Formules de Taylor et développements limités

Rappels

Sylvain Pelletier

PSI - LMSC

La formule de Taylor sur les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \left(X - a\right)^k$$

En particulier, pour $a = 0$, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Enfin, on a :

$$P(X + a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\left(X - a\right)^k$$

Montre que $\left((X-a)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base et donne les coordonnées dans cette base

En particulier, pour $a = 0$, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Enfin, on a :

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

La formule de Taylor sur les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \left(X - a\right)^k$$

Lien entre divisibilité et racine.

En particulier, pour $a = 0$, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Enfin, on a :

$$P(X + a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

La formule de Taylor sur les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \big(X - a\big)^k$$

En particulier, pour $a = 0$, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Enfin, on a :

$$P(X + a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

La formule de Taylor sur les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \left(X - a\right)^k$$

En particulier, pour $a = 0$, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Donne le lien entre les coordonnées dans la base canonique et les dérivées successives en 0

Enfin, on a :

$$P(X + a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

La formule de Taylor sur les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \left(X - a\right)^k$$

En particulier, pour $a = 0$, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Enfin, on a :

$$P(X + a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

- La formule de Taylor est exacte pour les polynômes (pas besoin de reste, ni de petit o).
- On l'écrit comme une somme infinie mais c'est en fait une somme finie (jusqu'au degré de P).

- Pour la retrouver :

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n & a_0 &= P(0) \\ P' &= a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \cdots + n a_n X^{n-1} & a_1 &= P'(0) \\ P'' &= 2a_2 + 3 \times 2 a_3 X + \cdots + n(n-1) a_n X^{n-2} & 2a_2 &= P''(0) \end{aligned}$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

- La formule de Taylor est exacte pour les polynômes (pas besoin de reste, ni de petit o).
- On l'écrit comme une somme infinie mais c'est en fait une somme finie (jusqu'au degré de P).

- Pour la retrouver :

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n & a_0 &= P(0) \\ P' &= a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \cdots + n a_n X^{n-1} & a_1 &= P'(0) \\ P'' &= 2a_2 + 3 \times 2 a_3 X + \cdots + n(n-1) a_n X^{n-2} & 2a_2 &= P''(0) \end{aligned}$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

- La formule de Taylor est exacte pour les polynômes (pas besoin de reste, ni de petit o).
- On l'écrit comme une somme infinie mais c'est en fait une somme finie (jusqu'au degré de P).

- Pour la retrouver :

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n & a_0 &= P(0) \\ P' &= a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \cdots + n a_n X^{n-1} & a_1 &= P'(0) \\ P'' &= 2a_2 + 3 \times 2 a_3 X + \cdots + n(n-1) a_n X^{n-2} & 2a_2 &= P''(0) \end{aligned}$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

- La formule de Taylor est exacte pour les polynômes (pas besoin de reste, ni de petit o).
- On l'écrit comme une somme infinie mais c'est en fait une somme finie (jusqu'au degré de P).

- Pour la retrouver :

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n & a_0 &= P(0) \\ P' &= a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \cdots + n a_n X^{n-1} & a_1 &= P'(0) \\ P'' &= 2a_2 + 3 \times 2a_3 X + \cdots + n(n-1) a_n X^{n-2} & 2a_2 &= P''(0) \end{aligned}$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

- La formule de Taylor est exacte pour les polynômes (pas besoin de reste, ni de petit o).
- On l'écrit comme une somme infinie mais c'est en fait une somme finie (jusqu'au degré de P).

- Pour la retrouver :

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n & a_0 &= P(0) \\ P' &= a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \cdots + n a_n X^{n-1} & a_1 &= P'(0) \\ P'' &= 2a_2 + 3 \times 2 a_3 X + \cdots + n(n-1) a_n X^{n-2} & 2a_2 &= P''(0) \end{aligned}$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

- Si deux polynômes sont égaux sur un intervalle du type $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, alors ils ont les mêmes coefficients et sont égaux partout !

$$P(X + a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

- Cette formule permet de trouver l'expression du polynôme composé $P(X + a)$ en fonction du polynôme P.

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

- Si deux polynômes sont égaux sur un intervalle du type $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, alors ils ont les mêmes coefficients et sont égaux partout !

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

- Cette formule permet de trouver l'expression du polynôme composé $P(X+a)$ en fonction du polynôme P.

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

- Si deux polynômes sont égaux sur un intervalle du type $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, alors ils ont les mêmes coefficients et sont égaux partout (faux pour les fonctions) !

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

- Cette formule permet de trouver l'expression du polynôme composé $P(X+a)$ en fonction du polynôme P.

$$P(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$$

- Si deux polynômes sont égaux sur un intervalle du type $]-\alpha,\alpha[$ avec $\alpha>0$, alors ils ont les mêmes coefficients et sont égaux partout (faux pour les fonctions) !

$$P(X+a)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k$$

- Cette formule permet de trouver l'expression du polynôme composé $P(X+a)$ en fonction du polynôme P.

$$P(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$$

- Si deux polynômes sont égaux sur un intervalle du type $]-\alpha,\alpha[$ avec $\alpha>0$, alors ils ont les mêmes coefficients et sont égaux partout (faux pour les fonctions) !

$$P(X+a)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k$$

- Cette formule permet de trouver l'expression du polynôme composé $P(X+a)$ en fonction du polynôme P.

Exemples d'application

On identifie les fonctions polynomiales et les polynômes.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t)e^t dt \end{array} \right.$$

- Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
- Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_{-1}^{1} P(u+x)e^u du$$

- Vérifier :

$$\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P^{(k)}$$

Exemples d'application

On identifie les fonctions polynomiales et les polynômes.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & x \mapsto e^{-x} \int_{x-1}^{x+1} P(t) e^t dt \end{array} \right.$$

- Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
- Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_{-1}^{1} P(u+x) e^u du$$
- Vérifier :
$$\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P^{(k)}$$

Exemples d'application

On identifie les fonctions polynomiales et les polynômes.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t)e^t dt \end{array} \right.$$

- Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ Il s'agit de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$, la linéarité est évidente.
- Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_{-1}^{1} P(u+x)e^u du$$

- Vérifier :

$$\exists(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P^{(k)}$$

Exemples d'application

On identifie les fonctions polynomiales et les polynômes.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t) e^t dt \end{array} \right.$$

- Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
- Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_{-1}^{1} P(u+x) e^u du$$

- Vérifier :

$$\exists (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P^{(k)}$$

Exemples d'application

On identifie les fonctions polynomiales et les polynômes.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t)e^t dt \end{array} \right.$$

- Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
- Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_{-1}^{1} P(u+x)e^u du$$

On utilise un changement de variable : $t = u + x$, $u = t - x$

- Vérifier :

$$\exists(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P^{(k)}$$

Exemples d'application

On identifie les fonctions polynomiales et les polynômes.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & x \mapsto e^{-x} \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t) e^t dt \end{array} \right.$$

- Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
- Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_{-1}^{1} P(u+x) e^u du$$

- Vérifier :

$$\exists (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P^{(k)}$$

Exemples d'application

On identifie les fonctions polynomiales et les polynômes.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & x \mapsto e^{-x}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t)e^t dt \end{array} \right.$$

- Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
- Montrer que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_{-1}^{1} P(u+x)e^u du$$

- Vérifier :

$$\exists(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P^{(k)}$$

En utilisant la formule de Taylor sur les polynômes

Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a. Alors f admet un DL_n en a donné par :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o\left[(x-a)^n\right]$$

$$\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + o\left[(x-a)^n\right]$$

En particulier dans le cas $a = 0$, on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right).$$

Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a. Alors f admet un DL_n en a donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \\ &\qquad + o\big[(x-a)^n\big] \\ &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + o\big[(x-a)^n\big] \end{aligned}$$

En particulier dans le cas $a = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

Formule de Taylor-Young

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$$

- Il s'agit d'une égalité asymptotique : lorsque x tends vers 0, la fonction f est presque un polynôme sauf un reste qui tends vers 0 plus vite que x^n.
- Permet d'obtenir les développements limités usuels, mais pour une fonction quelconque, il est recommandé d'utiliser les méthodes de calculs de DL.
- Parfois, on calcule les dérivées successives en 0 en calculant le DL.

Formule de Taylor-Young

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)$$

- Il s'agit d'une égalité asymptotique : lorsque x tends vers 0, la fonction f est presque un polynôme sauf un reste qui tends vers 0 plus vite que x^n.
- Permet d'obtenir les développements limités usuels, mais pour une fonction quelconque, il est recommandé d'utiliser les méthodes de calculs de DL.
- Parfois, on calcule les dérivées successives en 0 en calculant le DL.

Formule de Taylor-Young

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$$

- Il s'agit d'une égalité asymptotique : lorsque x tends vers 0, la fonction f est presque un polynôme (son polynôme de Taylor) sauf un reste qui tends vers 0 plus vite que x^n.
- Permet d'obtenir les développements limités usuels, mais pour une fonction quelconque, il est recommandé d'utiliser les méthodes de calculs de DL.
- Parfois, on calcule les dérivées successives en 0 en calculant le DL.

Formule de Taylor-Young

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$$

- Il s'agit d'une égalité asymptotique : lorsque x tends vers 0, la fonction f est presque un polynôme (son polynôme de Taylor) sauf un reste qui tends vers 0 plus vite que x^n.
- Permet d'obtenir les développements limités usuels, mais pour une fonction quelconque, il est recommandé d'utiliser les méthodes de calculs de DL.
- Parfois, on calcule les dérivées successives en 0 en calculant le DL.

Formule de Taylor-Young

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$$

- Il s'agit d'une égalité asymptotique : lorsque x tends vers 0, la fonction f est presque un polynôme (son polynôme de Taylor) sauf un reste qui tends vers 0 plus vite que x^n.
- Permet d'obtenir les développements limités usuels, mais pour une fonction quelconque, il est recommandé d'utiliser les méthodes de calculs de DL.
- Parfois, on calcule les dérivées successives en 0 en calculant le DL.

Généralités sur les DLs

- Pour retrouver les règles de manipulation : $o(x^n)$ désigne $\epsilon(x)x^n$, où $\epsilon(x)$ est une fonction inconnue de limite nulle. $O(x^n)$ désigne $b(x)x^n$, où $b(x)$ est une fonction bornée.
- L'ordre du DL correspond au nombre de chiffres significatifs (on maîtrise le degré de précision). On écrit donc toujours les termes dans le bon ordre et les DLs sont uniques.
- Un DL est presque une égalité : on peut passer les termes de gauche à droite du signe =. On peut remplacer partout une fonction par son DL (sauf pour dériver). Mais c'est une égalité asymptotique : la variable x ne se quantifie pas. L'information donné par le DL est locale.
- On ne sait jamais à quel ordre il faut faire un DL. Si on a un ordre trop élevé il suffit de tronquer, si on n'a pas fait assez de calculs il faut recommencer.

Généralités sur les DLs

- Pour retrouver les règles de manipulation : $o(x^n)$ désigne $\epsilon(x)x^n$, où $\epsilon(x)$ est une fonction inconnue de limite nulle. $O(x^n)$ désigne $b(x)x^n$, où $b(x)$ est une fonction bornée.
- L'ordre du DL correspond au nombre de chiffres significatifs (on maîtrise le degré de précision). On écrit donc toujours les termes dans le bon ordre et les DLs sont uniques.
- Un DL est presque une égalité : on peut passer les termes de gauche à droite du signe $=$. On peut remplacer partout une fonction par son DL (sauf pour dériver). Mais c'est une égalité asymptotique : la variable x ne se quantifie pas. L'information donné par le DL est locale.
- On ne sait jamais à quel ordre il faut faire un DL. Si on a un ordre trop élevé il suffit de tronquer, si on n'a pas fait assez de calculs il faut recommencer.

Généralités sur les DLs

- Pour retrouver les règles de manipulation : $o(x^n)$ désigne $\epsilon(x)x^n$, où $\epsilon(x)$ est une fonction inconnue de limite nulle. $O(x^n)$ désigne $b(x)x^n$, où $b(x)$ est une fonction bornée.
- L'ordre du DL correspond au nombre de chiffres significatifs (on maîtrise le degré de précision). On écrit donc toujours les termes dans le bon ordre et les DLs sont uniques.
- Un DL est presque une égalité : on peut passer les termes de gauche à droite du signe =. On peut remplacer partout une fonction par son DL (sauf pour dériver). Mais c'est une égalité asymptotique : la variable x ne se quantifie pas. L'information donné par le DL est locale.
- On ne sait jamais à quel ordre il faut faire un DL. Si on a un ordre trop élevé il suffit de tronquer, si on n'a pas fait assez de calculs il faut recommencer.

Généralités sur les DLs

- Pour retrouver les règles de manipulation : $o(x^n)$ désigne $\epsilon(x)x^n$, où $\epsilon(x)$ est une fonction inconnue de limite nulle. $O(x^n)$ désigne $b(x)x^n$, où $b(x)$ est une fonction bornée.
- L'ordre du DL correspond au nombre de chiffres significatifs (on maîtrise le degré de précision). On écrit donc toujours les termes dans le bon ordre et les DLs sont uniques.
- Un DL est presque une égalité : on peut passer les termes de gauche à droite du signe $=$. On peut remplacer partout une fonction par son DL (sauf pour dériver). Mais c'est une égalité asymptotique : la variable x ne se quantifie pas. L'information donné par le DL est locale.
- On ne sait jamais à quel ordre il faut faire un DL. Si on a un ordre trop élevé il suffit de tronquer, si on n'a pas fait assez de calculs il faut recommencer.

Généralités sur les DLs

- Pour retrouver les règles de manipulation : $o(x^n)$ désigne $\epsilon(x)x^n$, où $\epsilon(x)$ est une fonction inconnue de limite nulle. $O(x^n)$ désigne $b(x)x^n$, où $b(x)$ est une fonction bornée.
- L'ordre du DL correspond au nombre de chiffres significatifs (on maîtrise le degré de précision). On écrit donc toujours les termes dans le bon ordre et les DLs sont uniques.
- Un DL est presque une égalité : on peut passer les termes de gauche à droite du signe $=$. On peut remplacer partout une fonction par son DL (sauf pour dériver). Mais c'est une égalité asymptotique : la variable x ne se quantifie pas. L'information donné par le DL est locale.
- On ne sait jamais à quel ordre il faut faire un DL sauf de préparer le calcul mentalement. Si on a un ordre trop élevé il suffit de tronquer, si on n'a pas fait assez de calculs il faut recommencer.

Généralités sur les DLs

- f dérivable en a si elle admet un DL1 en a.

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o((x-a))$$

- Avec Taylor-Young, on peut souvent gagner un ordre en utilisant un « grand o ». Précisément l'écriture avec un $\underset{x \to 0}{O}(x^{n+1})$ est plus précise que $\underset{x \to 0}{o}(x^n)$: on indique le degré du terme suivant (que l'on ne calcule pas)

- L'équivalent = 1 terme . Précisément, l'équivalent est le premier terme non nul du DL.
- Pas de somme d'équivalents, pas de composition d'équivalents !
- L'équivalent donne la vitesse et le signe, souvent l'information dont on a besoin (en particulier pour calculer des limites).
- On utilise les DLS pour calculer des équivalents.

Généralités sur les DLs

- f dérivable en a si elle admet un DL1 en a.
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o((x-a))$$
Attention pas de généralisation aux ordres supérieurs
- Avec Taylor-Young, on peut souvent gagner un ordre en utilisant un « grand o ». Précisément l'écriture avec un $\underset{x \to 0}{O}(x^{n+1})$ est plus précise que $\underset{x \to 0}{o}(x^n)$: on indique le degré du terme suivant (que l'on ne calcule pas)

- L'équivalent = 1 terme . Précisément, l'équivalent est le premier terme non nul du DL.
- Pas de somme d'équivalents, pas de composition d'équivalents !
- L'équivalent donne la vitesse et le signe, souvent l'information dont on a besoin (en particulier pour calculer des limites).
- On utilise les DLS pour calculer des équivalents.

Généralités sur les DLs

- f dérivable en a si elle admet un DL1 en a.
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o((x-a))$$
- Avec Taylor-Young, on peut souvent gagner un ordre en utilisant un « grand o ». Précisément l'écriture avec un $\underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$ est plus précise que $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$: on indique le degré du terme suivant (que l'on ne calcule pas)

- L'équivalent = 1 terme . Précisément, l'équivalent est le premier terme non nul du DL.
- Pas de somme d'équivalents, pas de composition d'équivalents !
- L'équivalent donne la vitesse et le signe, souvent l'information dont on a besoin (en particulier pour calculer des limites).
- On utilise les DLS pour calculer des équivalents.

Généralités sur les DLs

- f dérivable en a si elle admet un DL1 en a.
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o((x-a))$$
- Avec Taylor-Young, on peut souvent gagner un ordre en utilisant un « grand o ». Précisément l'écriture avec un $\underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$ est plus précise que $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$: on indique le degré du terme suivant (que l'on ne calcule pas)

- L'équivalent = 1 terme . Précisément, l'équivalent est le premier terme non nul du DL.
- Pas de somme d'équivalents, pas de composition d'équivalents !
- L'équivalent donne la vitesse et le signe, souvent l'information dont on a besoin (en particulier pour calculer des limites).
- On utilise les DLS pour calculer des équivalents.

Généralités sur les DLs

- f dérivable en a si elle admet un DL1 en a.
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o((x-a))$$
- Avec Taylor-Young, on peut souvent gagner un ordre en utilisant un « grand o ». Précisément l'écriture avec un $\underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$ est plus précise que $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$: on indique le degré du terme suivant (que l'on ne calcule pas)

- L'équivalent $=$ 1 terme . Précisément, l'équivalent est le premier terme non nul du DL.
- Pas de somme d'équivalents, pas de composition d'équivalents !
- L'équivalent donne la vitesse et le signe, souvent l'information dont on a besoin (en particulier pour calculer des limites).
- On utilise les DLS pour calculer des équivalents.

Généralités sur les DLs

- f dérivable en a si elle admet un DL1 en a.
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o((x-a))$$
- Avec Taylor-Young, on peut souvent gagner un ordre en utilisant un « grand o ». Précisément l'écriture avec un $\underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$ est plus précise que $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$: on indique le degré du terme suivant (que l'on ne calcule pas)

- L'équivalent $=$ 1 terme . Précisément, l'équivalent est le premier terme non nul du DL.
- Pas de somme d'équivalents, pas de composition d'équivalents !
- L'équivalent donne la vitesse et le signe, souvent l'information dont on a besoin (en particulier pour calculer des limites).
- On utilise les DLS pour calculer des équivalents.

Généralités sur les DLs

- f dérivable en a si elle admet un DL1 en a.
$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o((x-a))$$
- Avec Taylor-Young, on peut souvent gagner un ordre en utilisant un « grand o ». Précisément l'écriture avec un $\underset{x\to 0}{O}(x^{n+1})$ est plus précise que $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$: on indique le degré du terme suivant (que l'on ne calcule pas)

- L'équivalent $=$ 1 terme . Précisément, l'équivalent est le premier terme non nul du DL.
- Pas de somme d'équivalents, pas de composition d'équivalents !
- L'équivalent donne la vitesse et le signe, souvent l'information dont on a besoin (en particulier pour calculer des limites).
- On utilise les DLS pour calculer des équivalents.

Les différents développement de $\dfrac{1}{1+x}$

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$\dfrac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	Peut s'obtenir par Taylor-Young, ou par la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \dots (-1)^n x^n + o(x^n)$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	La même que ci-dessus avec $-x$ à la place de x.

Les différents développement de $\ln(1+x)$

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$-\ln(1-x)$	$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\frac{x^n}{n}+o(x^n)$, soit $\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$	En intégrant $\frac{1}{1-x}$ ou par la formule de Taylor-Young
$\ln(1-x)$	$-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)$, soit $-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$	ré-écriture de la ligne précédente
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$, soit $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$	Idem

Les différents développement de $(1+x)^\alpha$

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$	Obtenue par la formule de Taylor Young, remarquez en particulier la similitude avec la formule de Newton lorsque α est entier.
$\sqrt{1+x}$	$1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)$	Exemple d'application, à savoir retrouver rapidement.
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+o(x^2)$	Idem.

Développement limités de e^x et des fonctions trigonométriques

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$, soit $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	Par Taylor Young, puisque e^x est se dérive en elle-même.
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$, soit $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$	Impaire et obtenu par Taylor Young. Autre méthode, en remplaçant x par ix et $-ix$ dans e^x.
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$, soit $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	Par Taylor-Young, remarquez que l'on a un ordre de plus que la partie régulière, puisque l'on sait que le prochain terme est en x^{2n+2}

D'autres développements limités à savoir retrouver

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$\tan(x)$	$x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$	En calculant les dérivées successives et en utilisant Taylor-Young. On sait que c'est un ordre 4, puisque la fonction est impaire.
$\arctan(x)$	$x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^6)$	En utilisant un DL de $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, il existe une formule pour l'ordre n
$\arcsin(x)$	$x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^6)$	En utilisant un DL de $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, il existe une formule pour l'ordre n
$\arccos(x)$	$\dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^6)$	$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Manipulation des développpements limités

- Pour faire un $DL_n(a)$, il faut systématiquement se ramener à 0. On fait un changement de variable : $x = a + h$.
  Après avoir obtenu le $DL(0)$ en h, on remplace de nouveau h par $(x - a)$ pour avoir un le $DL(a)$.

DL de $x \mapsto \ln x$ au point 3.

- Lorsque l'on fait un DL d'une fonction paire, on peut toujours « ajouter un ordre » en remplacant un $o(x^{2n})$ par $o(x^{2n+1})$. Cette propriété sert aussi à vérifier les calculs : si la fonction est paire, le DL ne contient que des termes pairs. Idem, si la fonction est impaire.

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$
$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Manipulation des développpements limités

- Pour faire un $DL_n(a)$, il faut systématiquement se ramener à 0. On fait un changement de variable : $x = a + h$. La variable x tends vers a tandis que h tends vers 0.
  Après avoir obtenu le $DL(0)$ en h, on remplace de nouveau h par $(x - a)$ pour avoir un le $DL(a)$.

DL de $x \mapsto \ln x$ au point 3.

- Lorsque l'on fait un DL d'une fonction paire, on peut toujours « ajouter un ordre » en remplacant un $o(x^{2n})$ par $o(x^{2n+1})$. Cette propriété sert aussi à vérifier les calculs : si la fonction est paire, le DL ne contient que des termes pairs. Idem, si la fonction est impaire.

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Manipulation des développpements limités

- Pour faire un $DL_n(a)$, il faut systématiquement se ramener à 0. On fait un changement de variable : $x = a + h$.
  Après avoir obtenu le $DL(0)$ en h, on remplace de nouveau h par $(x - a)$ pour avoir un le $DL(a)$.

DL de $x \mapsto \ln x$ au point 3.

- Lorsque l'on fait un DL d'une fonction paire, on peut toujours « ajouter un ordre » en remplacant un $o(x^{2n})$ par $o(x^{2n+1})$. Cette propriété sert aussi à vérifier les calculs : si la fonction est paire, le DL ne contient que des termes pairs. Idem, si la fonction est impaire.

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Manipulation des développpements limités

- Pour faire un $DL_n(a)$, il faut systématiquement se ramener à 0. On fait un changement de variable : $x = a + h$.
  Après avoir obtenu le $DL(0)$ en h, on remplace de nouveau h par $(x - a)$ pour avoir un le $DL(a)$.

DL de $x \mapsto \ln x$ au point 3.

$$\begin{aligned}
\ln(3+h) &= \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \ln(3) + \frac{h}{3} - \frac{1}{18}h^2 + \frac{1}{81}h^3 + o\left(h^3\right) \\
&\underset{x\to 3}{=} \ln(3) + \frac{(x-3)}{3} - \frac{1}{18}(x-3)^2 + \frac{1}{81}(x-3)^3 + o\left((x-3)^3\right)
\end{aligned}$$

- Lorsque l'on fait un DL d'une fonction paire, on peut toujours « ajouter un ordre » en remplacant un $o(x^{2n})$ par $o(x^{2n+1})$. Cette

Manipulation des développpements limités

- Pour faire un $DL_n(a)$, il faut systématiquement se ramener à 0. On fait un changement de variable : $x = a + h$.
  Après avoir obtenu le $DL(0)$ en h, on remplace de nouveau h par $(x - a)$ pour avoir un le $DL(a)$.

DL de $x \mapsto \ln x$ au point 3.

- Lorsque l'on fait un DL d'une fonction paire, on peut toujours « ajouter un ordre » en remplacant un $o(x^{2n})$ par $o(x^{2n+1})$. Cette propriété sert aussi à vérifier les calculs : si la fonction est paire, le DL ne contient que des termes pairs. Idem, si la fonction est impaire.

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Manipulation des développpements limités

- Pour faire un $DL_n(a)$, il faut systématiquement se ramener à 0. On fait un changement de variable : $x = a + h$.
Après avoir obtenu le $DL(0)$ en h, on remplace de nouveau h par $(x - a)$ pour avoir un le $DL(a)$.

DL de $x \mapsto \ln x$ au point 3.

- Lorsque l'on fait un DL d'une fonction paire, on peut toujours « ajouter un ordre » en remplacant un $o(x^{2n})$ par $o(x^{2n+1})$. Cette propriété sert aussi à vérifier les calculs : si la fonction est paire, le DL ne contient que des termes pairs. Idem, si la fonction est impaire.

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$
$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \underset{0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

Exemples

DL3 en 1 de $x \longmapsto \arctan(x)$.

DL3 en $\frac{\pi}{3}$ et $x \longmapsto \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exemples

DL3 en 1 de $x \longmapsto \arctan(x)$.

$$\arctan(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} + o\left((x-1)^3\right)$$

DL3 en $\frac{\pi}{3}$ et $x \longmapsto \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exemples

DL3 en 1 de $x \longmapsto \arctan(x)$.

DL3 en $\frac{\pi}{3}$ et $x \longmapsto \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

On peut écrire :

$$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{2}$$

puis poser $x = \frac{\pi}{3} + h$. Au final :

$$f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=} \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{8}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{24}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right)$$

Manipulation des développpements limités

- Pour calculer le développement limité d'une somme, on remplace les fonctions par leur DL.
  Le premier terme négligé est alors le plus petit des deux ordres des deux DLs. On fait alors la somme des deux polynômes (en ne gardant que les termes de degré inférieur à l'ordre du DL).

$$\begin{aligned} e^x + \cos(x) &\underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

- La règle est : $o(x^3) + o(x^4) = o(x^3)$

- Pour calculer le développement limité d'une somme, on remplace les fonctions par leur DL.
  Le premier terme négligé est alors le plus petit des deux ordres des deux DLs. On fait alors la somme des deux polynômes (en ne gardant que les termes de degré inférieur à l'ordre du DL).

$$e^x + \cos(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$
$$\underset{0}{=} 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

- La règle est : $o(x^3) + o(x^4) = o(x^3)$

Manipulation des développpements limités

- Pour calculer le développement limité d'une somme, on remplace les fonctions par leur DL.
  Le premier terme négligé est alors le plus petit des deux ordres des deux DLs. On fait alors la somme des deux polynômes (en ne gardant que les termes de degré inférieur à l'ordre du DL).

$$
\begin{aligned}
e^x + \cos(x) &\underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\
&\underset{0}{=} 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}
$$

- La règle est : $o(x^3) + o(x^4) = o(x^3)$

- Pour calculer le développement limité d'une somme, on remplace les fonctions par leur DL.
  Le premier terme négligé est alors le plus petit des deux ordres des deux DLs. On fait alors la somme des deux polynômes (en ne gardant que les termes de degré inférieur à l'ordre du DL).

$$\begin{aligned} e^x + \cos(x) &\underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

- La règle est : $o(x^3) + o(x^4) = o(x^3)$

Manipulation des développpements limités

- Pour calculer le développement limité d'une somme, on remplace les fonctions par leur DL.
  Le premier terme négligé est alors le plus petit des deux ordres des deux DLs. On fait alors la somme des deux polynômes (en ne gardant que les termes de degré inférieur à l'ordre du DL).

$$
\begin{aligned}
e^x + \cos(x) &\underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\
&\underset{0}{=} 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}
$$

- La règle est : $o(x^3) + o(x^4) = o(x^3)$

Manipulation des développpements limités

- Pour calculer le DL d'un produit, on remplace les fonctions par leur DL. On déterminer l'ordre n du DL final. Puis on calcule les coefficients du polynômes PQ (produit de polynômes) de degrés inférieurs ou égal à n.

- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$
- $1 \times o(x^4) = o(x^4)$ et $x \times o(x^4) = o(x^5)$.
- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

- Les règles sont : $x^k o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $o\left(x^k\right) o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $\frac{1}{x^k} o\left(x^n\right) = o\left(x^{n-k}\right)$

Manipulation des développpements limités

- Pour calculer le DL d'un produit, on remplace les fonctions par leur DL. On déterminer l'ordre n du DL final. Puis on calcule les coefficients du polynômes PQ (produit de polynômes) de degrés inférieurs ou égal à n.

- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$
- $1 \times o(x^4) = o(x^4)$ et $x \times o(x^4) = o(x^5)$.
- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

- Les règles sont : $x^k o(x^n) = o\left(x^{k+n}\right)$, $o\left(x^k\right) o(x^n) = o\left(x^{k+n}\right)$, $\frac{1}{x^k} o(x^n) = o\left(x^{n-k}\right)$

Manipulation des développpements limités

- Pour calculer le DL d'un produit, on remplace les fonctions par leur DL. On déterminer l'ordre n du DL final. Puis on calcule les coefficients du polynômes PQ (produit de polynômes) de degrés inférieurs ou égal à n.

- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$
- $1 \times o(x^4) = o(x^4)$ et $x \times o(x^4) = o(x^5)$.
- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

- Les règles sont : $x^k o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $o\left(x^k\right) o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $\frac{1}{x^k} o\left(x^n\right) = o\left(x^{n-k}\right)$

Manipulation des développpements limités

- Pour calculer le *DL* d'un produit, on remplace les fonctions par leur *DL*. On déterminer l'ordre n du *DL* final. Puis on calcule les coefficients du polynômes PQ (produit de polynômes) de degrés inférieurs ou égal à n.

- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$
- $1 \times o(x^4) = o(x^4)$ et $x \times o(x^4) = o(x^5)$.
- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

- Les règles sont : $x^k o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $o\left(x^k\right) o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $\frac{1}{x^k} o\left(x^n\right) = o\left(x^{n-k}\right)$

Manipulation des développpements limités

- Pour calculer le *DL* d'un produit, on remplace les fonctions par leur *DL*. On déterminer l'ordre n du *DL* final. Puis on calcule les coefficients du polynômes PQ (produit de polynômes) de degrés inférieurs ou égal à n.

- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$
- $1 \times o(x^4) = o(x^4)$ et $x \times o(x^4) = o(x^5)$.
- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

- Les règles sont : $x^k o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $o\left(x^k\right) o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $\frac{1}{x^k} o\left(x^n\right) = o\left(x^{n-k}\right)$

Manipulation des développpements limités

- Pour calculer le *DL* d'un produit, on remplace les fonctions par leur *DL*. On déterminer l'ordre n du *DL* final. Puis on calcule les coefficients du polynômes PQ (produit de polynômes) de degrés inférieurs ou égal à n.

- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$
- $1 \times o(x^4) = o(x^4)$ et $x \times o(x^4) = o(x^5)$.
- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

- Les règles sont : $x^k o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $o\left(x^k\right) o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $\frac{1}{x^k} o\left(x^n\right) = o\left(x^{n-k}\right)$

Manipulation des développpements limités

- Pour calculer le *DL* d'un produit, on remplace les fonctions par leur *DL*. On déterminer l'ordre n du *DL* final. Puis on calcule les coefficients du polynômes PQ (produit de polynômes) de degrés inférieurs ou égal à n.

- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$
- $1 \times o(x^4) = o(x^4)$ et $x \times o(x^4) = o(x^5)$.
- $e^x \sin(x) \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

- Les règles sont : $x^k o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $o\left(x^k\right) o\left(x^n\right) = o\left(x^{k+n}\right)$, $\frac{1}{x^k} o\left(x^n\right) = o\left(x^{n-k}\right)$

Pour faire un *DL* d'une expression composée $g(f(x))$ lorsque x tends vers 0 :

- on commence par faire un DL de l'expression `à l'intérieur` $f(x)$
- On isole alors la partie qui tends vers 0, notée $u(x)$, cette partie peut bien sûr contenir un o. On écrit alors $f(x) = a_0 + u(x)$.
- On calcule l'équivalent de $u(x)$ qui est nécessairement être de la forme : $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$ et on vérifie bien que la fonction u tends vers 0.
- on fait ensuite un *DL* de la fonction `à l'extérieur` $g(a_0 + u)$ en la variable u qui tends vers 0,
- La règle est : si $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$, avec λ non nul alors $o(u(x)^l) = o(x^{kl})$,
- on remplace dans ce *DL*, la variable u par l'expression $u(x)$, et le $o(u^l)$ par un $o(x^{kl})$. On obtient alors un *DL* lorsque x tends vers 0.
- on finit alors comme dans le cas d'un produit.

Pour faire un DL d'une expression composée $g(f(x))$ lorsque x tends vers 0 :

- on commence par faire un DL de l'expression `à l'intérieur` $f(x)$
- On isole alors la partie qui tends vers 0, notée $u(x)$, cette partie peut bien sûr contenir un o. On écrit alors $f(x) = a_0 + u(x)$.
- On calcule l'équivalent de $u(x)$ qui est nécessairement être de la forme : $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$ et on vérifie bien que la fonction u tends vers 0.
- on fait ensuite un DL de la fonction `à l'extérieur` $g(a_0 + u)$ en la variable u qui tends vers 0,
- La règle est : si $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$, avec λ non nul alors $o(u(x)^l) = o(x^{kl})$,
- on remplace dans ce DL, la variable u par l'expression $u(x)$, et le $o(u^l)$ par un $o(x^{kl})$. On obtient alors un DL lorsque x tends vers 0.
- on finit alors comme dans le cas d'un produit.

Pour faire un DL d'une expression composée $g\left(f(x)\right)$ lorsque x tends vers 0 :

- on commence par faire un DL de l'expression `à l'intérieur` $f(x)$
- On isole alors la partie qui tends vers 0, notée $u(x)$, cette partie peut bien sûr contenir un o. On écrit alors $f(x) = a_0 + u(x)$.
- On calcule l'équivalent de $u(x)$ qui est nécessairement être de la forme : $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$ et on vérifie bien que la fonction u tends vers 0.
- on fait ensuite un DL de la fonction `à l'extérieur` $g(a_0 + u)$ en la variable u qui tends vers 0,
- La règle est : si $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$, avec λ non nul alors $o(u(x)^l) = o(x^{kl})$,
- on remplace dans ce DL, la variable u par l'expression $u(x)$, et le $o(u^l)$ par un $o(x^{kl})$. On obtient alors un DL lorsque x tends vers 0.
- on finit alors comme dans le cas d'un produit.

Pour faire un DL d'une expression composée $g\left(f(x)\right)$ lorsque x tends vers 0 :

- on commence par faire un DL de l'expression `à l'intérieur` $f(x)$
- On isole alors la partie qui tends vers 0, notée $u(x)$, cette partie peut bien sûr contenir un o. On écrit alors $f(x) = a_0 + u(x)$.
- On calcule l'équivalent de $u(x)$ qui est nécessairement être de la forme : $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$ et on vérifie bien que la fonction u tends vers 0.
- on fait ensuite un DL de la fonction `à l'extérieur` $g(a_0 + u)$ en la variable u qui tends vers 0,
- La règle est : si $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$, avec λ non nul alors $o(u(x)^l) = o(x^{kl})$,
- on remplace dans ce DL, la variable u par l'expression $u(x)$, et le $o(u^l)$ par un $o(x^{kl})$. On obtient alors un DL lorsque x tends vers 0.
- on finit alors comme dans le cas d'un produit.

Pour faire un DL d'une expression composée $g(f(x))$ lorsque x tends vers 0 :

- on commence par faire un DL de l'expression `à l'intérieur` $f(x)$
- On isole alors la partie qui tends vers 0, notée $u(x)$, cette partie peut bien sûr contenir un o. On écrit alors $f(x) = a_0 + u(x)$.
- On calcule l'équivalent de $u(x)$ qui est nécessairement être de la forme : $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$ et on vérifie bien que la fonction u tends vers 0.
- on fait ensuite un DL de la fonction `à l'extérieur` $g(a_0 + u)$ en la variable u qui tends vers 0,
- La règle est : si $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$, avec λ non nul alors $o(u(x)^l) = o(x^{kl})$,
- on remplace dans ce DL, la variable u par l'expression $u(x)$, et le $o(u^l)$ par un $o(x^{kl})$. On obtient alors un DL lorsque x tends vers 0.
- on finit alors comme dans le cas d'un produit.

Pour faire un *DL* d'une expression composée $g\left(f(x)\right)$ lorsque x tends vers 0 :

- on commence par faire un DL de l'expression `à l'intérieur` $f(x)$
- On isole alors la partie qui tends vers 0, notée $u(x)$, cette partie peut bien sûr contenir un o. On écrit alors $f(x) = a_0 + u(x)$.
- On calcule l'équivalent de $u(x)$ qui est nécessairement être de la forme : $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$ et on vérifie bien que la fonction u tends vers 0.
- on fait ensuite un *DL* de la fonction `à l'extérieur` $g(a_0 + u)$ en la variable u qui tends vers 0,
- La règle est : si $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$, avec λ non nul alors $o(u(x)^l) = o(x^{kl})$,
- on remplace dans ce *DL*, la variable u par l'expression $u(x)$, et le $o(u^l)$ par un $o(x^{kl})$. On obtient alors un *DL* lorsque x tends vers 0.
- on finit alors comme dans le cas d'un produit.

Pour faire un DL d'une expression composée $g\left(f(x)\right)$ lorsque x tends vers 0 :

- on commence par faire un DL de l'expression `à l'intérieur` $f(x)$
- On isole alors la partie qui tends vers 0, notée $u(x)$, cette partie peut bien sûr contenir un o. On écrit alors $f(x) = a_0 + u(x)$.
- On calcule l'équivalent de $u(x)$ qui est nécessairement être de la forme : $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$ et on vérifie bien que la fonction u tends vers 0.
- on fait ensuite un DL de la fonction `à l'extérieur` $g(a_0 + u)$ en la variable u qui tends vers 0,
- La règle est : si $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$, avec λ non nul alors $o(u(x)^l) = o(x^{kl})$,
- on remplace dans ce DL, la variable u par l'expression $u(x)$, et le $o(u^l)$ par un $o(x^{kl})$. On obtient alors un DL lorsque x tends vers 0.
- on finit alors comme dans le cas d'un produit.

Pour faire un DL d'une expression composée $g\,(f(x))$ lorsque x tends vers 0 :

- on commence par faire un DL de l'expression `à l'intérieur` $f(x)$
- On isole alors la partie qui tends vers 0, notée $u(x)$, cette partie peut bien sûr contenir un o. On écrit alors $f(x) = a_0 + u(x)$.
- On calcule l'équivalent de $u(x)$ qui est nécessairement être de la forme : $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$ et on vérifie bien que la fonction u tends vers 0.
- on fait ensuite un DL de la fonction `à l'extérieur` $g(a_0 + u)$ en la variable u qui tends vers 0,
- La règle est : si $u(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^k$, avec λ non nul alors $o(u(x)^l) = o(x^{kl})$,
- on remplace dans ce DL, la variable u par l'expression $u(x)$, et le $o(u^l)$ par un $o(x^{kl})$. On obtient alors un DL lorsque x tends vers 0.
- on finit alors comme dans le cas d'un produit.

- $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 \underbrace{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{u(x)})$.
- On pose donc $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, et on a $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \to 0$.
- D'un autre côté, on a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.
- Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on remplace le $o(u^2)$ par $o(x^4)$.
- On obtient :

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + o(x^4)$$
$$\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

- Bien indiquer que l'on a changé de variable en indiquant la variable sous le o, et ne pas mélanger des expressions avec des u et des x.

- $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 \underbrace{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{u(x)})$.
- On pose donc $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, et on a $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \to 0$.
- D'un autre côté, on a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.
- Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on remplace le $o(u^2)$ par $o(x^4)$.
- On obtient :

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + o(x^4)$$
$$\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

- Bien indiquer que l'on a changé de variable en indiquant la variable sous le o, et ne pas mélanger des expressions avec des u et des x.

- $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{u(x)})$.
- On pose donc $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, et on a $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \to 0$.
- D'un autre côté, on a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.
- Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on remplace le $o(u^2)$ par $o(x^4)$.
- On obtient :

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + o(x^4)$$

$$\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

- Bien indiquer que l'on a changé de variable en indiquant la variable sous le o, et ne pas mélanger des expressions avec des u et des x.

- $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{u(x)})$.
- On pose donc $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, et on a $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \to 0$.
- D'un autre côté, on a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.
- Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on remplace le $o(u^2)$ par $o(x^4)$.
- On obtient :

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + o(x^4)$$
$$\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

- Bien indiquer que l'on a changé de variable en indiquant la variable sous le o, et ne pas mélanger des expressions avec des u et des x.

- $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 \underbrace{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{u(x)})$.
- On pose donc $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, et on a $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \to 0$.
- D'un autre côté, on a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.
- Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on remplace le $o(u^2)$ par $o(x^4)$.
- On obtient :

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)^2 + o(x^4)$$
$$\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

- Bien indiquer que l'on a changé de variable en indiquant la variable sous le o, et ne pas mélanger des expressions avec des u et des x.

- $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 \underbrace{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}_{u(x)})$.
- On pose donc $u(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, et on a $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \to 0$.
- D'un autre côté, on a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.
- Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on remplace le $o(u^2)$ par $o(x^4)$.
- On obtient :

$$\ln(\cos(x)) \underset{0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + o(x^4)$$
$$\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

- Bien indiquer que l'on a changé de variable en indiquant la variable sous le o, et ne pas mélanger des expressions avec des u et des x.

Exemples de composition

- DL 4 en 0 de :

$$x \longmapsto \ln(2+x) \qquad x \longmapsto \sqrt{1+x^2\sin(x)} \qquad x \longmapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exemples de composition

- DL 4 en 0 de :

$$x \longmapsto \ln(2+x) \qquad x \longmapsto \sqrt{1+x^2\sin(x)} \qquad x \longmapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln(2+x) \underset{0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{64} + o(x^4)$$

Exemples de composition

- DL 4 en 0 de :

$$x \longmapsto \ln(2+x) \qquad x \longmapsto \sqrt{1+x^2\sin(x)} \qquad x \longmapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{1+x^2\sin(x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

Exemples de composition

- DL 4 en 0 de :

$$x \longmapsto \ln(2+x) \qquad x \longmapsto \sqrt{1+x^2\sin(x)} \qquad x \longmapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(1+\frac{x^2}{8}-\frac{5x^4}{128}\right)+o(x^4)$$

Quotient de DL

- Pour faire un DL d'un quotient $\frac{f}{g}$, on est donc obligé de passer par celui d'un produit et faire le DL de $\frac{1}{g}$.
- Pour ce dernier, on écrira g sous la forme $1+u$, avec u qui tends vers 0, et on composera avec le DL de $\frac{1}{1+u}$.

- On s'est ramené au DL d'une composée

Quotient de DL

- Pour faire un DL d'un quotient $\dfrac{f}{g}$, on est donc obligé de passer par celui d'un produit et faire le DL de $\dfrac{1}{g}$.
- Pour ce dernier, on écrira g sous la forme $1+u$, avec u qui tends vers 0, et on composera avec le DL de $\dfrac{1}{1+u}$.

- On s'est ramené au DL d'une composée

Quotient de DL

- Pour faire un DL d'un quotient $\dfrac{f}{g}$, on est donc obligé de passer par celui d'un produit et faire le DL de $\dfrac{1}{g}$.
- Pour ce dernier, on écrira g sous la forme $1+u$, avec u qui tends vers 0, et on composera avec le DL de $\dfrac{1}{1+u}$.

- On s'est ramené au DL d'une composée

Quotient de DL

On souhait faire le *DL* de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

- On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
- On écrit donc :
$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)}$$
- On pose donc : $u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- On utilise alors le DL : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$.
- Ce qui donne :
$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x^4\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Quotient de DL

On souhait faire le *DL* de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

- On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
- On écrit donc :
$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)}$$
- On pose donc : $u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$
- On utilise alors le DL : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$.
- Ce qui donne :
$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x^4\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Quotient de DL

On souhait faire le *DL* de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

- On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
- On écrit donc :

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)}$$

- On pose donc : $u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- On utilise alors le DL : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$.
- Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x^4\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

On souhait faire le *DL* de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

- On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
- On écrit donc :
$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)}$$
- On pose donc : $u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- On utilise alors le DL : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$.
- Ce qui donne :
$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x^4\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Quotient de DL

On souhait faire le *DL* de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

- On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
- On écrit donc :
$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)}$$
- On pose donc : $u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- On utilise alors le DL : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$.
- Ce qui donne :
$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x^4\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

- Pour calculer le DL_n d'une fonction dont on connaît la dérivée (et le DL_n de la dérivée), on intègre la partie régulière du DL_n de f', en ajoutant le terme $f(0)$. On obtient ainsi un DL_{n+1}.
- Il faut toujours indiquer le terme $f(0)$ quitte à le barrer si il est nul.

On sait que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$. Donc

$$\arctan(x) \underset{0}{=} \cancel{\arctan(0)} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

La règle est $\int_0^x \underset{t\to 0}{o}(t^n)\,dt = \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

Intégration d'un DL

- Pour calculer le DL_n d'une fonction dont on connaît la dérivée (et le DL_n de la dérivée), on intègre la partie régulière du DL_n de f', en ajoutant le terme $f(0)$. On obtient ainsi un DL_{n+1}.
- Il faut toujours indiquer le terme $f(0)$ quitte à le barrer si il est nul.

On sait que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$. Donc

$$\arctan(x) \underset{0}{=} \cancel{\arctan(0)} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

La règle est $\displaystyle\int_0^x \underset{t\to 0}{o}\left(t^n\right) dt = \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

Intégration d'un DL

- Pour calculer le DL_n d'une fonction dont on connaît la dérivée (et le DL_n de la dérivée), on intègre la partie régulière du DL_n de f', en ajoutant le terme $f(0)$. On obtient ainsi un DL_{n+1}.
- Il faut toujours indiquer le terme $f(0)$ quitte à le barrer si il est nul.

On sait que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$. Donc

$$\arctan(x) \underset{0}{=} \cancel{\arctan(0)} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

La règle est $\int_0^x \underset{t \to 0}{o}(t^n)\, dt = \underset{x \to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

Intégration d'un DL

- Pour calculer le DL_n d'une fonction dont on connaît la dérivée (et le DL_n de la dérivée), on intègre la partie régulière du DL_n de f', en ajoutant le terme $f(0)$. On obtient ainsi un DL_{n+1}.
- Il faut toujours indiquer le terme $f(0)$ quitte à le barrer si il est nul.

On sait que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$. Donc

$$\arctan(x) \underset{0}{=} \cancel{\arctan(0)} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

La règle est $\displaystyle\int_0^x \underset{t\to 0}{o}\left(t^n\right) dt = \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

Applications

limite en 0 de : $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$

- $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$
- Avec Taylor-Young, ou par quotient : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$
- $e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} \underset{0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$
- $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x} \underset{0}{\sim} -3$

Applications

limite en 0 de : $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$

- $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$
- Avec Taylor-Young, ou par quotient : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$
- $e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} \underset{0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$
- $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x} \underset{0}{\sim} -3$

Applications

limite en 0 de : $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$

- $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$
- Avec Taylor-Young, ou par quotient : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$
- $e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} \underset{0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$
- $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x} \underset{0}{\sim} -3$

Applications

limite en 0 de : $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$

- $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$
- Avec Taylor-Young, ou par quotient : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$
- $e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} \underset{0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$
- $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x} \underset{0}{\sim} -3$

Applications

limite en 0 de : $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$

- $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$
- Avec Taylor-Young, ou par quotient : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$
- $e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} \underset{0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$
- $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x} \underset{0}{\sim} -3$

Applications

limite en 0 de : $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$

- $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$
- Avec Taylor-Young, ou par quotient : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$
- $e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} \underset{0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$
- $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x} \underset{0}{\sim} -3$

Applications

limite en 0 de : $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$

- $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$
- Avec Taylor-Young, ou par quotient : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$
- $e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} \underset{0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$
- $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x} \underset{0}{\sim} -3$

Applications

limite en 0 de : $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$

- $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$
- Avec Taylor-Young, ou par quotient : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$
- $e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
- $e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} \underset{0}{=} -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$
- $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x} \underset{0}{\sim} -3$

$DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ (qui a priori n'est pas définie en 0).

- $\frac{x}{\ln(1+x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$
- $f(x)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$,
- ce prolongement est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, f admet pour tangente en 0 la droite : $\Delta : \; y = 1 + \frac{x}{2}$.
- De plus, f est en-dessous de cette tangente puisque le premier terme négligé est ici : $f(x) - (1 + \frac{x}{2}) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{12}$, qui est négatif.
- Attention : on ne peut rien dire pour les dérivées supérieures !

$DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ (qui a priori n'est pas définie en 0).

- $\frac{x}{\ln(1+x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$
- $f(x)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$,
- ce prolongement est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, f admet pour tangente en 0 la droite : $\Delta : \; y = 1 + \frac{x}{2}$.
- De plus, f est en-dessous de cette tangente puisque le premier terme négligé est ici : $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{12}$, qui est négatif.
- Attention : on ne peut rien dire pour les dérivées supérieures !

$DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ (qui a priori n'est pas définie en 0).

- $\frac{x}{\ln(1+x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$
- $f(x)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$,
- ce prolongement est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, f admet pour tangente en 0 la droite : $\Delta :\ y = 1 + \frac{x}{2}$.
- De plus, f est en-dessous de cette tangente puisque le premier terme négligé est ici : $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{12}$, qui est négatif.
- Attention : on ne peut rien dire pour les dérivées supérieures !

$DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ (qui a priori n'est pas définie en 0).

- $\frac{x}{\ln(1+x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$
- $f(x)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$,
- ce prolongement est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, f admet pour tangente en 0 la droite : $\Delta : \; y = 1 + \frac{x}{2}$.
- De plus, f est en-dessous de cette tangente puisque le premier terme négligé est ici : $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{12}$, qui est négatif.
- Attention : on ne peut rien dire pour les dérivées supérieures !

$DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ (qui a priori n'est pas définie en 0).

- $\frac{x}{\ln(1+x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$
- $f(x)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$,
- ce prolongement est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, f admet pour tangente en 0 la droite : $\Delta : \; y = 1 + \frac{x}{2}$.
- De plus, f est en-dessous de cette tangente puisque le premier terme négligé est ici : $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{12}$, qui est négatif.
- Attention : on ne peut rien dire pour les dérivées supérieures !

$DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ (qui a priori n'est pas définie en 0).

- $\frac{x}{\ln(1+x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$
- $f(x)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$,
- ce prolongement est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, f admet pour tangente en 0 la droite : $\Delta : \ y = 1 + \frac{x}{2}$.
- De plus, f est en-dessous de cette tangente puisque le premier terme négligé est ici : $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{12}$, qui est négatif.
- Attention : on ne peut rien dire pour les dérivées supérieures !

$DL_2(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ (qui a priori n'est pas définie en 0).

- $\frac{x}{\ln(1+x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$
- $f(x)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$,
- ce prolongement est dérivable en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, f admet pour tangente en 0 la droite : $\Delta : \ y = 1 + \frac{x}{2}$.
- De plus, f est en-dessous de cette tangente puisque le premier terme négligé est ici : $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{12}$, qui est négatif.
- Attention : on ne peut rien dire pour les dérivées supérieures !

Étude en 0 de $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{\frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$
- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{x}{6} + \left(\frac{7}{360}\right) x^3 + o(x^3)$
- la limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$,
- la dérivée du prolongement ainsi obtenu : $f'(0) = \frac{1}{6}$.
- la position par rapport à la tangente en 0 : $\Delta : y = \frac{x}{6}$: la courbe traverse sa tangente en 0.

Étude en 0 de $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{\frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$
- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{x}{6} + \left(\frac{7}{360}\right) x^3 + o(x^3)$
- la limite $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$,
- la dérivée du prolongement ainsi obtenu : $f'(0) = \frac{1}{6}$.
- la position par rapport à la tangente en 0 : $\Delta : y = \frac{x}{6}$: la courbe traverse sa tangente en 0.

Étude en 0 de $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

- $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \underset{0}{=} \dfrac{\frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$
- $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \underset{0}{=} \dfrac{x}{6} + \left(\dfrac{7}{360}\right) x^3 + o(x^3)$
- la limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$,
- la dérivée du prolongement ainsi obtenu : $f'(0) = \frac{1}{6}$.
- la position par rapport à la tangente en 0 : $\Delta : y = \frac{x}{6}$: la courbe traverse sa tangente en 0.

Étude en 0 de $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{\frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$
- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{x}{6} + \left(\frac{7}{360}\right) x^3 + o(x^3)$
- la limite $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$,
- la dérivée du prolongement ainsi obtenu : $f'(0) = \frac{1}{6}$.
- la position par rapport à la tangente en 0 : $\Delta : y = \frac{x}{6}$: la courbe traverse sa tangente en 0.

Étude en 0 de $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{\frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$
- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{x}{6} + \left(\frac{7}{360}\right) x^3 + o(x^3)$
- la limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$,
- la dérivée du prolongement ainsi obtenu : $f'(0) = \frac{1}{6}$.
- la position par rapport à la tangente en 0 : $\Delta : y = \frac{x}{6}$: la courbe traverse sa tangente en 0.

Étude en 0 de $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{\frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$
- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{x}{6} + \left(\frac{7}{360}\right) x^3 + o(x^3)$
- la limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$,
- la dérivée du prolongement ainsi obtenu : $f'(0) = \frac{1}{6}$.
- la position par rapport à la tangente en 0 : $\Delta : y = \frac{x}{6}$: la courbe traverse sa tangente en 0.

Étude en 0 de $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{\frac{x}{6} - \frac{x^3}{120} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$
- $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{x}{6} + \left(\frac{7}{360}\right) x^3 + o(x^3)$
- la limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$,
- la dérivée du prolongement ainsi obtenu : $f'(0) = \frac{1}{6}$.
- la position par rapport à la tangente en 0 : $\Delta : y = \frac{x}{6}$: la courbe traverse sa tangente en 0.

Étude en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

- On pose $t = \frac{1}{x}$, ou $x = \frac{1}{t}$,
- $f(x) = \frac{1}{|t|}\left(\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}\right)$
- $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$,
- la fonction f tends vers 0 en étant positive,
- à la même vitesse que $\frac{1}{x}$.

Étude en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

- On pose $t = \frac{1}{x}$, ou $x = \frac{1}{t}$,
- $f(x) = \frac{1}{|t|}\left(\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}\right)$
- $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$,
- la fonction f tends vers 0 en étant positive,
- à la même vitesse que $\frac{1}{x}$.

Étude en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

- On pose $t = \frac{1}{x}$, ou $x = \frac{1}{t}$,
- $f(x) = \frac{1}{|t|}\left(\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}\right)$
- $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$,
- la fonction f tends vers 0 en étant positive,
- à la même vitesse que $\frac{1}{x}$.

Étude en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

- On pose $t = \frac{1}{x}$, ou $x = \frac{1}{t}$,
- $f(x) = \frac{1}{|t|}\left(\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}\right)$
- $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$,
- la fonction f tends vers 0 en étant positive,
- à la même vitesse que $\frac{1}{x}$.

Étude en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

- On pose $t = \frac{1}{x}$, ou $x = \frac{1}{t}$,
- $f(x) = \frac{1}{|t|}\left(\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}\right)$
- $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$,
- la fonction f tends vers 0 en étant positive,
- à la même vitesse que $\frac{1}{x}$.

Étude en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

- On pose $t = \frac{1}{x}$, ou $x = \frac{1}{t}$,
- $f(x) = \frac{1}{|t|}\left(\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}\right)$
- $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$,
- la fonction f tends vers 0 en étant positive,
- à la même vitesse que $\frac{1}{x}$.

Étude en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

- On pose $t = \frac{1}{x}$, ou $x = \frac{1}{t}$,
- $f(x) = \frac{1}{|t|}\left(\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2}\right)$
- $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$,
- la fonction f tends vers 0 en étant positive,
- à la même vitesse que $\frac{1}{x}$.

La formule de Taylor avec reste intégrale

- La formule de Taylor avec reste intégrale exprime la différence entre la fonction et l'approximation de cette fonction par le polynôme de Taylor en un point x donné et à un ordre n donné.

Soit I un intervalle réel et $a \in I$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

La formule de Taylor avec reste intégrale

- La formule de Taylor avec reste intégrale exprime la différence entre la fonction et l'approximation de cette fonction par le polynôme de Taylor en un point x donné et à un ordre n donné.

Soit I un intervalle réel et $a \in I$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

La formule de Taylor avec reste intégrale

- La formule de Taylor avec reste intégrale exprime la différence entre la fonction et l'approximation de cette fonction par le polynôme de Taylor en un point x donné et à un ordre n donné.

Soit I un intervalle réel et $a \in I$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

- La formule de Taylor avec reste intégrale exprime la différence entre la fonction et l'approximation de cette fonction par le polynôme de Taylor en un point x donné et à un ordre n donné.

Soit I un intervalle réel et $a \in I$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

La formule de Taylor avec reste intégrale

$$\forall x \in I,\ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{polynôme de Taylor}} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{reste}}$$

- La formule « contient » ses hypothèses : f doit être $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$.
- Le reste dépends de n et de x. Beaucoup de résultats s'obtiennent en majorant cet écart.
- Si on fixe n et on fait tendre x vers 0, on obtient Taylor-Young ! (ie l'égalité asymptotique entre f et son polynôme de Taylor lorsque $x \to 0$).
- Si on fixe x et on fait tendre n vers l'infini en démontrant que le reste tends vers 0, on obtient un développement en série entière de f.

La formule de Taylor avec reste intégrale

$$\forall x \in I,\ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{polynôme de Taylor}} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{reste}}$$

- La formule « contient » ses hypothèses : f doit être $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$.
- Le reste dépends de n et de x. Beaucoup de résultats s'obtiennent en majorant cet écart.
- Si on fixe n et on fait tendre x vers 0, on obtient Taylor-Young ! (ie l'égalité asymptotique entre f et son polynôme de Taylor lorsque $x \to 0$).
- Si on fixe x et on fait tendre n vers l'infini en démontrant que le reste tends vers 0, on obtient un développement en série entière de f.

La formule de Taylor avec reste intégrale

$$\forall x \in I,\ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{polynôme de Taylor}} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{reste}}$$

- La formule « contient » ses hypothèses : f doit être $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$.
- Le reste dépends de n et de x. Beaucoup de résultats s'obtiennent en majorant cet écart.
- Si on fixe n et on fait tendre x vers 0, on obtient Taylor-Young ! (ie l'égalité asymptotique entre f et son polynôme de Taylor lorsque $x \to 0$).
- Si on fixe x et on fait tendre n vers l'infini en démontrant que le reste tends vers 0, on obtient un développement en série entière de f.

La formule de Taylor avec reste intégrale

$$\forall x \in I,\ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{polynôme de Taylor}} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{reste}}$$

- La formule « contient » ses hypothèses : f doit être $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$.
- Le reste dépends de n et de x. Beaucoup de résultats s'obtiennent en majorant cet écart.
- Si on fixe n et on fait tendre x vers 0, on obtient Taylor-Young ! (ie l'égalité asymptotique entre f et son polynôme de Taylor lorsque $x \to 0$).
- Si on fixe x et on fait tendre n vers l'infini en démontrant que le reste tends vers 0, on obtient un développement en série entière de f.

La formule de Taylor avec reste intégrale

$$\forall x \in I,\ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{polynôme de Taylor}} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{reste}}$$

- La formule « contient » ses hypothèses : f doit être $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$.
- Le reste dépends de n et de x. Beaucoup de résultats s'obtiennent en majorant cet écart.
- Si on fixe n et on fait tendre x vers 0, on obtient Taylor-Young ! (ie l'égalité asymptotique entre f et son polynôme de Taylor lorsque $x \to 0$).
- Si on fixe x et on fait tendre n vers l'infini en démontrant que le reste tends vers 0, on obtient un développement en série entière de f.

Retrouver la formule de Taylor avec reste intégrale

- Plutôt que de l'apprendre par coeur, on la retrouve rapidement.
- $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt$
- La seule astuce à retenir : intégrer le 1 en $x-t$ pour éviter le $-$ de l'intégration par parties.
- On intègre $\frac{(x-t)^k}{k!}$ en $-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Retrouver la formule de Taylor avec reste intégrale

- Plutôt que de l'apprendre par coeur, on la retrouve rapidement.
- $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt$
- La seule astuce à retenir : intégrer le 1 en $x-t$ pour éviter le $-$ de l'intégration par parties.
- On intègre $\frac{(x-t)^k}{k!}$ en $-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Retrouver la formule de Taylor avec reste intégrale

- Plutôt que de l'apprendre par coeur, on la retrouve rapidement.
- $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt$
- La seule astuce à retenir : intégrer le 1 en $x-t$ pour éviter le $-$ de l'intégration par parties.
- On intègre $\frac{(x-t)^k}{k!}$ en $-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Retrouver la formule de Taylor avec reste intégrale

- Plutôt que de l'apprendre par coeur, on la retrouve rapidement.
- $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt$
- La seule astuce à retenir : intégrer le 1 en $x-t$ pour éviter le $-$ de l'intégration par parties.
- On intègre $\frac{(x-t)^k}{k!}$ en $-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Retrouver la formule de Taylor avec reste intégrale

- Plutôt que de l'apprendre par coeur, on la retrouve rapidement.
- $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt$
- La seule astuce à retenir : intégrer le 1 en $x-t$ pour éviter le $-$ de l'intégration par parties.
- On intègre $\frac{(x-t)^k}{k!}$ en $-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Retrouver la formule de Taylor avec reste intégrale

- Plutôt que de l'apprendre par coeur, on la retrouve rapidement.
- $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt$
- La seule astuce à retenir : intégrer le 1 en $x - t$ pour éviter le $-$ de l'intégration par parties.
- On intègre $\frac{(x-t)^k}{k!}$ en $-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Retrouver la formule de Taylor avec reste intégrale

- Plutôt que de l'apprendre par coeur, on la retrouve rapidement.
- $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt$
- $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt$
- La seule astuce à retenir : intégrer le 1 en $x - t$ pour éviter le $-$ de l'intégration par parties.
- On intègre $\frac{(x-t)^k}{k!}$ en $-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Retrouver la formule de Taylor avec reste intégrale

On intègre $\frac{(x-t)^k}{k!}$ en $-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

$$= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Retrouver la formule de Taylor avec reste intégrale

On intègre $\frac{(x-t)^k}{k!}$ en $-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$
$$= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$
$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Applications

- Toutes les applications tournent autour de la même idée : estimer le reste (majoration / signe),
- Éventuellement en faisant tendre x vers a ou n vers $+\infty$.

- Comparer

$$\cos(x) \quad \text{et} \quad 1-\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

Applications

- Toutes les applications tournent autour de la même idée : estimer le reste (majoration / signe),
- Éventuellement en faisant tendre x vers a ou n vers $+\infty$.

- Comparer

$$\cos(x) \quad \text{et} \quad 1-\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

Applications

- Toutes les applications tournent autour de la même idée : estimer le reste (majoration / signe),
- Éventuellement en faisant tendre x vers a ou n vers $+\infty$.

- Comparer

$$\cos(x) \quad \text{et} \quad 1-\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

Applications

- Toutes les applications tournent autour de la même idée : estimer le reste (majoration / signe),
- Éventuellement en faisant tendre x vers a ou n vers $+\infty$.

- Comparer
$$\cos(x) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Applications

- Toutes les applications tournent autour de la même idée : estimer le reste (majoration / signe),
- Éventuellement en faisant tendre x vers a ou n vers $+\infty$.

- Comparer

$$\cos(x) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \sin(t) dt$$

On estime ensuite le signe du reste.

Applications

- Taylor-Young, DSE de certaines fonctions (exponentielle, cosinus, sinus).
- Formule de Taylor-Lagrange (hors programme) pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}$

$$\exists c \in [0,x],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

- On doit montrer :

$$\exists c \in [0,x],\ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = f^{(n+1)}(c) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

- On utilise le théorème des fonctions continues sur le segment sur $[0,x]$ puis des valeur intermédiaires.

Applications

- Taylor-Young, DSE de certaines fonctions (exponentielle, cosinus, sinus).
- Formule de Taylor-Lagrange (hors programme) pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}$

$$\exists c \in [0, x],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

- On doit montrer :

$$\exists c \in [0, x],\ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = f^{(n+1)}(c) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

- On utilise le théorème des fonctions continues sur le segment sur $[0, x]$ puis des valeur intermédiaires.

Applications

- Taylor-Young, DSE de certaines fonctions (exponentielle, cosinus, sinus).
- Formule de Taylor-Lagrange (hors programme) pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}$

$$\exists c \in [0, x],\ \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

- On doit montrer :

$$\exists c \in [0, x],\ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = f^{(n+1)}(c) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

- On utilise le théorème des fonctions continues sur le segment sur $[0, x]$ puis des valeur intermédiaires.

Applications

- Taylor-Young, DSE de certaines fonctions (exponentielle, cosinus, sinus).
- Formule de Taylor-Lagrange (hors programme) pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}$

$$\exists c \in [0, x],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

- On doit montrer :

$$\exists c \in [0, x],\ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = f^{(n+1)}(c) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

- On utilise le théorème des fonctions continues sur le segment sur $[0, x]$ puis des valeur intermédiaires.

Applications

- Taylor-Young, DSE de certaines fonctions (exponentielle, cosinus, sinus).
- Formule de Taylor-Lagrange (hors programme) pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}$

$$\exists c \in [0, x],\ \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

- On doit montrer :

$$\exists c \in [0, x],\ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = f^{(n+1)}(c) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

- On utilise le théorème des fonctions continues sur le segment sur $[0, x]$ puis des valeur intermédiaires.

Applications

- Taylor-Young, DSE de certaines fonctions (exponentielle, cosinus, sinus).
- Formule de Taylor-Lagrange (hors programme) pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}$

$$\exists c \in [0, x],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

- On doit montrer :

$$\exists c \in [0, x],\ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = f^{(n+1)}(c) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

- On utilise le théorème des fonctions continues sur le segment sur $[0, x]$ puis des valeur intermédiaires.

Taylor et calculs numériques

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \underset{h\to 0}{O}(h^5)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \underset{h\to 0}{O}(h^5)$$

- On retrouve les estimations :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \underset{h\to 0}{O}(h) \\ &= \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \underset{h\to 0}{O}(h) \\ f''(x) &= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + \underset{h\to 0}{O}(h^2) \end{aligned}$$
- Méthode d'Euler (explicite / implicite). Peut aussi être utilisé pour les équations aux dérivées partielles.

Taylor et calculs numériques

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \underset{h\to 0}{O}(h^5)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \underset{h\to 0}{O}(h^5)$$

- On retrouve les estimations :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \underset{h\to 0}{O}(h) \\ &= \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \underset{h\to 0}{O}(h) \\ f''(x) &= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + \underset{h\to 0}{O}(h^2) \end{aligned}$$
- Méthode d'Euler (explicite / implicite). Peut aussi être utilisé pour les équations aux dérivées partielles.

Les accroissements finis

Soit $a < b$, et une fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[, \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

c'est-à-dire : $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$.

- $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$: la vitesse instantanée en c est égale à la vitesse moyenne sur $[a, b]$
- $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$: on exprime la distance entre les images des points a et b i.e. $f(b) - f(a)$ en fonction de la distance entre ces points.
- $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$: on compare la valeur de $f(b)$ est celle d'une estimation par une fonction affine $x \mapsto f(a) + (x - a)f'(c)$.

Les accroissements finis

Soit $a < b$, et une fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[, \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

c'est-à-dire : $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$.

- $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$: la vitesse instantanée en c est égale à la vitesse moyenne sur $[a, b]$
- $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$: on exprime la distance entre les images des points a et b `i.e.` $f(b) - f(a)$ en fonction de la distance entre ces points.
- $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$: on compare la valeur de $f(b)$ est celle d'une estimation par une fonction affine $x \mapsto f(a) + (x - a)f'(c)$.

Les accroissements finis

Soit $a < b$, et une fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[, \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

c'est-à-dire : $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$.

- $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$: la vitesse instantanée en c est égale à la vitesse moyenne sur $[a, b]$
- $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$: on exprime la distance entre les images des points a et b `i.e.` $f(b) - f(a)$ en fonction de la distance entre ces points.
- $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$: on compare la valeur de $f(b)$ est celle d'une estimation par une fonction affine $x \mapsto f(a) + (x - a)f'(c)$.

Les accroissements finis

Soit $a < b$, et une fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[, \; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

c'est-à-dire : $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$.

- $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$: la vitesse instantanée en c est égale à la vitesse moyenne sur $[a, b]$
- $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$: on exprime la distance entre les images des points a et b `i.e.` $f(b) - f(a)$ en fonction de la distance entre ces points.
- $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$: on compare la valeur de $f(b)$ est celle d'une estimation par une fonction affine $x \mapsto f(a) + (x - a)f'(c)$.

Soit $a < b$, et une fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[, \; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

c'est-à-dire : $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$.

- $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$: la vitesse instantanée en c est égale à la vitesse moyenne sur $[a, b]$
- $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$: on exprime la distance entre les images des points a et b `i.e.` $f(b) - f(a)$ en fonction de la distance entre ces points.
- $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$: on compare la valeur de $f(b)$ est celle d'une estimation par une fonction affine $x \mapsto f(a) + (x - a)f'(c)$.

Conséquences des accroissements finis

- $\exists c \in]x, y[,\ f(x) - f(y) = f'(c)(x - y),$
- cela donne : $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$
- si $|f'|$ est bornée par M sur I , alors $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.
- On dit que f est M-lipschitzienne sur I.

- Utile pour étudier la suite $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exists c_n \in]u_n, u_{n-1}[\text{ ou }]u_{n-1}, u_n[,$$
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) = f'(c_n)(u_n - u_{n-1})$$
$$\exists c_n \in]u_n, l[\text{ ou }]l, u_n[,$$
$$u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l) = f'(c_n)(u_n - l)$$

Conséquences des accroissements finis

- $\exists c \in]x, y[,\ f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$,
- cela donne : $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$
- si $|f'|$ est bornée par M sur I , alors $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.
- On dit que f est M-lipschitzienne sur I.

- Utile pour étudier la suite $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exists c_n \in]u_n, u_{n-1}[\text{ ou }]u_{n-1}, u_n[,$$
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) = f'(c_n)(u_n - u_{n-1})$$
$$\exists c_n \in]u_n, l[\text{ ou }]l, u_n[,$$
$$u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l) = f'(c_n)(u_n - l)$$

Conséquences des accroissements finis

- $\exists c \in]x, y[,\ f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$,
- cela donne : $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$
- si $|f'|$ est bornée par M sur I , alors $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.
- On dit que f est M-lipschitzienne sur I.

- Utile pour étudier la suite $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exists c_n \in]u_n, u_{n-1}[\text{ ou }]u_{n-1}, u_n[,$$
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) = f'(c_n)(u_n - u_{n-1})$$
$$\exists c_n \in]u_n, l[\text{ ou }]l, u_n[,$$
$$u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l) = f'(c_n)(u_n - l)$$

Conséquences des accroissements finis

- $\exists c \in]x, y[,\ f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$,
- cela donne : $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$
- si $|f'|$ est bornée par M sur I , alors $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.
- On dit que f est M-lipschitzienne sur I.

- Utile pour étudier la suite $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exists c_n \in]u_n, u_{n-1}[\text{ ou }]u_{n-1}, u_n[,$$
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) = f'(c_n)(u_n - u_{n-1})$$
$$\exists c_n \in]u_n, l[\text{ ou }]l, u_n[,$$
$$u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l) = f'(c_n)(u_n - l)$$

Conséquences des accroissements finis

- $\exists c \in]x, y[, \; f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$,
- cela donne : $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$
- si $|f'|$ est bornée par M sur I , alors $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.
- On dit que f est M-lipschitzienne sur I.

- Utile pour étudier la suite $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exists c_n \in]u_n, u_{n-1}[\text{ ou }]u_{n-1}, u_n[,$$
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) = f'(c_n)(u_n - u_{n-1})$$
$$\exists c_n \in]u_n, l[\text{ ou }]l, u_n[,$$
$$u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l) = f'(c_n)(u_n - l)$$

Théorème de la limite de la dérivée

Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus a$.
On suppose que l'application dérivée f' admet une limite L (finie ou non) en a. Alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

ainsi, le taux d'accroissement en a tends aussi vers L

- Particulièrement utile dans le cas d'une fonction qui est prolongée par continuité en a : on est assuré de la continuité et on montre la dérivabilité par la limite de l'application dérivée
- C'est en particulier le cas pour l'étude du problème de recollement de solutions d'équations différentielles.

Théorème de la limite de la dérivée

Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus a$.
On suppose que l'application dérivée f' admet une limite L (finie ou non) en a. Alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

ainsi, le taux d'accroissement en a tends aussi vers L

- Particulièrement utile dans le cas d'une fonction qui est prolongée par continuité en a : on est assuré de la continuité et on montre la dérivabilité par la limite de l'application dérivée (plutôt que la limite du taux d'accroissement).
- C'est en particulier le cas pour l'étude du problème de recollement de solutions d'équations différentielles.

Théorème de la limite de la dérivée

Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus a$.
On suppose que l'application dérivée f' admet une limite L (finie ou non) en a. Alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

ainsi, le taux d'accroissement en a tends aussi vers L

- Particulièrement utile dans le cas d'une fonction qui est prolongée par continuité en a : on est assuré de la continuité et on montre la dérivabilité par la limite de l'application dérivée (plutôt que la limite du taux d'accroissement).
- C'est en particulier le cas pour l'étude du problème de recollement de solutions d'équations différentielles.

Soit f définie et continue sur un intervalle I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus a$. on suppose que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \text{ est un réel}$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = l$.

Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus a$. on suppose que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$

Alors f n'est pas dérivable en a et on a deux demi-tangentes verticales.

Exemple d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.
- Montrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $g^{(n)}(0) = 0$
- Démontrer que g n'est pas développable en série entière.

Exemple d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.
- Montrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $g^{(n)}(0) = 0$
- Démontrer que g n'est pas développable en série entière.

Exemple d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.

  Par récurrence :

  $$\mathcal{P}(n) : \text{"}\exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}\text{"}$$

  Initialisation en posant $P_0 = 1$.
  Hérédité en posant $P_{n+1} = -X^2 P_n' + 2X^3 P_n$.
- Montrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $g^{(n)}(0) = 0$
- Démontrer que g n'est pas développable en série entière.

Exemple d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.
- Montrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $g^{(n)}(0) = 0$
- Démontrer que g n'est pas développable en série entière.

Exemple d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.
- Montrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $g^{(n)}(0) = 0$

  On prolonge en posant $f(0)$.

  Par récurrence : $\mathcal{P}(n)$: "$g \in \mathcal{C}^n$ avec $g^{(n)}(0) = 0$".

  Vrai pour $n = 0$ (continuité).

  Supposons que cela soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. $g^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et continue en 0.

  $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

  ainsi, le taux d'accroissement tends aussi vers 0,

  et donc la fonction $g^{(n)}$ est dérivable en 0, avec $g^{(n+1)}(0) = 0$. On en déduit l'hérédité.
- Démontrer que g n'est pas développable en série entière

Exemple d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.
- Montrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $g^{(n)}(0) = 0$
- Démontrer que g n'est pas développable en série entière.

Exemple d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.
- Montrer que f admet un prolongement g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $g^{(n)}(0) = 0$
- Démontrer que g n'est pas développable en série entière. Si g est DSE sur $]-R, R[$, alors :

$$\forall x \in]-R, R],\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)x^n}{n!} = 0$$

or g ne s'annule pas sur $[-R, R]$.