Déterminants

Méthodes de calcul de déterminants et de polynômes caractéristiques

Sylvain Pelletier

PSI - LMSC

Théorème fondamental

- Il existe une unique application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ prenant en entrée une matrice carrée et calculant un scalaire vérifiant :
- det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
- det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable.
  lorsqu'on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.
- Le déterminant de l'identité est 1, ie $\det(I_n) = 1$.

Théorème fondamental

- Il existe une unique application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ prenant en entrée une matrice carrée et calculant un scalaire vérifiant :
- det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
- det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable.
  lorsqu'on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.
- Le déterminant de l'identité est 1, ie $\det(I_n) = 1$.

Théorème fondamental

- Il existe une unique application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ prenant en entrée une matrice carrée et calculant un scalaire vérifiant :
- det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
- det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable.
  lorsqu'on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.
- Le déterminant de l'identité est 1, ie $\det(I_n) = 1$.

Théorème fondamental

- Il existe une unique application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ prenant en entrée une matrice carrée et calculant un scalaire vérifiant :
- det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ C_1 & C_{i-1} & C_i + D_i & C_{i+1} & C_n \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ C_1 & C_{i-1} & C_i & C_{i+1} & C_n \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ C_1 & C_{i-1} & D_i & C_{i+1} & C_n \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

- det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable. lorsqu'on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.
- Le déterminant de l'identité est 1, ie $\det(I_n) = 1$.

Théorème fondamental

- Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ prenant en entrée une matrice carrée et calculant un scalaire vérifiant :
- det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.

$$\det \begin{pmatrix} | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \\ C_1 & & C_{i-1} & \alpha C_i & C_{i+1} & & C_n \\ | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \quad \alpha \det \begin{pmatrix} | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \\ C_1 & & C_{i-1} & C_i & C_{i+1} & & C_n \\ | & & | & | & | & & | \\ | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

- det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable.
  lorsqu'on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.
- Le déterminant de l'identité est 1, ie $\det(I_n) = 1$.

Théorème fondamental

- Il existe une unique application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ prenant en entrée une matrice carrée et calculant un scalaire vérifiant :
- det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
- det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable. lorsqu'on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.
- Le déterminant de l'identité est 1, ie $\det(I_n) = 1$.

Théorème fondamental

- Il existe une unique application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ prenant en entrée une matrice carrée et calculant un scalaire vérifiant :
- det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
- det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ \det \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ C_1 & C_i & C_j & C_n \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ C_1 & C_j & C_i & C_n \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

lorsqu'on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.

- Le déterminant de l'identité est 1, ie $\det(I_n) = 1$.

Théorème fondamental

- Il existe une unique application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ prenant en entrée une matrice carrée et calculant un scalaire vérifiant :
- det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
- det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable. lorsqu'on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.
- Le déterminant de l'identité est 1, ie $\det(I_n) = 1$.

Théorème fondamental

- Il existe une unique application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ prenant en entrée une matrice carrée et calculant un scalaire vérifiant :
- det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
- det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable. lorsqu'on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.
- Le déterminant de l'identité est 1, ie $\det(I_n) = 1$.

Propriétés fondamentales

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Les valeurs propres sont les racines de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
- On définit le déterminant d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ $=$ le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- La valeur du déterminant dépends de la base, mais pas sa nullité : la famille $\mathcal{F}$ est un base si et seulement si $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$ est non nul.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. On définit donc le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme $\det(u) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)$ et cela ne dépends pas de $\mathcal{B}$.
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left({}^tA\right) = \det\left(A\right)$, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et les colonnes !

Propriétés fondamentales

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Les valeurs propres sont les racines de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
- On définit le déterminant d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ $=$ le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- La valeur du déterminant dépends de la base, mais pas sa nullité : la famille $\mathcal{F}$ est un base si et seulement si $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$ est non nul.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. On définit donc le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme $\det(u) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)$ et cela ne dépends pas de $\mathcal{B}$.
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et les colonnes !

Propriétés fondamentales

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Les valeurs propres sont les racines de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
- On définit le déterminant d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ $=$ le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- La valeur du déterminant dépends de la base, mais pas sa nullité : la famille $\mathcal{F}$ est un base si et seulement si $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$ est non nul.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. On définit donc le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme $\det(u) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)$ et cela ne dépends pas de $\mathcal{B}$.
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et les colonnes !

Propriétés fondamentales

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Les valeurs propres sont les racines de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
- On définit le déterminant d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ $=$ le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- La valeur du déterminant dépends de la base, mais pas sa nullité : la famille $\mathcal{F}$ est un base si et seulement si $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$ est non nul.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. On définit donc le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme $\det(u) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)$ et cela ne dépends pas de $\mathcal{B}$.
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left({}^tA\right) = \det\left(A\right)$, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et les colonnes !

Propriétés fondamentales

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Les valeurs propres sont les racines de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
- On définit le déterminant d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ $=$ le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- La valeur du déterminant dépends de la base, mais pas sa nullité : la famille $\mathcal{F}$ est un base si et seulement si $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$ est non nul.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. On définit donc le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme $\det(u) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)$ et cela ne dépends pas de $\mathcal{B}$.
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left({}^tA\right) = \det\left(A\right)$, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et les colonnes !

Propriétés fondamentales

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Les valeurs propres sont les racines de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
- On définit le déterminant d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ = le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- La valeur du déterminant dépends de la base, mais pas sa nullité : la famille $\mathcal{F}$ est un base si et seulement si $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$ est non nul.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. car l'application $B \longmapsto \frac{1}{\det(A)}\det(AB)$ vérifie les mêmes propriétés que le déterminant.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. On définit donc le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme $\det(u) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)$ et cela ne dépends pas de $\mathcal{B}$.
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et les colonnes !

Propriétés fondamentales

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Les valeurs propres sont les racines de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
- On définit le déterminant d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ = le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- La valeur du déterminant dépends de la base, mais pas sa nullité : la famille $\mathcal{F}$ est un base si et seulement si $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$ est non nul.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. On définit donc le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme $\det(u) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)$ et cela ne dépends pas de $\mathcal{B}$.
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et les colonnes !

Propriétés fondamentales

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Les valeurs propres sont les racines de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
- On définit le déterminant d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ $=$ le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- La valeur du déterminant dépends de la base, mais pas sa nullité : la famille $\mathcal{F}$ est un base si et seulement si $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$ est non nul.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. On définit donc le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme $\det(u) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)$ et cela ne dépends pas de $\mathcal{B}$.
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et les colonnes !

Propriétés fondamentales

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Les valeurs propres sont les racines de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
- On définit le déterminant d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ $=$ le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- La valeur du déterminant dépends de la base, mais pas sa nullité : la famille $\mathcal{F}$ est un base si et seulement si $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$ est non nul.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. On définit donc le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme $\det(u) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)$ et cela ne dépends pas de $\mathcal{B}$.
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et les colonnes !

Propriétés fondamentales

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Les valeurs propres sont les racines de $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
- On définit le déterminant d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ $=$ le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- La valeur du déterminant dépends de la base, mais pas sa nullité : la famille $\mathcal{F}$ est un base si et seulement si $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$ est non nul.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. On définit donc le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme $\det(u) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)$ et cela ne dépends pas de $\mathcal{B}$.
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$, le déterminant vérifie les mêmes propriétés pour les lignes et les colonnes !

Cas de la dimension 2

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $det(M) = ad - bc$.

- Si M est inversible, alors
$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
- Considérons un parallélogramme du plan (A, B, C, D), alors on a : $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est l'aire algébrique du parallélogramme $ABCD$

Cas de la dimension 2

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $det(M) = ad - bc$.

- Si M est inversible, alors
$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
- Considérons un parallélogramme du plan (A, B, C, D), alors on a : $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est l'aire algébrique du parallélogramme $ABCD$

Cas de la dimension 2

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $det(M) = ad - bc$.

- Si M est inversible, alors
$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
- Considérons un parallélogramme du plan (A, B, C, D), alors on a :
$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est l'aire algébrique du parallélogramme $ABCD$

Cas de la dimension 2

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $det(M) = ad - bc$.

- Si M est inversible, alors
$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
- Considérons un parallélogramme du plan (A, B, C, D), alors on a :
  $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est l'aire algébrique du parallélogramme $ABCD$

Déterminant d'ordre 3, règle de Sarus

On a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

- Cette règle (dite règle de Sarus) ne se généralise pas aux déterminants de taille supérieure.
- C'est souvent plus simple d'utiliser les techniques de réduction des déterminants pour obtenir une forme factorisée.
- C'est en fait le volume d'un parallélépipède défini par les trois vecteurs

Déterminant d'ordre 3, règle de Sarus

On a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

- Cette règle (dite règle de Sarus) ne se généralise pas aux déterminants de taille supérieure.
- C'est souvent plus simple d'utiliser les techniques de réduction des déterminants pour obtenir une forme factorisée.
- C'est en fait le volume d'un parallélépipède défini par les trois vecteurs

Déterminant d'ordre 3, règle de Sarus

On a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

- Cette règle (dite règle de Sarus) ne se généralise pas aux déterminants de taille supérieure.
- C'est souvent plus simple d'utiliser les techniques de réduction des déterminants pour obtenir une forme factorisée.
- C'est en fait le volume d'un parallélépipède défini par les trois vecteurs

Conséquences du théorème fondamental

- Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes égales, alors $\det(M) = 0$.
  Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne de 0, alors $\det(M) = 0$.
- $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.

- L'opération élémentaire de transposition (inverser deux colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 :
  $$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$
- L'opération élémentaire de dilatation (faire $C_i \leftarrow \beta C_i$) multiplie le déterminant par β :
  $$\det(C_1, \dots, \beta C_i, \dots, C_n) = \beta \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$
- L'opération de transvection (faire $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) ne change pas le déterminant.
  $$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i + \alpha C_j, \dots, C_n)$$
- Ces opérations conservent le rang mais ne conservent pas le déterminant.

Conséquences du théorème fondamental

- Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes égales, alors $\det(M) = 0$.
  Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne de 0, alors $\det(M) = 0$.
- $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.

- L'opération élémentaire de transposition (inverser deux colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 :
  $$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$
- L'opération élémentaire de dilatation (faire $C_i \leftarrow \beta C_i$) multiplie le déterminant par β :
  $$\det(C_1, \dots, \beta C_i, \dots, C_n) = \beta \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$
- L'opération de transvection (faire $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) ne change pas le déterminant.
  $$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i + \alpha C_j, \dots, C_n)$$
- Ces opérations conservent le rang mais ne conservent pas le déterminant.

Conséquences du théorème fondamental

- Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes égales, alors $\det(M) = 0$.
  Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne de 0, alors $\det(M) = 0$.
- $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.

- L'opération élémentaire de transposition (inverser deux colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 :
  $$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$
- L'opération élémentaire de dilatation (faire $C_i \leftarrow \beta C_i$) multiplie le déterminant par β :
  $$\det(C_1, \dots, \beta C_i, \dots, C_n) = \beta \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$
- L'opération de transvection (faire $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) ne change pas le déterminant.
  $$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i + \alpha C_j, \dots, C_n)$$
- Ces opérations conservent le rang mais ne conservent pas le déterminant.

Conséquences du théorème fondamental

- Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes égales, alors $\det(M) = 0$.
  Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne de 0, alors $\det(M) = 0$.
- $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.

- L'opération élémentaire de transposition (inverser deux colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 :
  $$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$$
- L'opération élémentaire de dilatation (faire $C_i \leftarrow \beta C_i$) multiplie le déterminant par β :
  $$\det(C_1, \ldots, \beta C_i, \ldots, C_n) = \beta \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$$
- L'opération de transvection (faire $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) ne change pas le déterminant.
  $$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_i + \alpha C_j, \ldots, C_n)$$
- Ces opérations conservent le rang mais ne conservent pas le déterminant.

Conséquences du théorème fondamental

- Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes égales, alors $\det(M) = 0$.
  Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne de 0, alors $\det(M) = 0$.
- $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.

- L'opération élémentaire de transposition (inverser deux colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 :
  $$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$
- L'opération élémentaire de dilatation (faire $C_i \leftarrow \beta C_i$) multiplie le déterminant par β :
  $$\det(C_1, \dots, \beta C_i, \dots, C_n) = \beta \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$
- L'opération de transvection (faire $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) ne change pas le déterminant.
  $$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i + \alpha C_j, \dots, C_n)$$
- Ces opérations conservent le rang mais ne conservent pas le déterminant.

Conséquences du théorème fondamental

- Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes égales, alors $\det(M) = 0$.
  Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne de 0, alors $\det(M) = 0$.
- $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.

- L'opération élémentaire de transposition (inverser deux colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 :
  $$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$
- L'opération élémentaire de dilatation (faire $C_i \leftarrow \beta C_i$) multiplie le déterminant par β :
  $$\det(C_1, \dots, \beta C_i, \dots, C_n) = \beta \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$
- L'opération de transvection (faire $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) ne change pas le déterminant.
  $$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i + \alpha C_j, \dots, C_n)$$
- Ces opérations conservent le rang mais ne conservent pas le déterminant.

Conséquences du théorème fondamental

- Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes égales, alors $\det(M) = 0$.
  Si la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne de 0, alors $\det(M) = 0$.
- $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.

- L'opération élémentaire de transposition (inverser deux colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 :
  $$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$$
- L'opération élémentaire de dilatation (faire $C_i \leftarrow \beta C_i$) multiplie le déterminant par β :
  $$\det(C_1, \ldots, \beta C_i, \ldots, C_n) = \beta \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$$
- L'opération de transvection (faire $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) ne change pas le déterminant.
  $$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_i + \alpha C_j, \ldots, C_n)$$
- Ces opérations conservent le rang mais ne conservent pas le déterminant.

Conséquences du théorème fondamental

- On a : $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$

- On peut donc calculer le déterminant en utilisant des opérations élémentaires inversibles sur les lignes et sur les colonnes.
  - l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ mutliplie le déterminant par -1,
  - l'opération $L_i \leftarrow \beta L_i$ mutliplie le déterminant par β,
  - l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant.
- Ces opérations conservent le rang et le noyau mais ne conservent pas le déterminant.

- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments diagonaux.
- On peut calculer le déterminant en utilisant la réduction de Gauss : on réduit la matrice en une matrice triangulaire supérieure (par des opérations sur les lignes ou les colonnes).

Conséquences du théorème fondamental

- On a : $\det({}^{t}A) = \det(A)$

- On peut donc calculer le déterminant en utilisant des opérations élémentaires inversibles sur les lignes et sur les colonnes.
  - l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ mutliplie le déterminant par -1,
  - l'opération $L_i \leftarrow \beta L_i$ mutliplie le déterminant par β,
  - l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant.
- Ces opérations conservent le rang et le noyau mais ne conservent pas le déterminant.

- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments diagonaux.
- On peut calculer le déterminant en utilisant la réduction de Gauss : on réduit la matrice en une matrice triangulaire supérieure (par des opérations sur les lignes ou les colonnes).

Conséquences du théorème fondamental

- On a : $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$

- On peut donc calculer le déterminant en utilisant des opérations élémentaires inversibles sur les lignes et sur les colonnes.
  - l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ mutliplie le déterminant par -1,
  - l'opération $L_i \leftarrow \beta L_i$ mutliplie le déterminant par β,
  - l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant.
- Ces opérations conservent le rang et le noyau mais ne conservent pas le déterminant.

- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments diagonaux.
- On peut calculer le déterminant en utilisant la réduction de Gauss : on réduit la matrice en une matrice triangulaire supérieure (par des opérations sur les lignes ou les colonnes).

Conséquences du théorème fondamental

- On a : $\det({}^tA) = \det(A)$

- On peut donc calculer le déterminant en utilisant des opérations élémentaires inversibles sur les lignes et sur les colonnes.
  - l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ mutliplie le déterminant par -1,
  - l'opération $L_i \leftarrow \beta L_i$ mutliplie le déterminant par β,
  - l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant.
- Ces opérations conservent le rang et le noyau mais ne conservent pas le déterminant.

- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments diagonaux.
- On peut calculer le déterminant en utilisant la réduction de Gauss : on réduit la matrice en une matrice triangulaire supérieure (par des opérations sur les lignes ou les colonnes).

Conséquences du théorème fondamental

- On a : $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$

- On peut donc calculer le déterminant en utilisant des opérations élémentaires inversibles sur les lignes et sur les colonnes.
  - l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ mutliplie le déterminant par -1,
  - l'opération $L_i \leftarrow \beta L_i$ mutliplie le déterminant par β,
  - l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant.
- Ces opérations conservent le rang et le noyau mais ne conservent pas le déterminant.

- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments diagonaux.
- On peut calculer le déterminant en utilisant la réduction de Gauss : on réduit la matrice en une matrice triangulaire supérieure (par des opérations sur les lignes ou les colonnes).

Conséquences du théorème fondamental

- On a : $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$

- On peut donc calculer le déterminant en utilisant des opérations élémentaires inversibles sur les lignes et sur les colonnes.
  - l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ mutliplie le déterminant par -1,
  - l'opération $L_i \leftarrow \beta L_i$ mutliplie le déterminant par β,
  - l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant.
- Ces opérations conservent le rang et le noyau mais ne conservent pas le déterminant.

- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments diagonaux.
- On peut calculer le déterminant en utilisant la réduction de Gauss : on réduit la matrice en une matrice triangulaire supérieure (par des opérations sur les lignes ou les colonnes).

Conséquences du théorème fondamental

- On a : $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$

- On peut donc calculer le déterminant en utilisant des opérations élémentaires inversibles sur les lignes et sur les colonnes.
  - l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ mutliplie le déterminant par -1,
  - l'opération $L_i \leftarrow \beta L_i$ mutliplie le déterminant par β,
  - l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant.
- Ces opérations conservent le rang et le noyau mais ne conservent pas le déterminant.

- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments diagonaux.
- On peut calculer le déterminant en utilisant la réduction de Gauss : on réduit la matrice en une matrice triangulaire supérieure (par des opérations sur les lignes ou les colonnes).

Conséquences du théorème fondamental

- On a : $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$

- On peut donc calculer le déterminant en utilisant des opérations élémentaires inversibles sur les lignes et sur les colonnes.
  - l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ mutliplie le déterminant par -1,
  - l'opération $L_i \leftarrow \beta L_i$ mutliplie le déterminant par β,
  - l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant.
- Ces opérations conservent le rang et le noyau mais ne conservent pas le déterminant.

- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments diagonaux.
- On peut calculer le déterminant en utilisant la réduction de Gauss : on réduit la matrice en une matrice triangulaire supérieure (par des opérations sur les lignes ou les colonnes).

Développement selon une ligne ou une colonne

- Étant donné une matrice $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et un couple d'entiers $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle :
  - mineur de $a_{i,j}$ le déterminant noté $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne.
  - cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

- Soit $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n alors on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

- Autrement dit : on peut calculer le déterminant de la matrice M en calculant n mineurs (déterminant d'ordre $n-1$)

Développement selon une ligne ou une colonne

- Étant donné une matrice $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et un couple d'entiers $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle :
  - mineur de $a_{i,j}$ le déterminant noté $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne.
  - cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

- Soit $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n alors on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

- Autrement dit : on peut calculer le déterminant de la matrice M en calculant n mineurs (déterminant d'ordre $n-1$)

Développement selon une ligne ou une colonne

- Étant donné une matrice $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et un couple d'entiers $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle :
  - mineur de $a_{i,j}$ le déterminant noté $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne.
  - cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

- Soit $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n alors on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

- Autrement dit : on peut calculer le déterminant de la matrice M en calculant n mineurs (déterminant d'ordre $n-1$)

Développement selon une ligne ou une colonne

- Étant donné une matrice $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et un couple d'entiers $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle :
  - mineur de $a_{i,j}$ le déterminant noté $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne.
  - cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

- Soit $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n alors on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

- Autrement dit : on peut calculer le déterminant de la matrice M en calculant n mineurs (déterminant d'ordre $n-1$)

Développement selon une ligne ou une colonne

- Étant donné une matrice $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et un couple d'entiers $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle :
  - mineur de $a_{i,j}$ le déterminant noté $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne.
  - cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

- Soit $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n alors on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

- Autrement dit : on peut calculer le déterminant de la matrice M en calculant n mineurs (déterminant d'ordre $n-1$)

Développement selon une ligne ou une colonne

- Étant donné une matrice $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et un couple d'entiers $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle :
  - mineur de $a_{i,j}$ le déterminant noté $\Delta_{i,j}$ de la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne.
  - cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

- Soit $M = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n alors on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

  et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

- Autrement dit : on peut calculer le déterminant de la matrice M en calculant n mineurs (déterminant d'ordre $n-1$)

Cas particuliers fréquents

- Si la matrice contient un seul terme non nul dans une ligne ou colonne, il faut systématiquement développer selon cette ligne ou cette colonne.
- $$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline * & * & * & a_{nn} \end{array}\right) \qquad \det(A) = (-1)^{2n} a_{nn} \det(A')$$
- $$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A')$$
- Cela donne par exemple des formules de récurrence pour le calcul de déterminants.

Cas particuliers fréquents

- Si la matrice contient un seul terme non nul dans une ligne ou colonne, il faut systématiquement développer selon cette ligne ou cette colonne.
- $$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline * & * & * & a_{nn} \end{array}\right) \qquad \det(A) = (-1)^{2n} a_{nn} \det(A')$$
- $$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A')$$
- Cela donne par exemple des formules de récurrence pour le calcul de déterminants.

Cas particuliers fréquents

- Si la matrice contient un seul terme non nul dans une ligne ou colonne, il faut systématiquement développer selon cette ligne ou cette colonne.
-
$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline * & * & * & a_{nn} \end{array}\right) \qquad \det(A) = (-1)^{2n} a_{nn} \det(A')$$
-
$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A')$$
- Cela donne par exemple des formules de récurrence pour le calcul de déterminants.

Cas particuliers fréquents

- Si la matrice contient un seul terme non nul dans une ligne ou colonne, il faut systématiquement développer selon cette ligne ou cette colonne.
- $$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline * & * & * & a_{nn} \end{array}\right) \qquad \det(A) = (-1)^{2n} a_{nn} \det(A')$$
- $$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A')$$
- Cela donne par exemple des formules de récurrence pour le calcul de déterminants.

Propriétés théoriques du déterminant

- Le déterminant est un polynôme en les coefficients de la matrice.
- Plus précisément la formule (hors-programme) est la suivante :
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$
 où : $\mathfrak{S}(n)$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.
- À retenir : c'est une somme en prenant un coefficient dans chaque colonne, le calcul effectif de ce déterminant est impossible.

- Propriété du polynôme caractéristique : c'est bien un polynôme de degré n.
- Si la matrice ne contient que des entiers, alors le déterminant est un entier, etc.
- On peut retrouver ces propriétés par récurrence.

Propriétés théoriques du déterminant

- Le déterminant est un polynôme en les coefficients de la matrice.
- Plus précisément la formule (hors-programme) est la suivante :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

  où : $\mathfrak{S}(n)$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.
- À retenir : c'est une somme en prenant un coefficient dans chaque colonne, le calcul effectif de ce déterminant est impossible.

- Propriété du polynôme caractéristique : c'est bien un polynôme de degré n.
- Si la matrice ne contient que des entiers, alors le déterminant est un entier, etc.
- On peut retrouver ces propriétés par récurrence.

Propriétés théoriques du déterminant

- Le déterminant est un polynôme en les coefficients de la matrice.
- Plus précisément la formule (hors-programme) est la suivante :
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$
où : $\mathfrak{S}(n)$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.
- À retenir : c'est une somme en prenant un coefficient dans chaque colonne, le calcul effectif de ce déterminant est impossible.

- Propriété du polynôme caractéristique : c'est bien un polynôme de degré n.
- Si la matrice ne contient que des entiers, alors le déterminant est un entier, etc.
- On peut retrouver ces propriétés par récurrence.

Propriétés théoriques du déterminant

- Le déterminant est un polynôme en les coefficients de la matrice.
- Plus précisément la formule (hors-programme) est la suivante :
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$
où : $\mathfrak{S}(n)$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.
- À retenir : c'est une somme en prenant un coefficient dans chaque colonne, le calcul effectif de ce déterminant est impossible.

- Propriété du polynôme caractéristique : c'est bien un polynôme de degré n.
- Si la matrice ne contient que des entiers, alors le déterminant est un entier, etc.
- On peut retrouver ces propriétés par récurrence.

Propriétés théoriques du déterminant

- Le déterminant est un polynôme en les coefficients de la matrice.
- Plus précisément la formule (hors-programme) est la suivante :
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$
où : $\mathfrak{S}(n)$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.
- À retenir : c'est une somme en prenant un coefficient dans chaque colonne, le calcul effectif de ce déterminant est impossible.

- Propriété du polynôme caractéristique : c'est bien un polynôme de degré n.
- Si la matrice ne contient que des entiers, alors le déterminant est un entier, etc.
- On peut retrouver ces propriétés par récurrence.

Propriétés théoriques du déterminant

- Le déterminant est un polynôme en les coefficients de la matrice.
- Plus précisément la formule (hors-programme) est la suivante :
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$
 où : $\mathfrak{S}(n)$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.
- À retenir : c'est une somme en prenant un coefficient dans chaque colonne, le calcul effectif de ce déterminant est impossible.

- Propriété du polynôme caractéristique : c'est bien un polynôme de degré n.
- Si la matrice ne contient que des entiers, alors le déterminant est un entier, etc.
- On peut retrouver ces propriétés par récurrence.

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) = \det(A) \times \det(D)$$

- Cette situation se généralise au cas d'une matrice triangulaire par blocs avec plusieurs blocs carrés sur la diagonale.

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right) = \det(A) \times \det(D)$$

- Cette situation se généralise au cas d'une matrice triangulaire par blocs avec plusieurs blocs carrés sur la diagonale.

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) = \det(A) \times \det(D)$$

- Cette situation se généralise au cas d'une matrice triangulaire par blocs avec plusieurs blocs carrés sur la diagonale.

Déterminant de Vandermonde

Soit $n \geqslant 2$ et $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des scalaires. Le déterminant de Vandemonde est :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On a :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

- Il faut savoir refaire ce calcul et comprendre le lien avec les polynôme d'interpolation de Lagrange.

Déterminant de Vandermonde

Soit $n \geqslant 2$ et $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des scalaires. Le déterminant de Vandemonde est :

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On a :

$$V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$$

- Il faut savoir refaire ce calcul et comprendre le lien avec les polynôme d'interpolation de Lagrange.

Déterminant de Vandermonde

Soit $n \geqslant 2$ et $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des scalaires. Le déterminant de Vandemonde est :

$$V(x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On a :

$$V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$$

- Il faut savoir refaire ce calcul et comprendre le lien avec les polynôme d'interpolation de Lagrange.

Matrice compagnon

Soit $a_0, \dots, a_{n-1}$, n scalaires. On considère :

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\chi_C = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

- On trouve ces déterminant dans l'étude des suites récurrentes linéaires.
- On voit aussi qu'étant donné un polynôme unitaire P, il existe une matrice A telle que $\chi_A = P$.

Matrice compagnon

Soit $a_0, \dots, a_{n-1}$, n scalaires. On considère :

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\chi_C = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

- On trouve ces déterminant dans l'étude des suites récurrentes linéaires.
- On voit aussi qu'étant donné un polynôme unitaire P, il existe une matrice A telle que $\chi_A = P$.

Matrice compagnon

Soit $a_0, \ldots, a_{n-1}$, n scalaires. On considère :

$$C(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\chi_C = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

- On trouve ces déterminant dans l'étude des suites récurrentes linéaires.
- On voit aussi qu'étant donné un polynôme unitaire P, il existe une matrice A telle que $\chi_A = P$.