$.
- Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

- Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

Hyperplans et forme linéaire

- Une forme linéaire est une application $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (ie linéaire à valeurs dans le corps).
- Une forme linéaire non nulle est surjective (car son rang est 1). Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$.
- Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Soit f une forme linéaire non nulle, alors il existe $x_0 \in E$, tel que $f(x_0) = 1$. Montrons alors que $\ker(f) \oplus Vect(x_0) = E$.
Déjà si $x \in \ker(f) \cap Vect(x_0)$, alors $x = \lambda x_0$, donc $f(x) = 0 = \lambda$ d'où $x = 0$. Ainsi, $\ker(f) \cap Vect(x_0) = \{0\}$.
Soit $x \in E$, on a :

$$x = \underbrace{x - f(x)x_0}_{\in \ker(f)} + \underbrace{f(x)x_0}_{\in Vect(x_0)}$$

Au final $\ker(f) \oplus Vect(x_0) = E$ et $\ker(f)$ est un hyperplan.

- Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si

Hyperplans et forme linéaire

- Une forme linéaire est une application $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (ie linéaire à valeurs dans le corps).
- Une forme linéaire non nulle est surjective (car son rang est 1). Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$.
- Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Soit maintenant H un hyperplan. On écrit : $E = \ker(f) \oplus Vect(x_0)$.
Considérons l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \alpha \text{ où la décomposition de } x \text{ est } a + \alpha x_0 \end{array} \right.$$

On a alors clairement : $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, f est non nulle (puisque $f(x_0) = 1$) et $H = \ker(f)$.

- Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

Hyperplans et forme linéaire

- Une forme linéaire est une application $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (ie linéaire à valeurs dans le corps).
- Une forme linéaire non nulle est surjective (car son rang est 1). Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$.
- Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

- Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

Hyperplans et forme linéaire

- Une forme linéaire est une application $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (ie linéaire à valeurs dans le corps).
- Une forme linéaire non nulle est surjective (car son rang est 1). Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$.
- Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

- Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

Soit f et g deux formes linéaires non nulles ayant le même noyau noté H. On considère $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$. On écrit alors $E = H + Vect(x_0)$. Soit $x \in E$, on écrit $x = u + \alpha x_0$ et on a $f(x) = \alpha$ et $g(x) = \alpha g(x_0) = g(x_0) f(x)$. Au final : $g = g(x_0) f$.

Hyperplans et forme linéaire

- Une forme linéaire est une application $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (ie linéaire à valeurs dans le corps).
- Une forme linéaire non nulle est surjective (car son rang est 1). Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$.
- Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

- Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

Si deux formes linéaires non nulles sont colinéaires, alors clairement elles sont le même noyau.

Équations d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un SEV de E.

- H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ non tous nuls, tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

- On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$

Cela revient à écrire l'hyperplan H en utilisant un vecteur orthogonal :

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \in H &\iff (x_1, \dots, x_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) = 0 \\ &\iff (x_1, \dots, x_n) \perp (a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

(en identifiant H et $\mathbb{K}^n$ après le choix de $\mathcal{B}$).

Équations d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un SEV de E.

- H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ non tous nuls, tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

- On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$

Cela revient à écrire l'hyperplan H en utilisant un vecteur orthogonal :

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \in H &\iff (x_1, \dots, x_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) = 0 \\ &\iff (x_1, \dots, x_n) \perp (a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

(en identifiant H et $\mathbb{K}^n$ après le choix de $\mathcal{B}$).

Équations d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un SEV de E.

- H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ non tous nuls, tels que :
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$
- On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$

Cela revient à écrire l'hyperplan H en utilisant un vecteur orthogonal :
$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \in H &\iff (x_1, \dots, x_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) = 0 \\ &\iff (x_1, \dots, x_n) \perp (a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$
(en identifiant H et $\mathbb{K}^n$ après le choix de $\mathcal{B}$).

Équations d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un SEV de E.

- H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ non tous nuls, tels que :
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$
- On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$

Soit H un hyperplan, on considère une forme linéaire f non nulle associée, on écrit la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc une ligne $(a_1, \dots, a_n)$ non nulle. On a de plus :

$$x \in H \iff MX = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

Équations d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et H un SEV de E.

- H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, \ldots, a_n)$ non tous nuls, tels que :
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$
- On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$

Si les scalaires $(a_1, \ldots, a_n)$ existe, on considère la matrice M constituée de la ligne $(a_1, \ldots, a_n)$ et f la forme linéaire associée, qui est donc non nulle. Clairement, $x \in H \iff MX = 0 \iff f(x) = 0$, donc H est un hyperplan.

Cela revient à écrire l'hyperplan H en utilisant un vecteur orthogonal :
$$(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in H \iff (x_1, \ldots, x_n) \cdot (a_1, \ldots, a_n) = 0$$

Équations d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et H un SEV de E.

- H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, \ldots, a_n)$ non tous nuls, tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

- On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$

Cela revient à écrire l'hyperplan H en utilisant un vecteur orthogonal :

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \in H &\iff (x_1, \ldots, x_n) \cdot (a_1, \ldots, a_n) = 0 \\ &\iff (x_1, \ldots, x_n) \perp (a_1, \ldots, a_n)\end{aligned}$$

(en identifiant H et $\mathbb{K}^n$ après le choix de $\mathcal{B}$).

Équations d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un SEV de E.

- H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ non tous nuls, tels que :
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$
- On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$

Deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

Équations d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et H un SEV de E.

- H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, \ldots, a_n)$ non tous nuls, tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

- On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$

Deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

Équations d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un SEV de E.

- H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ non tous nuls, tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

- On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$

Deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

Équations d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et H un SEV de E.

- H est un hyperplan si et seulement si il existe n scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ non tous nuls, tels que :
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$
- On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$

Deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.