Devoir non surveillé pour le Lundi 23 septembre

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Thèmes: probabilités

Exercice 1 ESSEC ECE 2001 (partie II)

1. **Calculs préliminaires**
   (a) ☞1✓ On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geqslant q$.
   En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante :
   $$\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$$
   (b) ☞1✓ En faisant $q = 1,\ 2,\ 3$, en déduire une expression factorisée des sommes suivantes :
   $$\sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k-1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$$
   ☞0.5✓En déduire aussi une expression factorisée de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
2. On considère dans toute la suite un nombre entier $n \geqslant 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
   On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :
   - N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré.
   - N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du deuxième jeton tiré.
   - X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
   - Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

   Lois conjointes et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2 .
   (a) ☞1✓ Déterminer les probabilités $p(N_1 = i)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $p_{N_1=i}(N_2 = j)$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$.
   ☞1✓En déduire $p(N_2 = j)$ pour $j \in [\![1,n]\!]$.
   Comparer les lois de N_1 et de N_2.
   (b) ☞1✓ Calculer les espérances $E(N_1)$ et $E(N_2)$, et les variances $V(N_1)$ et $V(N_2)$.
   (c) ☞0.5✓ Déterminer les probabilités $p(N_1 = i \cap N_2 = j)$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.
   ☞1✓En déduire que :
   $$E(N_1N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$
   ☞1✓En déduire la covariance de N_1 et N_2.
   (d) ☞1✓ Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $V(N_1+N_2)$.
3. **Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables X et Y**
   (a) ☞0.5✓ Montrer que les probabilités $p(X = i \cap Y = j)$ sont égales à $\frac{2}{n(n-1)}$ pour tout couples (i,j) vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
   ☞0.5✓Donner la valeur de $p(X = i \cap Y = j)$ dans les autres cas.
   (b) ☞1✓ En déduire les probabilités $P(Y = j)$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ et $P(X = i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.
   (On vérifiera que les formules donnant $P(Y = j)$ et $P(X = i)$ restent valables si $j = 1$ ou $i = n$).
   (c) ☞1.5✓ Déterminer les probabilités $P_{Y=j}(X = i)$ et $P_{X=i}(Y = j)$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, puis reconnaître la loi de X conditionnée par $Y = j$ et la loi de Y conditionnée par $X = i$.
   (d) ☞1✓ Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y, autrement dit les deux probabilités $P(n+1-X = j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$.
   ☞0.5✓En déduire que $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.
4. **Espérances et variances des variables aléatoires X et Y**
   (a) ☞1✓ Exprimer les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n.

(b) ☞1✓ Exprimer sous forme factorisée $E[(Y(Y-2)]$, puis $E(Y^2), V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n.

5. **Covariance des variables aléatoires X et Y**

☞1✓ Vérifier que $X+Y=N_1+N_2$, puis en déduire sous forme factorisée la variance de $X+Y$ et la covariance de X et Y.

Correction :

1. **Calculs préliminaires**

(a) On fixe q eet on procède par récurrence sur n, en notant $\mathscr{P}(n)$: « $\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}=\binom{n+1}{q+1}$ ».

Initialisation : Pour $n=q$ on a :

$$\sum_{k=q}^{q}\binom{k}{q}=\binom{q}{q}=1=\binom{q+1}{q+1}$$

! L'initialisation se fait à partir de $n=q$!☞0 si initialisation à partir de 0✓

Hérédité : Soit $n\geqslant q$ tel que $\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}=\binom{n+1}{q+1}$ alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=q}^{n+1}\binom{k}{q}&=\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}+\binom{n+1}{q}\\&=\binom{n+1}{q+1}+\binom{n+1}{q}\\&=\binom{n+2}{q+1}\end{aligned}$$ (triangle de Pascal)

Conclusion : $\boxed{\text{pour } n\geqslant q : \sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}=\binom{n+1}{q+1}}$

(b) En faisant $q=1$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\sum_{k=1}^{n}k=\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$$

pour $q=2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}&=\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\binom{n+1}{3}=\frac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot 2}\text{ et}\\\sum_{k=2}^{n}k(k-1)&=\frac{(n+1)n(n-1)}{3}\end{aligned}$$

enfin pour $q=3$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}&=\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{3\cdot 2}=\binom{n+1}{4}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4\cdot 3\cdot 2}\text{ et}\\\sum_{k=2}^{n}k(k-1)(k-2)&=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2&=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)+\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$ après calculs.

2. **Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2.**

(a) Les numéros présents dans l'urne sont équiprobables donc $\mathrm{P}(N_1=i)=\frac{1}{n}$ pour $1\leqslant i\leqslant n$.
On a aussi :
$\mathrm{P}_{N_1=i}(N_2=j)=\frac{1}{n-1}$ pour $1\leqslant j\leqslant n, j\neq i$ et $\mathrm{P}_{N_1=j}(N_2=j)=0$ car la boule j est retirée de l'urne.

On utilise ensuite la formule des probas totales : $(N_1 = i)_{i\in[[1,n]]}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N_2 = j) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_{N_1=i}(N_2 = j)\,\mathrm{P}(N_1 = i) \\
&= \sum_{i=1:i\neq j}^{n} \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \mathrm{P}_{N_1=j}(N_2 = j)\,\mathrm{P}(N_1 = j) \\
&= (n-1)\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc la loi de } N_2 \text{ est la même que celle de } N_1.}$

N.B. On aurait aussi pu raisonner directement : sans conditionnement par le premier tirage, tous les numéros sont possibles et équiprobables pour le second tirage.

(b) On a $E(N_1) = E(N_2) = \frac{n+1}{2}$ (loi uniforme sur $[[1,n]]$)

$$\begin{aligned}
E\left(N_1^2\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
V(N_1) &= E\left(N_1^2\right) - E(N_1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n+1}{12}(4n+2-3n-3) \\
&= \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(N_1) = E(N_2) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(N_1) = V(N_2) = \frac{n^2-1}{12}}$

(c) On a $\mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) = 0$ si $i = j$ (événement impossible) De plus, si $i \neq j$: $\mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) = \mathrm{P}(N_1 = i)\,\mathrm{P}_{N_1=i}(N_2$
$\frac{1}{n(n-1)}$

On a alors (on ne pense pas que N_1 et N_2 soient indépendantes)

$$\begin{aligned}
E(N_1N_2) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\,j\,\mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\left[\sum_{j=1:j\neq i}^{n} j\,\mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) + 0\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{j=1}^{n} j - i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)}{2n(n-1)} - \sum_{i=1}^{n} i^2\frac{1}{n(n-1)} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4n(n-1)} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{n(n-1)6} \\
&= \frac{n(n+1)}{n(n-1)12}\left(3\left(n+n^2\right) - 4(2n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)}{(n-1)12}\left(3n^2-n-2\right) \text{ que l'on factorise} \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)(n-1)}{(n-1)12}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On a donc bien } E(N_1N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}}$

La covariance de (N_1, N_2) est alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(N_1,N_2) &= E(N_1N_2) - E(N_1)E(N_2) \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)}{12}[3n+2-3n-3] \\
&= -\frac{n+1}{12} \\
\rho(N_1,N_2) &= \frac{\mathrm{Cov}(N_1,N_2)}{\sqrt{V(N_1)V(N_2)}} \\
&= -\frac{n+1}{12}\frac{12}{n^2-1} \\
&= -\frac{1}{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{le coefficient de corrélation linéaire de } N_1 \text{ et } N_2 \text{ vaut } -\frac{1}{n-1}}$

(Le signe négatif est cohérent : plus l'un est grand, moins l'autre a de chance de l'être).

(d) On a alors

$$\begin{aligned}
V(N_1+N_2) &= V(N_1)+V(N_2)+2\mathrm{Cov}(N_1,N_2) \\
&= 2\frac{n^2-1}{12} - 2\frac{n+1}{12} \\
&= \frac{n+1}{6}(n-1-1) \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{6}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(N_1+N_2) = \frac{(n+1)(n-2)}{6}}$

3. **Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables** aléatoires X et Y

(a) $1 \leqslant i < j \leqslant n$. on a $(X = i \cap Y = j) =$ " le plus grand vaut j e tle plus petit vaut i" et comme on a bien $i < j$ $(X = i \cap Y = j) =$" l'un vaut i et l'autre j"$=(N_1 = i \cap N_2 = j) \cup (N_1 = j \cap N_2 = i)$ incompatibles donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = i \cap Y = j) &= \mathrm{P}(N_1 = i \cap N_2 = j) + \mathrm{P}(N_1 = j \cap N_2 = i) \\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Et sinon, l'événement est impossible et la probabilité est nulle.

(b) Les lois de X et de Y sont les lois marginales du couple donc

pour $j \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = j) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X = i \cap Y = j) \\
&= \sum_{i=1:i<j}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} + 0 \text{ car } j-1 \geqslant 1 \\
&= \frac{2(j-1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

et pour $j = 1$ on $\mathrm{P}(Y = 1) = 0$ (car le numéro 1 sera le plus petit et ne pourra pas être le plus grand), ce que donne encore la formule.

Pour $i \leqslant n-1$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = i) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X = i \cap Y = j) \\
&= \sum_{j=i+1:j>i}^{n} \frac{2}{n(n-1)} + 0 \text{ car } i+1 \leqslant n \\
&= \frac{2(n-(i+1)+1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

qui donne bien 0 pour $i = n$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour } i \text{ et } j \text{ de } [[1,n]] : \mathrm{P}(Y = j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \text{ et } \mathrm{P}(X = i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}}$

(c) Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$:
Quand $Y = j$ le plus petit peut prendre toutes les valeurs de $[[1, j-1]]$ équiprobablement et $\mathrm{P}_{Y=j}(X = i) = \frac{1}{j-1}$ pour $i \in [[1, j-1]]$.
Pour plus de sureté, on revient à la définition :

$$\mathrm{P}_{Y=j}(X = i) = \frac{\mathrm{P}(X = i \cap Y = j)}{\mathrm{P}(Y = j)} = \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{2(j-1)}{n(n-1)}} = \frac{1}{j-1}$$

et de même

$$\mathrm{P}_{X=i}(Y = j) = \frac{1}{n-i}$$

(d) On a $X(\Omega) = [[1, n-1]]$ donc $(n+1-X)(\Omega) = [[2, n]] = Y(\Omega)$
Pour $2 \leqslant j \leqslant n$ on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(n+1-X = j) &= \mathrm{P}(X = n+1-j) \\
&= \frac{2(n-(n+1-j))}{n(n-1)} \text{ car } 1 \leqslant n+1-j \leqslant n-1 \\
&= \frac{2(j-1)}{n(n-1)} = \mathrm{P}(Y = j)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{n+1-X \text{ et } Y \text{ ont la même loi.}}$,
Donc ils ont même espérance et variance.$E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$,
Or $E(n+1-X) = n+1-E(X)$ d'où $E(X) = n+1-E(Y)$
et $V(n+1-X) = (-1)^2 V(X)$ donc
Conclusion : $\boxed{E(X) = n+1-E(Y) \text{ et } V(X) = V(Y)}$

4. **Espérances et variances des variables aléatoires X et Y**

(a) Idée : $X + Y = N_1 + N_2$ donc $E(X) + E(Y) = E(N_1) + E(N_2)$ ne conduit à rien ici car on a simplification...
On revient à la défintion :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=2}^{n} j \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^{n} j(j-1) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \\
&= \frac{2}{3}(n+1)
\end{aligned}$$

d'après les formules du début.
D'où $E(X) = n+1-E(Y) = \frac{1}{3}(n+1)$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
E[Y(Y-2)] &= \sum_{j=2}^{n} j(j-2) \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^{n} j(j-1)(j-2) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{2}
\end{aligned}$$

Or $E[Y(Y-2)] = E\left[Y^2 - 2Y\right] = E\left(Y^2\right) - 2E(Y)$ et $E\left(Y^2\right) = E\left[Y^2 - 2Y\right] + 2E(Y)$ donc

$$\begin{aligned}
E\left(Y^2\right) &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{4}{3}(n+1) \\
&= \frac{(n+1)}{6}(3n-6+8) \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{6}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left(Y^2\right) - E(Y)^2 \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4}{9}(n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{18}(9n+6-8n-8) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{18} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}}$

5. **Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y**
   (a) Comme X est l'une des deux valeur et Y l'autre alors $X+Y = N_1 + N_2$
   Donc

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(N_1+N_2) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{6} \end{aligned}$$

   D'auter part $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{2}\left[V(X+Y) - V(X) - V(Y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n-2)}{6} - 2\frac{(n+1)(n-2)}{18}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2\cdot 18} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{36}}$

   (b) On a alors

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{36}\frac{18}{(n+1)(n-2)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\rho(X,Y) = \frac{1}{2} \text{ indépendant de } n \text{ (étonnant, non ?)}}$

Exercice 2 ☞14.5✓ **Concours commun INA ENSA 1996**

Dans tout le problème, a désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, b et r sont deux entiers naturels non nuls tels que :

$$b + r = a.$$

On considère une urne qui contient au départ b boules blanches et r boules rouges. Dans tout le problème, on effectuera des tirages successifs, au hasard, d'une boule suivant la règle suivante :

- Si la boule tirée est rouge, on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
- Si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne, mais elle est remplacée par une boule rouge prélevée dans une urne extérieure.

On procède ensuite au tirage suivant.

NB : l'urne contient donc toujours a boules.

La lettre n désigne un entier naturel non nul et on notera R_n l'événement « *la n-ième boule tirée est rouge* ».

1. (a) ☞1.5✓ Déterminer la probabilité des événements R_1 et R_2.
   (b) ☞1✓ Dans cette question, k est un entier qui vérifie la relation :

$$0 \leqslant k \leqslant \min(b, n-1).$$

On suppose qu'au cours des $n-1$ premiers tirages, on a obtenu k boules blanches. Quel est le nombre de boules rouges présentes dans l'urne ?
En déduire la probabilité de R_n sachant qu'au cours des $n-1$ premiers tirages on a obtenu k boules blanches.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, une boule rouge.
   (a) ☞0.5✓ Combien y a-t-il de boules de chaque couleur dans l'urne après b tirages qui ont tous donné une boule blanche ?
   (b) ☞0.5✓ Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre X ?
   (c) ☞1.5✓ Justifier, pour k entier $(1 \leq k \leq a-r+1)$ la relation :
$$p(X=k) = \frac{(a-r)!}{(a-r-k+1)!} \times \frac{r+k-1}{a^k}$$
3. On note B_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la n^e boule tirée est rouge et 0 si elle est blanche.
   (a) ☞0.5✓ Exprimer l'événement $B_n = 1$ en fonction de R_n ainsi que $E(B_n)$ en fonction de $p(R_n)$.
   (b) ☞1✓ On considère la variable aléatoire :
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$$
   Que représente l'événement $S_n = k$ pour k entier naturel ?
   Calculer $E(S_1)$.
   (c) ☞1✓ Soit k entier naturel vérifiant :
$$\max(0, n-b) \leqslant k \leqslant n$$
   Justifier la relation :
$$p_{S_n=k}\left(R_{n+1}\right) = \frac{r+n-k}{a}$$
   (d) ☞2✓ En déduire :
$$p(R_{n+1}) = \frac{r+n-E(S_n)}{a}$$
   (e) ☞0.5✓ Déterminer une relation entre $E(S_{n+1})$, $E(S_n)$, r, n et a.
4. (a) ☞1.5✓ On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifient, pour tout n entier naturel strictement supérieur à 1, la relation :
$$au_{n+1} = (a-1)u_n + r + n$$
   Déterminer un élément de $\mathscr{E}$ dont le terme général soit de la forme :
$$u_n = \alpha n + \beta$$
   où α et β sont deux réels que l'on déterminera en fonction de a et r.
   (b) ☞0.5✓ On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifient, pour tout n entier naturel non nul, la relation :
$$av_{n+1} = (a-1)v_n$$
   Exprimer le terme général v_n d'un élément de $\mathscr{F}$ en fonction de son premier terme v_1.
   (c) ☞1.5✓ Déduire des deux questions précédentes, l'expression du terme général u_n d'un élément de $\mathscr{E}$ en fonction de son premier terme u_1.
   Indication : soustraire la suite obtenue en 4a.
   (d) ☞1✓ Donner une expression de $E(S_n)$ en fonction de n, r et a. En déduire une expression de $p(R_{n+1})$ en fonction de n, r et a.

Correction :

1. (a) Il y a initialement r boules rouges sur un total de a, donc $p(R_1) = \frac{r}{a}$
   D'autre part, si on tire une boule blanche en premier, au tour suivant il y a une boule rouge de plus, donc $p(R_2/B_1) = \frac{r+1}{a}$.
   D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet (R_1, B_1) , on a

$$p(R_2) = p(R_1)p_{R_1}(R_2) + p(B_1)p_{B_1}(R_2) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} \times \frac{r+1}{a} = \frac{r^2+br+b}{a^2}$$

Comme $b+r=a$, $\boxed{p(R_2) = \dfrac{ar+b}{a^2}}$

(b) Si au cours des $n-1$ premiers tirages on a tiré k boules blanches, on a rajouté dans l'urne k boules rouges, donc il y en a $r+k$.

La probabilité de R_n sachant qu'au cours des $n-1$ premiers tirages on a obtenu k boules blanches est $\dfrac{r+k}{a}$

2. (a) Après b tirages qui ont tous donné une boule blanche, on a enlevé b boules blanches donc il n'en reste plus. Il y a a boules rouges (et on est sûr de tirer une boule rouge par la suite)

(b) D'après la question précédente, la plus grande valeur prise par X est $b+1$, ce qui correspond à l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_b \cap R_{b+1}$

L'ensemble des valeurs prises par X est $[\![1, b+1]\!]$.

Remarque : la réponse est donnée dans la question suivante car $b+1 = a-r+1$

(c) Si $k \geq 2$, $X = k$ équivaut à l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap R_k$.

D'après la formule des probabilités composées :

$p(X=k) = p(B_1)p(B_2/B_1)\cdots p(B_{k-1}/B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2})p(R_k/B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1})$

Après chaque tirage d'une boule blanche, le nombre de boules blanches diminue de 1, donc pour passer d'un terme $p(B_i/B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1})$ au suivant il faut diminuer le numérateur de 1 (le dénominateur reste fixe car le nombre de boules dans l'urne est constant.

L'avant dernier terme est $\dfrac{b-k+2}{a}$ car après $k-2$ tirages ayant donné blanc, on a enlevé $k-2$ boules blanches.

Le dernier terme est $\dfrac{r+k-1}{a}$ car on a ajouté $k-1$ boules rouges.

Donc $p(X=k) = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{b-1}{a} \times \cdots \times \dfrac{b-k+2}{a} \times \dfrac{r+k-1}{a}$

$p(X=k) = \dfrac{b!}{(b-k+1)!} \times \dfrac{r+k-1}{a^k}$.

Or $b = a-r$, donc $\boxed{p(X=k) = \dfrac{(a-r)!}{(a-r-k+1)!} \times \dfrac{r+k-1}{a^k}}$

On vérifie que cette expression est valable aussi pour $k=1$.

> Il est évident que l'on ne peut pas utiliser les probabilités uniformes : tous les tirages ne sont pas équiprobables. D'autre part, il vaut mieux séparer le cas $k=1$, où l'argument des probabilités composées n'est pas le même.

3. (a) $B_n = 1$ équivaut à R_n.

B_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p(R_n)$, donc $E(B_n) = p(R_n)$.

(b) $S_n = k$ équivaut à "k boules rouges ont été tirées au cours des n premiers tirages".

$E(S_1) = E(B_1) = p(R_1) = \dfrac{r}{a}$

(c) Si on a effectué n tirages et qu'on a obtenu k boules rouges, on a obtenu $n-k$ boules blanches, donc on a rajouté $n-k$ boules rouges dans l'urne. Donc à cet instant la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{r+n-k}{a}$, d'où $p(R_{n+1}/S_n = k) = \dfrac{r+n-k}{a}$.

> C'est la même question qu'en 1b.

(d) L'ensemble des valeurs prises par S_n est $[\![\max(0, n-b), n]\!]$.

En effet, on a forcément $0 \leqslant S_n \leqslant n$ et le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages est inférieur ou égal à b, soit $n-k \leqslant b$, c'est à dire $n-b \leqslant k$.

Appliquons la formule des probabilités totales avec comme système complet d'événements $(S_n = k)_{\max(0,n-b) \leqslant k \leqslant n}$:

$p(R_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=\max(0,n-b)}^{n} p(R_{n+1}/S_n = k)p(S_n = k)$, d'où d'après la question précédente :

$p(R_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=\max(0,n-b)}^{n} \frac{r+n-k}{a} p(S_n = k)$

$p(R_{n+1}) = \dfrac{r+n}{a} \displaystyle\sum_{k=\max(0,n-b)}^{n} p(S_n = k) - \frac{1}{a} \sum_{k=\max(0,n-b)}^{n} kp(S_n = k)$

Or $\displaystyle\sum_{k=\max(0,n-b)}^{n} p(S_n = k) = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=\max(0,n-b)}^{n} kp(S_n = k) = E(S_n)$, d'où le résultat souhaité.

(e) D'après la définition de S_n, on a $S_{n+1} = S_n + B_{n+1}$, donc par linéarité et d'après le i) :
$E(S_{n+1}) = E(S_n) + p(R_{n+1})$
D'après la question précédente :
$E(S_{n+1}) = E(S_n) + \dfrac{r+n-E(S_n)}{a}$
En simplifiant légèrement : $E(S_{n+1}) = \dfrac{a-1}{a}E(S_n) + \dfrac{r+n}{a}$

4. (a) Par soustraction, la relation que doit vérifier (u_n) est :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, a(u_{n+1} - u_n) + u_n - r - n = 0$
Si on pose $u_n = \alpha n + \beta$, on a $u_{n+1} - u_n = \alpha$, donc la relation devient :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, a\alpha + \alpha n + \beta - r - n = 0$
c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(\alpha - 1) + (a\alpha + \beta - r) = 0$
Il suffit d'avoir $\alpha - 1 = 0$ et $a\alpha + \beta - r = 0$, c'est à dire $\alpha = 1$ et $\beta = r - a$.
On peut prendre $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n + r - a$.

Il n'y a aucun rapport direct avec les suites arithmético-géométriques.

(b) $a \geq 2$, donc $av_{n+1} = (a-1)v_n \iff v_{n+1} = \dfrac{a-1}{a}v_n$
Les suites (v_n) de $\mathscr{F}$ sont géométriques de raison $\dfrac{a-1}{a}$, donc vérifient $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{n-1} v_1$.

(c) Soit (u_n) une suite qui est dans $\mathscr{E}$. Définissons $w_n = n + r - a$ (c'est la suite trouvée au i)
Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n - w_n$.
On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, av_{n+1} = au_{n+1} - aw_{n+1}$
Donc $av_{n+1} = (a-1)u_n + r + n - \big[(a-1)w_n + r + n\big]$ (car la suite (w_n) est aussi dans $\mathscr{E}$)
Après simplification, il reste : $av_{n+1} = (a-1)v_n$, donc d'après le ii), $v_n = \left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{n-1} v_1$
Revenons à (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - w_n = \left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{n-1}(u_1 - w_1)$
Or $w_1 = 1 + r - a$ et $w_n = n + r - a$, donc
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n + r - a + \left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{n-1}(u_1 - 1 - r + a)$

Technique très classique : on écrit les deux relations l'une sous l'autre et on fait la différence : le résultat suit.

(d) En multipliant par a la relation obtenue au c)v), on trouve que la suite $\big(E(S_n)\big)$ est dans $\mathscr{E}$, et $E(S_1) = \dfrac{r}{a}$, donc
$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(S_n) = n + r - a + \left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{n-1}\left(\dfrac{r}{a} - 1 - r + a\right)$.
Après simplification, il reste :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(S_n) = n + r - a - (r-a)\left(\dfrac{a-1}{a}\right)^n$
D'après la question c)iv), on obtient après simplification et en tenant compte du fait que $r - a = -b$:
$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(R_{n+1}) = 1 - \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{a-1}{a}\right)^n$

Devoir surveillé 1 — Samedi 28 septembre

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Calculatrice interdite — durée 4h
Thèmes: Dénombrements, probabilités sur un univers fini

Exercice 1 ☞1.5✓**Question de cours**

Montrer que $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ par dénombrement.

Correction :

On attend :

- ☞0.5✓ les notations expliquées $\mathscr{P}([\![1,n]\!])$ (ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$), $\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])$ (ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ à k éléments) ,
- ☞0.5✓La relation :

$$\mathscr{P}([\![1,n]\!]) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k([\![1,n]\!]) \text{ union disjointe}$$

- ☞0.5✓La conclusion.

Exercice 2 ☞1✓**Question de cours**

Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sans démonstration.

Exercice 3 **Question de cours**

☞0.5✓Dénombrer le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $\{0,1\}$.
☞1.5✓Dénombrer le nombre de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Exercice 4 **2024 E3A/E4A - MPI**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.
   (a) ☞1✓ Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n, de a, de b et de u_1.
   (b) ☞0.5✓ Préciser le comportement de u à l'infini.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.
Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.
On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

2. ☞0.5✓ Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.
3. ☞0.5+1✓ Donner les lois de T_1 et de T_2.

Pour la suite, on prendra $n \geqslant 2$

4. ☞1 +1.5✓ Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = 2)$.
5. ☞1.5✓ Calculer $\mathbb{P}(T_n = n)$.
   On pourra distinguer les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.
6. ☞2✓ Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)$$

7. On considère dans cette question la fonction génératrice :

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k$$

(a) ☞0.5✓ Montrer que :

$$G_n'(1) = \mathbb{E}[T_n]$$

(b) ☞2✓ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + x G_n(x)$$

(c) ☞1✓ En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbb{E}[T_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}[T_n] + 1$$

(d) ☞1✓ En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T_n]$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

8. ☞3✓ Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la i-ème case est pleine, 0 sinon.

REM : sujet et correction fournis par l'UPS (M. Laamoum) puis modifiée.

Correction :

Dans cet exercice posons pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, Y_k la variable aléatoire discrète qui donne le numéro de la case dans laquelle tombe la k-ième boule lancée. Les $(Y_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ suivent la loi uniforme $\mathscr{U}([\![1,N]\!])$ et elles sont mutuellement indépendantes .

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant : $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique de raison géométrique $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et arithmétique b.

   - On cherche une solution constante : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$ donc $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.
   - Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$, elle verifie $v_{n+1} = av_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, elle est donc géométrique de raison a , par suite

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = a^{n-1} v_1$$

   d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = a^{n-1}\left(u_1 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}}$.

   REM : attention, la suite commence à u_1.

   (b) De l'expression précédente on distingue les cas suivants :

   - si $u_1 = \dfrac{b}{1-a}$, alors la suite (u_n) est constante ;
   - si $a \in]-1,1[$, la suite $\left(a^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{b}{1-a}$;
   - si $a \in \mathbb{R}\backslash]-1,1]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

2. Au minimum, $T_n = 1$ si toutes les boules tombent dans la même case. Deux cas se présentent :
   - Si $n \geqslant N$, toutes les cases peuvent être occupées donc $T_n(\Omega) = [\![1,N]\!]$.
   - Si $n \leqslant N$, au minimum une case est occupée et au maximum n cases le sont, dans ce cas, $T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

   Ainsi $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, \min(n,N)]\!]}$.

3. Loi de T_1 : si $n = 1$, donc $T_1(\Omega) = \{1\}$ ainsi $T_1 = 1$, c'est la variable aléatoire certaine .
   Loi de T_2 : si $n = 2$, on lance deux boules , qui vont occuper une ou deux cases.
   L'événement $(T_2 = 1)$ est réalisé quand les deux boules tombent sur une même case.

Formule des probas totales avec le SCE associé à Y_1 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_2=1) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T_2=1 \cap Y_1=k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(Y_1=k \cap Y_2=k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(Y_1=k)\,\mathbb{P}(Y_2=k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\mathbb{P}(T_2=2) = 1-\mathbb{P}(T_2=1) = 1-\frac{1}{N}.$$

Ainsi la loi de T_2 est donnée par : $\boxed{T_2(\Omega)=\{1,2\}\ ,\ \mathbb{P}(T_2=1)=\frac{1}{N}\ \text{ et } \mathbb{P}(T_2=2)=\frac{N-1}{N}}$.

Autre méthode : Dénombrements. L'univers est les liste de longueur 2 de $[\![1,N]\!]$ avec répétition (où tombe la boule 1 et où tombe la boule 2). Son cardinal est N^2. L'événement $T_2=1$ signifie que toutes les boules sont tombées dans la même boîte donc cela correspond à N tirages (choix de cette boîte). Donc :

$$\mathbb{P}(T_2=1) = \frac{N}{N^2}$$

On remarque que ce résultat englobe le cas $N=1$.

4. Pour $(T_n=1)$.
Formule des proba totales avec le SCE associé à Y_1 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n=1) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T_n=1 \cap Y_1=k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(Y_1=k \cap Y_2=k \cap \cdots \cap Y_n=k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(Y_1=k)\,\mathbb{P}(Y_2=k)\ldots\mathbb{P}(Y_n=k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}
\end{aligned}$$

Autre rédaction (équivalente à la formule des probas totales) : Exprimons événement $(T_n=1)$. à l'aide des variables aléatoires Y_k , l'événement $(T_n=1)$ se réalise si toutes les boules tombent dans la même case donc ,

$$(T_n=1) = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i=k)\right]$$

Les événements $\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i=k)$ sont disjoints donc

$$\mathbb{P}(T_n=1) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i=k)\right)$$

par l'indépendance des Y_k on a

$$\mathbb{P}(T_n=1) = \sum_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}((Y_i=k)) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{1}{N^{n-1}}$$

Autre méthode : Par dénombrements : on note dans quel boîte est mise chaque boule, si bien que l'univers est une liste de longueur n de $[\![1,N]\!]$ avec répétition. Son cardinal est N^n.

Il y a N liste vérifiant la condition $T_n = 1$ (c'est les listes contenant toujours le même chiffre). D'où le résultat.
Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \dfrac{1}{N^{n-1}}}$.
Pour $(T_n = 2)$, la méthode la plus simple est par dénombrements. On note toujours dans quel boîte est mise chaque boule, si bien que l'univers est une liste de longueur n de $[\![1,N]\!]$ avec répétition. Son cardinal est N^n. Les listes telles que $T_n = 2$ sont contruites par choix successifs :

- Choix des deux boîtes non vides $\binom{n}{2}$ choix.
- choix de la place du plus faibles des nombres choisi. Il y a 2^n choix a priori mais la condition que les deux doivent être inscrits fait qu'il n'en reste que $2^n - 2$.

Au final : $card(T_n = 2) = \binom{n}{2}(2^n - 2)$
D'où

$$\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{n}{2}(2^n - 2)\frac{1}{N^n}$$

Autre rédaction (équivalente aux dénombrements)
L'événement $(T_n = 2)$ se réalise si toutes les boules tombent dans deux cases différentes. Pour construire $(T_n = 2)$ on prend une partie à deux éléments $\{i, j\} \subset [\![1,N]\!]$ et une partie $A \subset [\![1,n]\!]$ telle que $A \neq \varnothing$ et $A \neq [\![1,n]\!]$ de sorte que lors des lancers d'indice $k \in A$ la boule tombe dans la case i , bien sur la boule tombe dans la case j sinon .
On a donc

$$(T_n = 2) = \bigcup_{\{i,j\}\subset[\![1,N]\!]} \left(\bigcup_{\substack{A\subset[\![1,n]\!]\\ A\neq\varnothing\\ A\neq[\![1,n]\!]}} \left[\left(\bigcap_{k\in A} (Y_k = i) \right) \cap \left(\bigcap_{k\in\overline{A}} (Y_k = j) \right) \right] \right)$$

les événements considérés sont disjoints et les Y_k sont indépendantes , ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n = 2) &= \sum_{\{i,j\}\subset[\![1,N]\!]} \left(\sum_{\substack{A\subset[\![1,n]\!]\\ A\neq\varnothing\\ A\neq[\![1,n]\!]}} \left[\left(\prod_{k\in A} \mathbb{P}(Y_k = i) \right) \left(\prod_{k\in\overline{A}} \mathbb{P}(Y_k = j) \right) \right] \right) \\
&= \sum_{\{i,j\}\subset[\![1,N]\!]} \left(\sum_{\substack{A\subset[\![1,n]\!]\\ A\neq\varnothing\\ A\neq[\![1,n]\!]}} \left[\left(\frac{1}{N} \right)^{Card(A)+Card(\overline{A})} \right] \right) \\
&= \left(\frac{1}{N} \right)^n Card\Big\{ \{i,j\} \subset [\![1,N]\!] \Big\} \, Card\Big\{ A \subset [\![1,n]\!], A \neq \varnothing, A \neq [\![1,n]\!] \Big\}
\end{aligned}$$

On sait que

$$Card\Big\{ \{i,j\} \subset [\![1,N]\!] \Big\} = \binom{n}{2}$$

et

$$Card\Big\{ A \subset [\![1,n]\!], A \neq \varnothing, A \neq [\![1,n]\!] \Big\} = 2^n - 2$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(T_n = 2) = \dfrac{\binom{n}{2}(2^n - 2)}{N^n}}$.
Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \dfrac{1}{N^{n-1}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T_n = 2) = \dfrac{\binom{n}{2}(2^n - 2)}{N^n}}$.

5. Déjà : Si $n > N$, l'événement $(T_n = n)$ est impossible car il ne peut y avoir plus de N cases occupées , donc $\mathbb{P}(T_n = n) = 0$.
considérons maintenant le cas $n \leqslant N$
Lévénement $(T_n = n)$ se réalise si, et seulement si les n boules tombent dans des cases distinctes.

Le plus facile est encore par dénombrements : l'univers reste le même, de cardinal N^n.
Tandis que $T_n = n$ signifie que la liste associée est sans répétition (puisque chaque boule tombe dans une boîte différente).
Ainsi :

$$card(T_n = n) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

On obtient :

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(T_n = n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n > N \\ \dfrac{N!}{N^n(N-n)!} & \text{si} \quad n \leqslant N \end{cases}}$

6. La famille $(T_n = i)_{1 \leqslant i \leqslant \min(N,n)}$ est un système complet d'événements .
Soit $k \in [\![1,n]\!]$, la formule de probabilité totale donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{n+1} = k) &= \sum_{i=1}^{\min(N,n)} \mathbb{P}((T_n = i) \cap (T_{n+1} = k)) \\ &= \sum_{i=1}^{\min(N,n)} \mathbb{P}_{(T_n=i)}(T_{n+1} = k)\,\mathbb{P}(T_n = i) \end{aligned}$$

Recherche des termes nuls On a, pour tout $i \in [\![1, \min(N,n)]\!]$, si $(T_n = i)$ est réalisé alors soit $(T_{n+1} = i)$ soit $(T_{n+1} = i+1)$ est réalisé. En effet, en ajoutant une boule, on ne peut qu'augmenter de 1 le nombre de boîte non vide.
Ainsi, pour $k \neq i$ et $k \neq i+1$ on a $\mathbb{P}_{(T_n=i)}(T_{n+1} = k) = 0$.
Par suite, il ne reste que deux termes non nuls dans la somme :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k)\,\mathbb{P}(T_n = k) + \mathbb{P}_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k)\,\mathbb{P}(T_n = k-1)$$

On calcule ensuite ces termes :
Si $(T_n = k)$ est réalisé, k cases sont occupées donc la probabilité que la ($n+1$)-ième boule tombe dans l'une des cases déjà occupées est $\frac{k}{N}$, donc $\mathbb{P}_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$.
Si $(T_n = k-1)$ est réalisé, $k-1$ cases sont occupées donc la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tombe dans une cases non occupée est $\frac{N-(k-1)}{N}$, donc $\mathbb{P}_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{N}$.
Ainsi $\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)}$.

(a) G_n est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k)x^{k-1}$$

en évaluant en 1, cela donne :

$$G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{E}(G_n)$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant l'identité établie en 6 , on obtient

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(T_{n+1} = k)x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1) \right) x^k \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(T_n = k)x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(T_n = k-1)x^k - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)\mathbb{P}(T_n = k-1)x^k \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k)x^k + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T_n = k)x^{k+1} - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k)x^{k+1} \\ &= \frac{x}{N}G_n'(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G_n'(x). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + xG_n(x)}$.

(c) Les séries génératrices impliquées étant polynomiales, elles sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x) + \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x)$$

donc, en évaluant en 1, il vient :

$$G_{n+1}'(1) = -\frac{1}{N}G_n'(1) + G_n(1) + G_n'(1)$$

on sait que $G_n(1) = 1, G_n'(1) = \mathbb{E}[T_n]$ et $G_{n+1}'(1) = \mathbb{E}[T_{n+1}]$ donc : $\boxed{\mathbb{E}[T_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}[T_n] + 1}$.

(d) La suite $(\mathbb{E}[T_n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique de raison géométrique $a = \left(1 - \frac{1}{N}\right)$ et de raison arithmétique $b = 1$ donc $\frac{b}{1-a} = N$, d'après la question 1, on a :

$$\mathbb{E}[T_n] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}(\mathbb{E}[T_1] - N) + N$$

Puisque $\mathbb{E}[T_1] = 1$, alors

$$\mathbb{E}[T_n] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}(1-N) + N = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in N^*, \quad \mathbb{E}[T_n] = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)}$.

Puisque $\left|\frac{N-1}{N}\right| < 1$, on a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[T_n] = N}$.

(e) Si on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la case numéro i est "non vide" après n lancers et 0 sinon, le nombre de cases non vides est

$$T_n = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

On a $X_i(\Omega) = \{0,1\}$ donc X_i est une variable aléatoire de Bernoulli. Déterminons son paramètre.
L'événement $(X_i = 0)$ se réalise si, et seulement si, toutes les boules tombent dans des cases aux numéros autres que i donc ,

$$(X_i = 0) = \bigcap_{k=1}^{n}(Y_k \neq i) = \bigcap_{k=1}^{n}\overline{(Y_k = i)}$$

L'indépendance des Y_k donne

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(\overline{(Y_k = i)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{N}\right) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

Ainsi $\boxed{\forall i \in [\![1,N]\!], \quad X_i \sim \mathscr{B}\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)}$

Par suite $\boxed{\forall i \in [\![1,N]\!], \quad \mathbb{E}[X_i] = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n}$

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{N}\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

donc

$$\mathbb{E}[T_n] = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

Exercice 5 Nombres de coïncidences

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$). On les tire toutes une à une et sans remise.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on dit qu'il y a coïncidence au rang k si le numéro de la k-ième boule est k.

Soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si il y a coïncidence au tirage i et X la variable aléatoire égale au nombre de coïncidences obtenues au cours des tirages.

1. ☞0.5✓ Exprimer X en fonction des X_i.
2. ☞1✓ Soit $i \in [\![1,n]\!]$, déterminer la loi de X_i.
3. ☞0.5✓ Sans déterminer la loi de X , calculer l'espérance de X.
4. ☞1.5✓ Soit $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Donner $cov(X_i, X_j)$.
5. ☞2✓ En déduire la variance de X.

Correction :

1. On a : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. On doit calculer, $p(X_i = 1)$ ie la probabilité qu'il y ait coïncidence au tirage i. Plusieurs calculs sont possibles, par exemple par les probabilités composées :

$$\begin{aligned} p(X_i = 1) &= p(T_1 \neq i \cap \cdots \cap T_{i-1} \neq i \cap T_i = i) \\ &= p(T_1 \neq i) p_{T_1 \neq i}(T_2 \neq i) \ldots p_{T_1 \neq i \ldots T_{i-2} \neq i}(T_{i-1} \neq i) p_{T_1 \neq i \ldots T_{i-1} \neq i}(T_i = i) \\ &= \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n+1-i}{n+2-i} \frac{1}{n+1-i} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

   Ou par dénombrements :
   - l'univers est l'ensemble des permutations il y a $n!$ tirages possibles,
   - un tirage tel que la boule i est tirée en i est donnée par la place des $n-1$ autres boules dans les $n-1$ places restantes, soit $(n-1)!$ choix possibles.

   Ainsi : $p(X_i = 1) = \frac{1}{n}$.
   Ainsi, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{n}\right)$. et donc $E(x_i) = \frac{1}{n}$.
3. On en déduit : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.
   Au final, on obtient $E(X) = 1$.
4. Pour $i < j$, on sait :

$$cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

   or on a : $E(X_i X_j) = p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$.
   Il faut donc calculer la probabilité d'avoir coïncidence aux tirages i et j. Par exemple par dénombrements :
   - l'univers est l'ensemble des permutations il y a $n!$ tirages possibles,
   - un tirage tel que la boule i est tirée en i et la boule j est tiré en j est donnée par la place des $n-2$ autres boules dans les $n-2$ places restantes, soit $(n-2)!$ choix possibles.

   Ainsi :

$$p(X_i = 1 \cap X_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}$$

   Ce qui donne :

$$\begin{aligned} cov(X_i, X_j) &= \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2(n-1)} \end{aligned}$$

5. On utilise ensuite la formule de la variance d'une somme :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j).$$

On a déjà vu :

$$V(X_i) = \frac{1}{n}\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^2}.$$

et

$$cov(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{n-1}{n} + 2\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} \\ &= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $V(X) = 1$.

Exercice 6

On considère une urne contenant une proportion a de boules rouges $(0 < a < 1)$.

On extrait successivement n fois de suite une boule de l'urne que l'on remet dedans avant chaque nouveau tirage. On désigne par X le nombre de boules rouges obtenues à l'issue de ces n tirages.

Si $X = k$ on effectue alors k tirages successifs d'une boule de l'urne que l'on remet dedans avant chaque tirage. On désigne alors par Y le nombre de boules rouges obtenues dans cette deuxième partie de l'expérience aléatoire.

1. ☞1✓ Déterminer la loi de X. Préciser son espérance et sa variance.
2. ☞1✓ Déterminer l'univers image du couple de variables aléatoires (X, Y).
3. ☞1✓ Soient $i \in [\![0, n]\!]$, et $j \in [\![0, n]\!]$, déterminer la probabilité $p_{(X=i)}(Y = j)$.
4. ☞2✓ Calculer $p(X = Y)$. *(Simplifiez l'expression).*
5. ☞1✓ Déterminer pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, la probabilité $p(X = i \cap Y = j)$.
6. ☞2✓ Montrer que $(X - Y) \hookrightarrow \mathscr{B}(n, a - a^2)$. Donner son espérance et sa variance.
7. ☞2✓ Montrer que $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, a^2)$. Donner son espérance et sa variance.

Commentaires : aucune difficulté à condition de bien connaître la formule des probabilités totales ! !

Correction :

1. On a clairement $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, a)$. Et donc $E(X) = na$, $V(X) = na(1 - a)$.
2. L'univers images est $[\![0, n]\!]^2$.

   ! Ne pas dire : $[\![0, n]\!] \times [\![0, k]\!]$, où $X = k$ cela n'a pas de sens : l'univers image est le produit des univers image de chacune des variables.

3. Il est clair que si $j > i$, on a : $p_{(X=i)}(Y = j) = 0$. Si $j \leqslant i$, on voit que sachant $X = i$, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(i, a)$. Ainsi :

$$p_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \binom{i}{j} a^j (1-a)^{i-j} & \text{si } j \leqslant i. \end{cases}$$

   ! Ne pas oublier le cas $j > i$

4. On utilise le système complet d'événement associé à X pour avoir :

$$\begin{aligned}
p(X=Y) &= \sum_{i=0}^{n} p(X=Y \cap X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=i \cap Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=i) p_{X=i}(Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i (1-a)^{n-i} a^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (a^2)^i (1-a)^{n-i} \\
&= (1-a+a^2)^n.
\end{aligned}$$

Il faut voir le binôme de Newton à la fin du calcul (-0.5 dans ce cas).

5. Déjà si $j > i$, on a $p(X=i \cap Y=j) = 0$, sinon :

$$\begin{aligned}
p(X=i \cap Y=j) &= p(X=i) p_{X=i}(Y=j) \\
&= \binom{n}{i} a^i (1-a)^{n-i} \binom{i}{j} a^j (1-a)^{i-j} \\
&= \binom{n}{i} \binom{i}{j} a^{i+j} (1-a)^{n-j}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$p(X=i \cap Y=j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \binom{n}{i} \binom{i}{j} a^{i+j} (1-a)^{n-j} & \text{si } j \leqslant i. \end{cases}$$

! Ne pas oublier le cas $j > i$

6. Déjà $X - Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, soit donc $k \in [\![0, n]\!]$.
On utilise le système complet d'événement associé à Y pour obtenir :

$$\begin{aligned}
p(X-Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} p(X-Y=k \cap Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=k+i \cap Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=k+i) p_{X=k+i}(Y=i)
\end{aligned}$$

! Attention aux indices : $p(X=k+i \cap Y=i)$ est nul si $k+i > n$. Le reste n'est qu'un calcul dont on connaît le résultat (0.5 pour la fin des calculs).

$$
\begin{aligned}
p(X-Y=k) &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{k+i} a^{k+i}(1-a)^{n-(k+i)} \binom{k+i}{i} a^i (1-a)^k \\
&= \frac{n!}{k!} a^k (1-a)^k \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{i!(n-k-i)!} a^{2i}(1-a)^{n-k-i} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k (1-a)^k \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!} a^{2i}(1-a)^{n-k-i} \\
&= \binom{n}{k} a^k (1-a)^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} a^{2i}(1-a)^{n-k-i} \\
&= \binom{n}{k} a^k (1-a)^k (1-a+a^2)^n \\
&= \binom{n}{k} (a-a^2)^k (1-a+a^2)^n.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $X-Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, a-a^2)$. Et donc : $E(X-Y) = n(a-a^2)$, et $V(X-Y) = n(a-a^2)(1-a+a^2)$.
Autre méthode : on peut aussi passer par le système complet d'événement associé à X :

$$
\begin{aligned}
p(X-Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} p(X-Y=k \cap X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=i \cap Y=i-k) \\
&= \sum_{i=k}^{n} p(X=i) p_{X=i}(Y=i-k) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{i-k} a^{2i-k}(1-a)^{n-i+k} \\
&= \frac{n!}{k!} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(n-i)!(i-k)!} a^{2i-k}(1-a)^{n-i+k}.
\end{aligned}
$$

On pose alors $j = n-i$ soit $i = n-j$, pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
p(X-y=k) &= \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!(n-j-k)!} a^{2n-2j-k}(1-a)^{j+k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} a^k (1-a)^k \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{j!(n-j-k)!} (a^2)^{k-k-j}(1-a)^j \\
&= \binom{n}{k} (a-a^2)^k (1-a+a^2)^{n-k}
\end{aligned}
$$

On peut aussi dire que l'expérience peut se modéliser d'une manière différente :
- On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, et on recommence.
- On note succès si il y a eu une rouge puis « non rouge ».
- On renouvelle n fois l'expérience.

$X-Y$ correspond alors au nombre de succès de ce schéma de Bernoulli, donc la probabilité de succès est $a(1-a)$. Néanmoins, même si vous pouvez faire cette remarque, il faut ici le redémontrer par le calcul.

7. On a, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$
\begin{aligned}
p(Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} p(X=i \cap Y=k) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p(X=i) p_{X=i}(Y=k)
\end{aligned}
$$

R Encore une fois attention aux indices, le reste n'est que du calcul

$$\begin{aligned}
p(Y=k) =& \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} a^i (1-a)^{n-i} \binom{i}{k} a^k (1-a)^{i-k} \\
=& (1-a)^{n-k} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k} a^{k+i} \\
=& \frac{n!}{k!} (1-a)^{n-k} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(i-k)!(n-i)!} a^{k+i} \\
=& \frac{n!}{(n-k)!k!} (1-a)^{n-k} \sum_{i=k}^{n} \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} a^{k+i} \\
=& \binom{n}{k} (1-a)^{n-k} a^{2k} \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k} a^{i-k}
\end{aligned}$$

On fait alors le changement de variables : $j = i-k$

$$\begin{aligned}
p(Y=k) =& \binom{n}{k} (1-a)^{n-k} a^{2k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} a^j \\
=& \binom{n}{k} (1-a)^{n-k} a^{2k} (1+a)^{n-k} \\
=& \binom{n}{k} \left(1-a^2\right)^{n-k} a^{2k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, a^2)$, et donc $E(Y) = na^2$ et $V(Y) = na^2(1-a^2)$.

Idem ici cela peut se modéliser en : On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, et on recommence, et on note succès : l'événement : *tirer deux rouges*. Mais encore une fois, on attends le calcul.

Exercice 7 Soit $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = \max(X_n, X_{n+1})$.

1. ☞1.5✓ Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. ☞3.5✓ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

Avant de commencer, il s'agit d'un exercice classique :

- Les $\left(X_n\right)$ sont les variables « de base » indépendantes et de même loi,
- avec ces variables on construit les variables de « deuxième niveau » $\left(Y_n\right)$. La variable Y_n indique qu'on a eu un succès dans un des deux tirages n ou $n+1$. Elles ne sont plus indépendantes.
- S_n est une variable de « troisième niveau » : il s'agit de compter le nombre de fois où dans un couple de tirage n, $n+1$ il y a eu au moins un succès. On ne peut pas déterminer la loi de S_n facilement (ce n'est pas une binomiale puisque les Y_n ne sont pas indépendants). Par contre, on peut facilement calculer son espérance et sa variance en utilisant les propriétés de linéarité de l'espérance et de la variance.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on voit que $Y_n(\Omega) = \left\{0,1\right\}$, La variable Y_n est donc une variable de Bernoulli. On calcule son paramètre en calculant $p(Y_n = 1)$. On voit que $Y_n = 1$ si l'une des deux variables aléatoires X_n ou X_{n+1} est égale à 1. Cela donne :

$$\begin{aligned}
p(Y_n = 1) =& p\Big(X_n = 1 \cup (X_n = 0 \cap X_{n+1} = 1)\Big) \text{ union disjointe} \\
=& p(X_n = 1) + p(X_n = 0 \cap X_{n+1} = 1) \\
=& p + p(X_n = 0)p(X_{n+1} = 1) \text{ par indépendance} \\
=& p + (1-p)p = 2p - p^2 = p(2-p).
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}\Big(p(2-p)\Big)$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}\Big(p(2-p)\Big),$$

et donc

$$\begin{aligned}
&E(Y_n) = p(2-p),\\
&V(Y_n) = p(2-p)(1-p(2-p))) = p(2-p)(1-p)^2.
\end{aligned}$$

R On peut aussi remarquer que $1-p(2-p) = 1-2p+p^2 = (1-p)^2$, ce qui est cohérent puisque l'événement $Y_n = 0$ signifie $X_n = 0 \cap X_{n+1} = 0$, évènement de probabilité $(1-p)^2$ (par indépendance).

2. En utilisant la linéarité de l'espérance, on a

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = np(2-p).$$

☞0.5 pour ce calcul✓.
Pour la variance on utilise la variance d'une somme

$$\begin{aligned}
V(S_n) =& \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(Y_i, Y_j)\\
=& np(2-p)(1-p)^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(Y_i, Y_j).
\end{aligned}$$

Considérons alors deux entier (i, j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$. On a alors :

- Y_i est fonctions des variables X_i, X_{i+1},
- Y_j est fonctions des variables X_j, X_{j+1}.

Si $j \geqq i+2$, *i.e.* $j \neq i+1$, on a $\Big\{i, i+1\Big\} \cap \Big\{j, j+1\Big\} = \emptyset$, il n'y a donc pas d'indices en commun. Les variables (X_n) étant indépendantes, on en déduit que les variables Y_i et Y_j sont indépendantes, et en particulier $cov(Y_i, Y_j) = 0$.

! Ce point est à rédiger soigneusement.

Ainsi, si $j \neq i+1$, on a $cov(Y_i, Y_j) = 0$, la somme (double) sur (i, j) se réduit donc à une somme simple :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(Y_i, Y_j) = \sum_{i=1}^{n-1} cov(Y_i, Y_{i+1}).$$

Considérons alors $i \in [\![1, n-1]\!]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
cov(Y_i, Y_{i+1}) =& E(Y_i Y_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1})\\
=& E(Y_i Y_{i+1}) - p^2(2-p)^2.
\end{aligned}$$

La variable $Y_i Y_{i+1}$ est une variable de Bernoulli, on en déduit en utilisant le SCE associé à X_{i+1} :

$$\begin{aligned}
E(Y_i Y_{i+1}) =& p(Y_i Y_{i+1} = 1) = p(Y_i = 1 \cap Y_{i+1} = 1)\\
=& p(Y_i = 1 \cap Y_{i+1} = 1 \cap X_{i+1} = 1) + p(Y_i = 1 \cap Y_{i+1} = 1 \cap X_{i+1} = 0)\\
=& p(X_{i+1} = 1) + p(X_i = 1 \cap X_{i+1} = 0 \cap X_{i+2} = 1)\\
=& p + p^2(1-p) \text{ par indépendance}\\
=& p(1 + p(1-p)) = p(1 + p - p^2).
\end{aligned}$$

On peut aussi lister les 8 possibilités pour les valeurs de X_i, X_{i+1} et X_{i+2}, 5 de ces possibilités vérifient $Y_i Y_{i+1} = 1$.
On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ E(Y_i Y_{i+1}) =& p(1 + p - p^2)\\
\text{et donc } cov(Y_i, Y_{i+1}) =& E(Y_i Y_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1})\\
=& p(1 + p - p^2) - p^2(2-p)^2\\
=& p\Big(1 + p - p^2 - 4p + 4p^2 - p^3\Big)\\
=& p\Big(1 - 3p + 3p^2 - p^3\Big) = p(1-p)^3.
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
V(S_n) =& \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(Y_i, Y_j) \\
=& np(2-p)(1-p)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} cov(Y_i, Y_{i+1}) \\
=& np(2-p)(1-p)^2 + 2(n-1)p(1-p)^3 \\
=& p(1-p)^2 \Big(n(2-p) + 2(n-1)(1-p) \Big) \\
=& p(1-p)^2 \Big(4n - 2 - 3np + 2p \Big).
\end{aligned}$$

On a donc obtenu :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ E(S_n) =& np(2-p) \\
V(S_n) =& p(1-p)^2 \Big(4n - 2 - 3np + 2p \Big).
\end{aligned}$$

Devoir non surveillé pour le Lundi 4 novembre

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Thèmes: durée 4h

Calcul de probabilités, variables aléatoires discrètes, séries numériques

Exercice 1 ECRICOME ECS 2020

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.
   (a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   On se place désormais sous cette condition.

   (b) Pour out entier $k \geqslant 2$, justifier que :
   $$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$
   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$
   (d) En déduire que :
   $$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$
   (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

   (f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^n}$.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \frac{1}{3^k}$, puis en déuire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4 \cdot 3^n}$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

(e) La série $\sum_{n \geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

(a) Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k dt$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

(d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$$

Correction :

1. (a) ☞0.5✓ Il faut que $\alpha > 1$.

(b) ☞0.5✓ Soit $k \geqslant 2$, on a alors :

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } \forall t \in [k-1, k],\ \frac{1}{t^\alpha} \geqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

en intégrant ces relations cela donne :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

(c) ☞1✓ Soit un $n \geqslant 1$, et $N > n$ on somme cette relation pour tout $n+1 \leqslant k \leqslant N$.
Cela donne :

$$\int_{n+1}^{N} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha}$$

en passant à la limite lorsque N tends vers $+\infty$, cela s'écrit :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

REM : j'utilise ici des notations qui seront vues plus tard dans l'année.
On calcule ces intégrales :

$$\begin{aligned}\int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} &= \int_n^{N+1} t^{-\alpha} dt \\ &= \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right]_n^{N+1} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left((N+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right)\end{aligned}$$

On fait ensuite tendre N vers $+\infty$. Comme $1-\alpha < 0$, cela donne :

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \qquad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

et donc :

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

(d) ☞0.5✓ On a :

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Ainsi, $n^{\alpha-1}R_{1,n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}$ ce qui s'écrit :

$$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

(e) ☞0.5✓ On a $\sum R_{1,n}$ qui est une série de réels positifs, donc on peut utiliser le critère de comparaison des séries à termes positifs. La série $\sum R_{1,n}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.

(f) ☞1✓ Il y a un piège : la série ne converge pas à l'ordre $\lfloor\alpha\rfloor$. En effet, si $\alpha = 2$ la série ne converge pas à l'ordre 2. Si on peut écrire :

$$k < \alpha \leqslant k+1$$

alors la série converge à l'ordre k. ☞0.5 si partie entière, 0 si pas un entier✓

2. (a) ☞0.5✓ On a :

$$n^2 \times \frac{1}{n^n} = \frac{1}{n^{n-2}} = \exp\left((2-n)\ln(n)\right)$$

Clairement :

$$(2-n)\ln(n) \underset{n\infty}{\sim} -n\ln(n) \to -\infty$$

et donc $n^2 \times \frac{1}{n^n} \to 0$ et donc

$$\frac{1}{n^n} \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.
NB : le critère de d'Alembert est aussi très bien ici, ou encore simplement le début de la question suivante.

(b) ☞1✓ Soit donc $k \geqslant 3$. On a :

$$u_k = \exp\left(-k\ln(k)\right) \leqslant \exp\left(-k\ln(3)\right) = \frac{1}{3^k}$$

On fixe donc n et on calcule $R_{1,n}$:

$$0 \leqslant R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{3^{n+1}}$

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{3^{n+1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2\cdot 3^n}$$

(c) ☞0.5✓ La série $\sum \frac{1}{3^n}$ converge, donc la série $\sum R_{1,n}$ converge. De plus, on fixe encore n et on somme la rélation :

$$0 \leqslant R_{1,k} \leqslant \frac{1}{2 \cdot 3^k}$$

pour $k \geqslant n+1$. On obtient :

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^k}$$

c'est encore une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$. Et donc :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^k} = \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4 \cdot 3^n}$$

(d) ☞1✓ On procède par récurrence sur $p \geqslant 1$. On note $\mathscr{P}(p)$ la proposition : $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

La propriété a été montré pour $p = 1$ question 2b.
Considérons un $p \geqslant 1$ fixé, tel que $\mathscr{P}(p)$ est vraie.
On a alors :

$$\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$ converge, en conséquence, $\sum_{n \geqslant 1} R_{p,n}$ converge et donc $_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre $p+1$, et on a pour tout $n \geqslant 1$

$$R_{p+1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p \cdot 3^k}$$

C'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme : $\frac{1}{2^p \cdot 3^{n+1}}$ et donc :

$$0 \leqslant R_{p+1,n} \leqslant \frac{1}{2^p 3^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{p+1} \cdot 3^n}$$

La propriété est donc bien héréditaire.

(e) ☞0.5✓ À la question précédente, on a obtenu :

$$\forall p \geqslant 1, \forall n \geqslant 1, 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

on en déduit :

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \frac{1}{6^n}$$

La série $\sum \frac{1}{6^n}$ est géométriue de raison $\frac{1}{6}$ donc converge. On en déduit que la série $\sum R_{n,n}$ converge.

3. (a) ☞0.5✓ **NB :** la question peut être faite facilement avec la convergence dominée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1[, \frac{t^n}{1+t} \leqslant 1$$

et on a à $t \in [0,1[$ fixé, $\lim_{n\infty} \frac{t^n}{1+t} = 0$.
Mais on peut aussi faire "à la main" :

$$\forall t \in [0,1], \frac{1}{2} t^n \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

et donc en intégrant :

$$\frac{1}{2} \frac{1}{n+1} \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leqslant \frac{1}{n+1}$$

D'où le résultat.

(b) ☞0.5✓ On écrit donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^n dt \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^n dt && \text{inversion somme finie et intégrale finie} \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} dt && \text{somme finie géométrique de raison } -t \text{ avec } -t \neq 1 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} dt
\end{aligned}$$

(c) ☞1✓ On a vu à la q3 que :

$$\lim_{n\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$$

on en déduit que :

$$\lim_{N\infty} (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t} dt = 0$$

et donc la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$$

et pour $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
R_{1,n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} dt
\end{aligned}$$

(d) ☞1+1✓ On fait une récurrence sur l'entier $p \geqslant 1$.
Soit la proposition $\mathscr{P}(p)$: la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$$

Pour l'initialisation, c'est la question 3c.
Soit un p fixé avec $p \geqslant 1$, tel que $\mathscr{P}(p)$ est vérifié. La série $\sum_{n\geqslant 0} R_{p,n}$ est alors alterné, car le terme général est :

$$(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n(-1)^p}{(1+t)^p} dt = (-1)^n \times \text{ un terme de signe constant}$$

On va appliquer le critère spécial des séries alternées. On a pour $n \geqslant 1$:

$$|R_{p,n}| = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^p} dt$$

On a pour $n \geqslant 0$:

$$\forall t \in [0,1],\ \frac{t^{n+1}}{(1+t)^p} \leqslant \frac{t^n}{(1+t)^p}$$

et donc en intégrant :

$$|R_{p,n+1}| \leqslant |R_{p,n}|$$

La suite $(|R_{p,n}|)$ est donc décroissante.
On a aussi :

$$\forall n \geqslant 0,\ \forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant \frac{t^n}{(1+t)^p} \leqslant t^n$$

en intégrant :

$$\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant |R_{p,n}| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\infty} |R_{p,n}| = 0$.
REM : ici aussi le thm de convergence dominée est utilisable.
On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées qui donne que la série $\sum R_{p,n}$ converge.
On en déduit donc que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre $p+1$.
Il reste à calculer la valeur du reste. On fixe donc $n \geqslant 1$ et $N > n$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{N} R_{p,k} &= \sum_{k=n+1}^{N} \int_0^1 \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{N} \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p} dt\end{aligned}$$

On reconnaît un somme finie géométrique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{N} R_{p,k} &= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p+1}}{(1+t)^p} \times \frac{1-(-t)^{N-n}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N-n}}{(1+t)^{p+1}} dt\end{aligned}$$

Pour $t \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{t^{N-n}}{(1+t)^{p+1}} \leqslant t^{N-n}$$

En intégrant, cela donne :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{N-n}}{(1+t)^{p+1}} dt \leqslant \frac{1}{N+1-n}$$

et donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{N-n}}{(1+t)^{p+1}} dt = 0$$

Ainsi :

$$R_{p+1,k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p+1}}{(1+t)^{p+1}} dt$$

On a donc bien l'hérédité et la conclusion.

Exercice 2 Calcul des probabilités et variables aléatoires discrètes

Faire le sujet **CCP TSI 2019 PROBLÈME 3 Optimisation du choix d'une place de parking** en annexe.

Correction :

Q26. ☞0.5✓ On roule sans interruption jusqu'au numéro s avant de choisir la première place disponible (s inclus) d'où :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![s;+\infty[\![}$$

Q27. ☞1✓ Soit $k \geqslant s$. On pose pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i : "la i-ième place est libre."
$[X=k]$ signifie que la k-ième place est la première place libre depuis le numéro s,
donc $[X=k] = \overline{A_s} \cap \overline{A_{s+1}} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.
Sachant que les occupations de places sont indépendantes les unes des autres, que la place numéro i est libre avec une probabilité p et donc qu'elle est occupée avec une probabilité $1-p$, on a :
$p(X=k) = p(\overline{A_s}).p(\overline{A_{s+1}})\ldots(\overline{A_{k-1}}).p(A_k) = \underbrace{(1-p).(1-p)\ldots(1-p)}_{k-1-s+1 \text{ fois}}.p = (1-p)^{k-s}.p$

$$\boxed{X(\Omega) = [\![s;+\infty[\![\quad \text{et} \quad \forall k \geqslant s,\ p(X=k) = (1-p)^{k-s}.p}$$

Q28. ☞0.5✓ $Y = X - s + 1$. Comme $X(\Omega) = [\![s;+\infty[\![$,

$$\boxed{Y(\Omega) = [\![1;+\infty[\![= \mathbb{N}^*}$$

De plus, $\forall k \in Y(\Omega)$, $p(Y=k) = p(X-s+1=k) = p(X=k+s-1) = (1-p)^{k+s-1-s}.p$
Finalement :

$$\boxed{\forall k \in Y(\Omega),\ p(Y=k) = (1-p)^{k-1}.p}$$

$$\boxed{\text{donc } Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p.}$$

D'après le cours :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Q29. ☞0.5✓ Par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(Y+s-1) = E(Y)+s-1 = \frac{1}{p}+s-1$.

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}+s-1}$$

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX+b) = a^2V(X)$, d'où $V(X) = 1^2.V(Y) = V(Y)$, c'est à dire :

$$\boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Q30. ☞0.5✓ $p = \frac{1}{10}$ et on suppose que D_s existe.
D'après le théorème de transfert :

$$D_s = E(|X-d|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - d| p(X=x_n) = \sum_{n=s}^{+\infty} |n-d| p(X=n)$$

car $X(\Omega) = [\![s;+\infty[\![$ et pour $n \geqslant s$, $x_n = n$.
Or $|n-d| = \begin{cases} n-d \text{ si } n > d \\ d-n \text{ si } n \leqslant d \end{cases}$
D'où

$$D_s = \sum_{n=s}^{d} (d-n)\ p(X=n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d)\ p(X=n) = S_1 + S_2$$

$$\boxed{D_s = S_1 + S_2}$$

Q31. ☞0.5✓ $\forall k \geqslant 0$, $u_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i = \underbrace{k+1}_{i=0} + \sum_{i=1}^{k+1} (k-(i-1))\left(\frac{9}{10}\right)^i$
On effectue le changement d'indice $j = i-1$:
$\forall k \geqslant 0$, $u_{k+1} = k+1+\sum_{j=0}^{k}(k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^{j+1} = k+1+\sum_{j=0}^{k}(k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^j.\left(\frac{9}{10}\right)$
$= k+1+\left(\frac{9}{10}\right)\sum_{j=0}^{k}(k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^j$, et :

$$\boxed{\forall k \geqslant 0,\ u_{k+1} = k+1+\frac{9}{10}.u_k}$$

Q32. ☞0.5✓ Soit $\mathscr{P}_k$:"$u_k = 10k - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^k$".
<u>initialisation :</u> Soit $k = 0$.

$$u_0 = \sum_{i=0}^{0}(0-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i = 0 \times 1 = 0$$
$$10 \times 0 - 90 + 90.\left(\frac{9}{10}\right)^0 = -90 + 90 = 0$$

donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>hérédité :</u> Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
D'après la question Q31.,
$u_{k+1} = k + 1 + \frac{9}{10}.u_k = k + 1 + \frac{9}{10}.\left(10k - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^k\right)$ par hypothèse de récurrence.
D'où $u_{k+1} = k + 1 + 9k - \frac{9}{10}.90 + 90.\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} = 10k + 1 - 81 + 90.\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1}$
$= 10(k+1) - 10 + 1 - 81 + 90.\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1} = 10(k+1) - 90 + 90.\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1}$.
donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

<u>conclusion :</u> On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = 10k - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^k}$$

Q33. ☞0.5✓ $S_1 = \sum_{n=s}^{d}(d-n)\ p(X=n) = \sum_{n=s}^{d}(d-n)\ (1-p)^{n-s}.p \overset{i=n-s}{=} \sum_{i=0}^{d-s}(d-i-s)\ (1-p)^i.p$
$= p.\sum_{i=0}^{d-s}(d-s-i)\ (1-p)^i = \frac{1}{10}.\sum_{i=0}^{d-s}(d-s-i)\ \left(\frac{9}{10}\right)^i$ car $p = \frac{1}{10}$. Finalement :

$$\boxed{S_1 = \frac{1}{10}u_{d-s}}$$

D'après la question Q32., $S_1 = \frac{1}{10}\left(10(d-s) - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}\right)$, soit encore :

$$\boxed{S_1 = d - s - 9 + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}$$

Q34. ☞1✓ $S_2 - S_1 = \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)\ p(X=n) - \sum_{n=s}^{d}(d-n)\ p(X=n)$
$= \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)\ p(X=n) + \sum_{n=s}^{d}(n-d)\ p(X=n) = \sum_{n=s}^{+\infty}(n-d)\ p(X=n) = E(X-d)$ d'après le théorème de transfert.

$$\boxed{S_2 - S_1 = E(X-d)}$$

Par linéarité de l'espérance, $E(X-d) = E(X) - d = \frac{1}{p} + s - 1 - d$
$= 10 + s - 1 - d = 9 + s - d$ car $p = \frac{1}{10}$.
Ainsi $S_2 = S_1 + 9 + s - d = d - s - 9 + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} + 9 + s - d = 9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}$.

$$\boxed{S_2 = 9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}$$

et $D_s = S_1 + S_2 = d - s - 9 + 18\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} = d - s - 9 + 18.\frac{10}{9}\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1} = d - s - 9 + 20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}$.

$$\boxed{D_s = d - s - 9 + 18\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} = d - s - 9 + 20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}}$$

Remarque : On admet que pour $p \in]0;1[$, $D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

Pour $p = \frac{1}{10}$, cela devient : $D_s = d - s + 1 - 10 + 20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1} = d - s - 9 + 20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}$: on retrouve le résultat de la partie précédente.

Q35. ☞0.5✓ $D_{s+1} - D_s = d - (s+1) + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-(s+1)+1} - (d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1})$
$= d - s - 1 + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s-1+1} - d + s - 1 + \frac{1}{p} - \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$
$= -1 + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s}(1-(1-p)) = -1 + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s}.p = -1 + 2(1-p)^{d-s}$

$$\boxed{D_{s+1} - D_s = 2(1-p)^{d-s} - 1}$$

Q36. ☞0.5✓ $D_{s+1}-D_s \geqslant 0 \Leftrightarrow (1-p)^{d-s} \geqslant \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (d-s)\ln(1-p) \geqslant -\ln(2)$ en composant par ln qui est croissante..

$\Leftrightarrow d-s \leqslant \frac{-\ln(2)}{\ln(1-p)}$ car $1-p \in]0;1[$, donc $\ln(1-p)<0$.

$\Leftrightarrow s \geqslant d+\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}$

$\Leftrightarrow s \geqslant \alpha$

s		α	
signe de $D_{s+1}-D_s$	$-$	0	$+$

Si on note Ent la fonction partie entière,
◇ Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $D_{\alpha+1}-D_\alpha = 0 \Leftrightarrow D_{\alpha+1}=D_\alpha$: $D_{\alpha+1}$ est la valeur minimale de la suite et $\alpha+1$ est le plus petit entier strictement supérieur à α.
◇ Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $D_{Ent(\alpha)+1}-D_{Ent(\alpha)}<0 \Leftrightarrow D_{Ent(\alpha)+1}<D_{Ent(\alpha)}$
et $D_{Ent(\alpha)+2}-D_{Ent(\alpha)+1}>0 \Leftrightarrow D_{Ent(\alpha)+2}>D_{Ent(\alpha)+1}$.
Le minimum de la suite $(D_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est atteint pour $s=Ent(\alpha)+1$, c'est à dire le plus petit entier strictement supérieur à α.

D_s est minimal lorsque s est le plus petit entier strictement supérieur à α.

Q37. ☞0.5✓ $\alpha = d+\frac{\ln(2)}{\ln(\frac{9}{10})} = d+\frac{\ln(2)}{\ln(0.9)}$.

$2^{-1/6}<0.9<2^{-1/7} \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\ln(2)<\ln(0.9)<-\frac{1}{7}\ln(2)$ car ln est croissante.

$\Leftrightarrow -\frac{7}{\ln(2)}<\frac{1}{\ln(0.9)}<-\frac{6}{\ln(2)}$ par passage à l'inverse

$\Leftrightarrow -7<\frac{\ln(2)}{\ln(0.9)}<-6$ car $\ln(2)>0$

$\Leftrightarrow d-7<\alpha<d-6$

On doit commencer à chercher une place 6 numéros avant l'arrivée (à $d-6$) si $d \geqslant 6$,
et dès le numéro 0 sinon.

Q38. ☞0.5✓ On peut par exemple faire :

```
def Bernoulli(q):
  ## renvoie True ou False
  return(random( ) < q)

def distance(d,s,p):
  X=s
  while(Bernoulli(1-p)): # ou encore while(Bernoulli(p)==0):
    X+= 1
  return abs(X-d)
```

Exercice 3 X PC 2009 Partie 3

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3. On fixe $p,q \in [0,1]$. Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit S_n une somme de n variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n}-p\right|\right) \leqslant e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}.$$

Pour démontrer ce résultat, on fixe $p,q \in [0,1]$ et $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p.

On pose alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Q1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x)=\ln(1-p+pe^x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

a. Montrer que g est bien définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geqslant 0$, exprimer $g''(x)$ sous la forme $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$ où α et β sont des réels positifs pouvant dépendre de x.

b. Montrer que $g''(x) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $x \geqslant 0$.

c. Montrer que

$$\ln(1-p+pe^x) \leqslant px + \frac{x^2}{8} \text{ pour tout } x \geqslant 0.$$

Q2. On suppose dans cette question que $p < q$.

a. Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right) = \mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{p+q}{2}n\right).$$

b. Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Pour $u > 0$, calculer $E(e^{uX})$.

c. Montrer que pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{p+q}{2}n\right) \leqslant e^{-n\left(\frac{p+q}{2}u - \ln(1-p+pe^u)\right)}.$$

Indication. On pourra admettre que si $(Z_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes et prenant un nombre fini de valeurs, alors $E\left(\prod_{i=1}^{n} Z_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(Z_i)$.

d. Montrer que $\mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{p+q}{2}n\right) \leqslant e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}$.

Q3. Démontrer le **Théorème 3**.

Correction :

Q1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \ln(1-p+pe^x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

a. ☞0.5+0.5+0.5✓Pour tout $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1$, $p \geqslant 0$ donc $pe^x \geqslant p$ et $1-p+pe^x \geqslant 1$, ce qui assure la définition et le caractère C^2 de g sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \geqslant 0,\ g'(x) = \frac{pe^x}{1-p+pe^x}$$
$$g''(x) = \frac{pe^x(1-p+pe^x) - pe^x pe^x}{(1-p+pe^x)^2} = \frac{(1-p)pe^x}{(1-p+pe^x)^2}$$

On obtient bien la forme demandée.

b. ☞1✓ Si α, β sont deux réls strictement positifs $-4\alpha\beta + (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2 \geqslant 0$.
D'où $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} \geqslant 4$ et $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \leqslant \frac{1}{4}$.
Compte-tenu de la factorisation de $g''(x)$ on a bien $g''(x) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $x \geqslant 0$.

c. ☞1✓ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = px + \frac{x^2}{8} - g(x)$.
$\forall x \geqslant 0$, $h'(x) = p + \frac{x}{4} - g'(x)$ et $h''(x) = \frac{1}{4} - g''(x) \geqslant 0$.
h' est croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $h'(0) = p - g'(0) = p - p = 0$. h' est positive sur $\mathbb{R}_+$; h est croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $h(0) = \ln(1) = 0$.
Par suite : $\forall x \geqslant 0$, $\ln(1-p+pe^x) \leqslant px + \frac{x^2}{8}$ pour tout $x \geqslant 0$.

Q2. On suppose dans cette question que $p < q$.

a. Si a, b sont deux réels positifs, $a \leqslant b \Rightarrow a^2 \leqslant b^2$. Donc :
$A = \left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right|\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \left(\frac{S_n(\omega)}{n} - q\right)^2 \leqslant \left(\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right)^2\right\}$.
En termes d'événements on peut écrire :
$A = \left[\left|\frac{S_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right] = \left[\left(\frac{S_n}{n} - q\right)^2 \leqslant \left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2\right] = \left[(S_n - nq)^2 - (S_n - np)^2 \leqslant 0\right]$
$A = \left[-2nS_n(q-p) + n^2q^2 - n^2p^2 \leqslant 0\right] = \left[2S_n(q-p) \geqslant n(q-p)(q+p)\right]$
Comme $q - p > 0$, $A = \left[S_n \geqslant \frac{p+q}{2}\right]$. On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right) = \mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{p+q}{2}n\right).$$

b. ☞0.5✓ Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p et $u > 0$. $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
$E(e^{uX}) = e^{u\times 0}\mathbb{P}(X=0) + e^{u\times 1}\mathbb{P}(X=1) = 1 - p + pe^u = e^{g(u)}$.

c. Soit $u > 0$, par croissance de la fonction exponentielle :
$A = \left[e^{uS_n} \geqslant e^{u\frac{(p+q)}{2}n}\right]$. En appliquant l'inégalité de Markov :

$\mathbb{P}\left(e^{uS_n} \geqslant e^{u\frac{(p+q)}{2}n}\right) \leqslant \frac{E(e^{uS_n})}{e^{u\frac{(p+q)}{2}n}} = e^{-u\frac{(p+q)}{2}n} E\left(\prod_{i=1}^n e^{uX_i}\right) = e^{-u\frac{(p+q)}{2}n} \prod_{i=1}^n E\left(e^{uX_i}\right)$
par indépendance des v.a.r. $e^{uX_1}, \ldots, e^{uX_n}$. Puis d'après **b.** :
$\mathbb{P}(A) = e^{-u\frac{(p+q)}{2}n}(e^{g(u)})^n = e^{-n\left(\frac{p+q}{2}u - \ln(1-p+pe^u)\right)}$, c.a.d. :

$$\mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{p+q}{2}n\right) \leqslant e^{-n\left(\frac{p+q}{2}u - \ln(1-p+pe^u)\right)}.$$

c. En utilisant la majoration de la fonction g vue en **12c**. on a :
$\mathbb{P}(A) \leqslant e^{-u\frac{(p+q)}{2}n} e^{n(pu+u^2/8)} = e^{nh_1(u)}$ avec $h_1 : u \mapsto u^2/8 + pu - u(p+q)/2$.
La fonction h_1 atteint son minimum en $u_0 = -4p + 2(p+q) = 2(q-p) > 0$
D'où $\mathbb{P}(A) \leqslant e^{nh_1(u_0)} = e^{n\left(\frac{(q-p)^2}{2} + 2p(q-p) - (q-p)(p+q)\right)} = e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}$.
On obtient : $\mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{p+q}{2}n\right) \leqslant e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}$.
Le théorème est démontré dans le cas $q > p$.

Q3. Dans le cas $p > q$ notons pour chaque i, $Y_i = 1 - X_1$. Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-p$ et $1-q > 1-p$.
On a donc $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - (1-q)\right| \leqslant \left|\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - (1-p)\right|\right) \leqslant e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}$
car $(p-q)^2 = (1-p+1-q)^2$.
En remplaçant Y_i par $1 - X_i$ on obtient exactement :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - q\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right) \leqslant e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}.$$

Le cas $p = q$ est trivial (1=1).
Le **Théorème 3** est bien démontré.

Devoir surveillé 2 Samedi 9 novembre

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Calculatrice non autorisée durée 4h
Thèmes: Calcul de probabilités, variables aléatoires discrètes, séries numériques

Exercice 1 ☞3✓ Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_n(x) = (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$$

1. ☞1.5✓ Démontrer que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. ☞1.5✓ Calculer :

$$\lim_{n\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}dx$$

correction :

1. Convergence simple. $x \in [0,1]$ fixé, alors :

$$ne^x + xe^{-x} \underset{n\infty}{\sim} ne^x \qquad \text{et } n+x \underset{n\infty}{\sim} n$$

D'où :

$$\lim_{n\infty} f_n(x) = (x^2+1)e^x$$

☞0.5✓ On a donc convergence simple vers la fonctions : $f : x \longmapsto (x^2+1)e^x$
On a :

$$f_n(x) - f(x) = (x^2+1)\frac{-xe^x + xe^{-x}}{n+x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| =& (x^2+1)\frac{x}{n+x}\left|-e^x + e^{-x}\right| \\ \leqslant& 2\frac{1}{n}\left(e^x + e^{-x}\right) \leqslant 2\frac{1}{n}(e+1) \to 0\end{aligned}$$

D'où la cv uniforme.
REM : trop d'erreurs sur la majoration de la valeur absolue : $-e^x + e^{-x}$ est négatif !

2. ☞0.5✓ On applique le thm d'interversion limite intégrale (il y a cv uniforme).

$$\begin{aligned}\lim_{n\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \\ =& \int_0^1 (x^2+1)e^x dx = \left[(x^2+1)e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx \\ =& 2e - 1 - 2\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right) \\ =& 2e - 1 - 2(e - e + 1) \\ =& 2e - 3\end{aligned}$$

Exercice 2 E3A PC 2017

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P(X=j) = \dfrac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$.

1. (a) ☞0.5✓ Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
   (b) ☞0.5✓ En déduire la valeur de $E\left(X^2\right)$.
2. ☞1✓ Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X \geqslant i) \leqslant \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$.
   Que peut-on en déduire pour la série de terme général $P(X \geqslant i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?
3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$

   (a) ☞1✓ Montrer que la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_{n,k} = \sum\limits_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

   (b) ☞1.5✓ Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geqslant K$, on a : $R_{n,k} \leqslant \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \dfrac{\lambda^i}{k^i}$.
4. (a) ☞1✓ Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $P(X \geqslant k) \leqslant \dfrac{k}{k-\lambda}P(X=k)$.

   ☞1✓Puis montrer que pour tout entier $k \geqslant 2\lambda$, $P(X > k) \leqslant P(X=k)$.

   (b) ☞1✓ Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   Montrer à l'aide des questions précédentes que $\sum\limits_{i=2}^{+\infty} P(X \geqslant i) \leqslant 1$.

   (c) ☞1✓ Dans le cas général, que vaut $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(X \geqslant i)$? Le justifier.
5. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\ 1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n; \frac{\lambda}{n}\right)$.
   (a) ☞0.5✓ Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1-t \leqslant e^{-t}$.
   (b) ☞1.5✓ Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1,\dots,\ n\},\ \dbinom{n}{k} \leqslant \dfrac{n^k}{k!}e^{-\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n,k) = \dfrac{(k-1)k}{2n}$.
   (c) ☞1✓ Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1,\dots,\ n\},\ P(Y=k) \leqslant \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}e^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n,k,\lambda) = \dfrac{k(2\lambda+1-k)}{2n}$.
   (d) ☞1✓ Quelle majoration de $P(Y=k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2\lambda+1$?
   (e) ☞1.5✓ En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2\lambda+1$: $\sum\limits_{j=k+1}^{n} P(Y=j) \leqslant \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Correction : (sujet et correction fournis par l'UPS)

1. (a) Vu que la série $\sum j(j-1)P(X=j)$ converge absolument, le théorème de transfert affirme que

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{j=0}^{+\infty} j(j-1)P(X=j) \\
&= \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{(j-2)!}e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2.
\end{aligned}$$

   (b) La linéarité de l'espérance permet d'écrire

$$E\left(X^2\right) = E(X(X-1)+X) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2+\lambda.$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} i^2 P(X \geqslant i) =& i^2 \sum_{j=i}^{+\infty} P(X=j) \\ \leqslant& \sum_{j=i}^{+\infty} j^2 P(X=j) \leqslant E(X^2) = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

D'où : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X \geqslant i) \leqslant \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$.

Autre méthode : inégalité de Markov appliquée à la VAR positive X^2 :

$$P(X \geqslant i) = P\left(X^2 \geqslant i^2\right) \leqslant \frac{E(X^2)}{i^2}$$

☞gratuit✓Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{i^2}$ converge, il en est de même pour la série $\sum P(X \geqslant i)$.

3. (a) On a :

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{u_{i+1,k}}{u_{i,k}} = \lim_{i \to +\infty} \frac{\lambda}{k+1+1} = 0 < 1$$

Ainsi la série $\sum_{i \geqslant 1} u_{i,k}$, à termes réels strictement positifs, converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par la règle de D'Alembert.

(b) On a :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+i} \leqslant \frac{1}{k}$$

donc : $0 \leqslant u_{i,k} \leqslant \left(\frac{\lambda}{k}\right)^i$.

Pour pouvoir sommer ces inégalités pour $i \geqslant n$, il faut que la série géométrique de raison $\frac{\lambda}{k}$ converge, et donc il faut que $0 < \frac{\lambda}{k} < 1$ cad : $k > \lambda$.

D'où, on choisit $K = \lfloor \lambda \rfloor + 1$et pour tout entier $k \geqslant K$, on a $k > \lambda$ donc :

$$R_{n,k} = \sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k} \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{k^i}.$$

4. (a) Soit un entier k tel que $k > \lambda$.

On constate que pour $i > k$:

$$\begin{aligned} p(X=i) =& \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\ =& \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-k}}{(k+1)(k+2)\dots i} \text{ on remplace } i = k + (i-k) \\ =& p(X=k) u_{i-k,k} p(X=k) \end{aligned}$$

REM : la difficulté de cette question est de voir cette relation.

On a :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant k) =& \sum_{i=k}^{+\infty} P(X=i) \\ =& \left(1 + \sum_{i=k+1}^{+\infty} u_{i-k,k}\right) P(X=k) \\ \leqslant& \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^i P(X=k) = \frac{k}{k-\lambda} P(X=k). \end{aligned}$$

Si on a de plus $k \geqslant 2\lambda$, alors :

$$\begin{aligned} P(X > k) =& P(X \geqslant k) - P(X=k) \\ \leqslant& \left(\frac{k}{k-\lambda} - 1\right) P(X=k) \leqslant P(X=k). \end{aligned}$$

(b) Comme $k \geqslant 1 \geqslant 2\lambda$, onpeut utiliser l'inégalité ci-dessus dès le premier terme :

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{+\infty} P(X \geqslant i) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X > k)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)\\ &\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j) = 1.\end{aligned}$$

(c) Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dans le cas général, on a $E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X \geqslant i)$. C'est du cours !
Une preuve facile consiste à écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty} P(X \geqslant i) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} P(X = k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k} P(X = k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) = E(X)\end{aligned}$$

La convergence de la dernière série assure la sommabilité de la famille de réels positifs $(kp(X = k))$ et donc celle de la famille de réels positifs $(P(X \geqslant i))$ et la validité du calcul ci-dessus.

5. (a) Une étude triviale des variations de la fonction réelle définie par $f(t) = e^{-t} + t - 1$ montre qu'elle est à valeurs positives. D'où : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t \leqslant e^{-t}$.
On peut aussi évoquer la convexité.

(b) **REM :**il faut clairement utiliser la question précédente.
Soit $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$. On a :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{n}\\ &= \frac{n^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\\ &\leqslant \frac{n^k}{k!}e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1} i} = \frac{n^k}{k!}e^{-\alpha(n,k)}.\end{aligned}$$

(c) Soit $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$. On a :

$$\begin{aligned}P(Y = k) &= \binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\ &\leqslant \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\alpha(n,k)}e^{-\frac{\lambda}{n}(n-k)}\\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}e^{\beta(n,k,\lambda)}.\end{aligned}$$

(d) Soit $k \geqslant 2\lambda + 1$. Alors $\beta(n,k,\lambda) \leqslant 0$ et par suite $P(Y = k) \leqslant \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = P(X = k)$.

(e) Soit $k \geqslant 2\lambda + 1$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=k+1}^{n} P(Y = j) &\leqslant \sum_{j=k+1}^{n} P(X = j)\\ &\leqslant P(X > k)\\ &\leqslant P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.\end{aligned}$$

Exercice 3 **CCINP PC 2022 – exercice 2 – Etude de séries de pile ou de face**

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 : $$\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \cdots .$$

Exemple 2 : $$\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k \right)}_{\text{Série n° 3}} .$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

> On admet les relations :
>
> $$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1,1[, \ \sum_{k=1}^{+\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

1. ☞1✓ Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.
2. ☞1✓ Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.
3. ☞1✓ En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.
4. ☞1✓ Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur.

   Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4 .$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

5. ☞1✓ Déterminer les lois de N_1 et N_2.
6. ☞0.5✓ Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

7. ☞2✓ Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\,,$$

puis en déduire que :

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k) \cap P_n\right).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k) \cap F_n\right),$$

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k-1) \cap P_n\right),$$

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k-1) \cap F_n\right).$$

8. ☞1.5✓ En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1).$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m, dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} P(N_m = k) x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x.$$

9. ☞1.5✓ Déduire de 8 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).$$

10. ☞1✓ Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
11. ☞1✓ Déterminer une expression de l'espérance de N_n en fonction de $G_n'(1)$.
    En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n.
12. ☞2✓ Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.

Correction.
Sujet et correction fournis par l'UPS, légèrement modifié

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(L_1 = k)$ est réalisé si et seulement si la première série est de longueur k, c'est-à-dire les k premiers lancers donnent le même résultat et le $(k+1)$-ième lancer donne un résultat différent. On a donc

$$\boxed{(L_1 = k) = (P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1})}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$ étant incompatibles, on a

$$P(L_1 = k) = P\left(P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}\right) + P\left(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}\right).$$

Par indépendance des lancers, on a alors

$$P(L_1 = k) = P(P_1) \times \ldots \times P(P_k) \times P(F_{k+1}) + P(F_1) \times \ldots \times P(F_k) \times P(P_{k+1}) = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2}{2^{k+1}}$$

d'où $\boxed{P(L_1 = k) = 2^{-k}}$.

3. Par définition, la variable aléatoire L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

   La série de terme général $P(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc de somme 1. On a alors $P(L_1 = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}$.

   Or, $\frac{1}{2}$ appartient à l'intervalle $]-1,1[$ donc, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1\,.$$

   On a ainsi $\boxed{P(L_1 = 0) = 0}$.
   On peut aussi faire une continuité décroissante.

4. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $kP(L_1 = k) = k\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Cette égalité est aussi valable lorsque $k = 0$. Or, d'après la question 15, la série $\sum_{k \geq 0} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge de somme $\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$.
   En particulier, la série de terme général $kP(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc, par positivité, converge absolument de somme 2, ce qui signifie que $\boxed{L_1 \text{ admet une espérance égale à } 2}$. Ainsi, en moyenne, la première série dans la suite de lancers est de longueur 2.

Partie II - Étude du nombre de séries

5. La variable aléatoire N_1 représente le nombre de séries apparues en un lancer, elle ne peut donc prendre que la valeur 1. La variable aléatoire N_2 représente le nombre de séries apparues lors des deux premiers lancers, elle prend donc la valeur 1 si les 2 premiers lancers donnent le même résultat, la valeur 2 s'ils donnent des résultats différents.
   On a

$$\begin{aligned} P(N_2 = 1) &= P((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) \\ &= P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) \qquad \text{(incompatibilité)} \\ &= P(P_1)P(P_2) + P(F_1)P(F_2) \qquad \text{(indépendance)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

   On a donc nécessairement $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = \frac{1}{2}$.
   En conclusion, $\boxed{N_1 \text{ suit la loi certaine de valeur } 1}$ et $\boxed{N_2 \text{ suit la loi uniforme sur } \{1;2\}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au cours des n premiers lancers, au moins une série apparaît (celle contenant le résultat du premier lancer) et, au maximum, n séries apparaissent (car chaque série contient au moins un résultat).
   $\boxed{\text{La variable aléatoire } N_n \text{ prend donc ses valeurs dans l'ensemble } [\![1,n]\!].}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1,n+1]\!]$.
   Si l'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors le n-ième et le $(n+1)$-ième lancers donnent le même résultat, donc le $(n+1)$-ième résultat contribue à la série contenant le n-ième résultat et on a $N_n = N_{n+1}$. On a donc l'égalité d'évènements

$$\boxed{(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}}\,.$$

   Puisque les évènements $(N_n = k)$ et P_n ne dépendent que des tirages 1 à n, on a l'événement $(N_n = k) \cap P_n$ et l'événement P_{n+1} sont indépendants.
   REM : ☞0.5✓ l'indépendance doit être justifiée ici, en particulier $N_n = k$ et P_n ne sont pas indépendants !

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = P((N_n = k) \cap P_n)P(P_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n)}\,.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_n \cap P_{n+1}$, $F_n \cap F_{n+1}$, $F_n \cap P_{n+1}$ et $P_n \cap F_{n+1}$ décrivent les quatre résultats possibles pour les n-ième et $(n+1)$-ième lancers. Ils sont donc deux à deux incompatibles et ont pour réunion l'évènement certain, formant ainsi un système complet d'évènements.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned}
P(N_{n+1} = k) &= P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\
&\quad + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) \\
&= \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap F_n) \\
&\quad + \frac{1}{2} P((N_n = k-1) \cap F_n) + \frac{1}{2} P((N_n = k-1) \cap P_n) \\
&= \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap (P_n \cup F_n)) + \frac{1}{2} P((N_n = k-1) \cap (P_n \cup F_n)) \qquad \text{(incompatibilité)}
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1)}$.

9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n+1} = k) x^k &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1) \right) x^k \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k) x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k-1) x^k .
\end{aligned}$$

Or, on a $P(N_n = n+1) = 0$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k) x^k = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) x^k = G_n(x)$.
Par ailleurs, en effectuant un changement d'indice dans la seconde somme, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k-1) x^k = \sum_{j=0}^{n} P(N_n = j) x^{j+1} = x \sum_{j=0}^{n} P(N_n = j) x^j = x G_n(x)$$

car $P(N_n = 0) = 0$. On en conclut qu'on a $\boxed{G_{n+1}(x) = \frac{1}{2} G_n(x) + \frac{1}{2} x G_n(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x)}$.

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(G_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x) = x$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{G_n(x) = x \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-1}}$.

11. Soit un entier $n \geq 2$. D'après la question 25, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n'(x) = \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-1} + x.(n-1).\frac{1}{2}.\left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-2}$$

donc, en particulier, on a $G_n'(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$. Lorsque $n = 1$, on a $G_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $G_1'(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{E(N_n) = G_n'(1) = \frac{n+1}{2}}$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la variable aléatoire N_n prend ses valeurs dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
La fonction G_n est polynomiale sur $\mathbb{R}$. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) x^k .$$

Par ailleurs, d'après la question 25, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^{n-1}} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}} x^k .$$

Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale sur un intervalle, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a
$\boxed{P(N_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1}}$.
Cela détermine la loi de N_n.

Devoir non surveillé pour le lundi 2 décembre

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Thèmes: Séries entières, algèbre sans réduction

Exercice 1 Centrale PC Math 2 extrait + modifié

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I.A - Dérivées successives

1. ☞1.5✓ Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.
2. ☞1.5✓ Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

☞0.5✓On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

3. ☞1.5✓ Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.
4. ☞1✓Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

5. ☞1✓ Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in I, \quad 2f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$$

☞0.5✓en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

I.B - Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

6. ☞1.5✓ A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2], \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).$$

7. ☞1✓ En déduire la minoration $R \geqslant \pi/2$.
8. ☞1.5✓ Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

9. ☞1.5✓ Montrer
$$\forall x \in I, \quad f(x) = g(x).$$
Considérer les fonctions $\arctan f$ *et* $\arctan g$.
10. ☞1✓ En déduire que $R = \pi/2$.

I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. ☞1✓ Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.
12. ☞0.5✓ En déduire
$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ et } \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

13. ☞1✓ Pour tout entier naturel n, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
14. ☞0.5✓ Rappeler, sans justification, l'expression de t' en fonction de t.
15. ☞2✓ En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}.$$

Correction et sujet fournis par l'UPS :

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

I.A - Dérivées successives

1. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I comme quotient de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur I et, pour tout $x \in I$,
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\cos x)^2 + \sin(x)(\sin(x)+1)}{(\cos x)^2} = \frac{1+\sin x}{(\cos x)^2}, \\
f''(x) &= \frac{(\cos x)^3 + 2\sin x\cos x(1+\sin x)}{(\cos x)^4} = \frac{(\cos x)^2 + 2\sin x + 2(\sin x)^2}{(\cos x)^3} \\
&= \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3} \\
\text{et } f^{(3)}(x) &= \frac{(2\cos x\sin x + 2\cos x)(\cos x)^3 + 3\sin x(\cos x)^2((\sin x)^2 + 2\sin x + 1)}{(\cos x)^6} \\
&= \frac{2(\cos x)^2\sin x + 2(\cos x)^2 + 3(\sin x)^3 + 6(\sin x)^2 + 3\sin x}{(\cos x)^4} \\
&= \frac{(\sin x)^3 + 4(\sin x)^2 + 5\sin x + 2}{(\cos x)^4}.
\end{aligned}$$

R Il faut regarder les questions suivantes pour connaître la forme attendue.

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$ (HR_n).
Initialisation : D'après la question précédente, $P_0 = X+1$, $P_1 = X+1$, $P_2 = X^2+2X+1$ et $P_3 = X^3+4X^2+5X+2$ conviennent.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. et supposons HR_n vérifiée.
Alors, pour tout $x \in I$,
$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left(\frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}\right)' \\
&= \frac{\cos x P_n'(\sin x)(\cos x)^{n+1} + (n+1)\sin x(\cos x)^n P_n(\sin x)}{(\cos x)^{2n+2}} = \frac{(\cos x)^2 P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} \\
&= \frac{(1-(\sin x)^2)P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}
\end{aligned}$$

en posant $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X) \in \mathbb{R}[X]$. (car $P \in \mathbb{R}[X]$ d'après HR_n).
Conclusion : D'où l'existence d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
De plus, cette suite vérifie $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. • *Montrons d'abord l'unicité de la suite (P_n). L'article défini "le" de l'énoncé semble indiquer qu'elle est demandée...*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} = \frac{Q_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
Alors, pour tout $x \in I$, $(P_n - Q_n)(\sin x) = 0$, donc, comme $\sin(I) =]-1,1[$, pour tout $t \in]-1,1[$, $(P_n - Q_n)(t) = 0$, donc $P_n - Q_n$ a une infinité de racines, donc $P_n - Q_n = 0$, donc $P_n = Q_n$.
Il y a donc bien unicité de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
• La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• Montrons alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels (HR_n).
Initialisation : $P_1 = X+1$ et $P_2 = X^2+2X+1$ sont bien unitaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\deg(P_1) = 1$ et $\deg(P_2) = 2$.
Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ et supposons HR_n vérifiée. Alors il existe $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ tel que $P_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et, par suite,

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X) \\
&= (1-X^2)\left(nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1}\right) + (n+1)X\left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k\right) \\
&= nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1} - nX^{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k+1} + (n+1)X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n+1)a_kX^{k+1} \\
&= X^{n+1} + nX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}X^k + (n+1)a_0X + \sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{(n+1-k)a_k}_{\in\mathbb{N}}X^{k+1} \in \mathbb{N}[X]
\end{aligned}$$

comme somme de polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ (et $\mathbb{N}$ est stable par addition). De plus, cette écriture donne immédiatement P_{n+1} unitaire de degré $n+1$.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

4. Pour tout $x \in I$,

$$f(x)^2 + 1 = \frac{(\sin x+1)^2}{(\cos x)^2} + 1 = \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1 + (\cos x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{2+2\sin x}{(\cos x)^2} = 2f'(x).$$

5. • En appliquant la relation obtenue dans la question précédente en $x = 0$, on obtient

$$2f'(0) = (f(0))^2 + 1, \quad \text{ie} \quad 2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en dérivant n fois la relation obtenue à la question précédente, on obtient, via la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, \quad 2f^{(n+1)}(x) &= 2(f')^{(n)}(x) \\
&= \left((f(x))^2+1\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f(x))^{(k)}(f(x))^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)f(x)^{(n-k)}(x).
\end{aligned}$$

En appliquant alors en 0, on a bien la relation demandée.

I.B - Développement en série entière

6. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral et on a, pour tout $x \in [0,\pi/2[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!}f^{(N+1)}(t)dt \\
&= \sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!}\frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}}dt.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0,\pi/2[$, pour tout $t \in [0,x]$, $\frac{(x-t)^N}{N!} \geqslant 0$, $(\cos t)^{N+2} \geqslant 0$ (car $t \in [0,\pi/2[$) et, comme P_{N+1} est à coefficients positifs et $\sin t \geqslant 0$, $P_{N+1}(\sin t) \geqslant 0$.
On a donc $\frac{(x-t)^N}{N!}\frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}} \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,x]$, donc, par positivité de l'intégrale ($x \geqslant 0$),

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}x^n = \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!}\frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}}dt \geqslant 0,$$

donc $\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}x^n \leqslant f(x)$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\alpha_n = f^{(n)}(0) = \frac{P_n(\sin 0)}{(\cos 0)^{n+1}} = P_n(0)$, α_n est le coefficient constant de P_n, donc un élément de $\mathbb{N}$ (même pour $n = 0$ car $P_0 = X + 1$), donc positif.
Pour tout $x \in [0,\pi/2[$ la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!}x^n$ est donc à termes positifs, donc la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!}x^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante, et majorée par $f(x)$ d'après la question précédente, donc convergente, donc $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!}x^n$ converge.
Ceci étant valable pour tout $x \in [0,\pi/2[$, on a bien $R \geqslant \pi/2$.
8. Pour tout $x \in I$, $|x| < R$, donc, par produit de Cauchy de séries entières à l'intérieur du disque de convergence,

$$\begin{aligned}
(g(x))^2 + 1 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}x^n\right)^2 + 1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!}\frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n + 1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\alpha_k\alpha_{n-k}\right)x^n + 1 \\
&= \alpha_0^2 + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_k\alpha_{n-k}\right)x^n \\
&= 2\alpha_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha_{n+1}}{n!}x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)!}x^n \\
&= 2g'(x).
\end{aligned}$$

9. Soit $\varphi = \arctan(f)$ et $\psi = \arctan(g)$.
Pour tout $x \in I$,

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{(f(x))^2+1} = \frac{1}{2} \text{ et } \psi'(x) = \frac{g'(x)}{(g(x))^2+1} = \frac{1}{2}$$

d'après les relations établies aux questions 4 et 8.
De plus, $\varphi(0) = \arctan(f(0)) = \arctan(1) = \pi/4$ et $\psi(0) = \arctan(g(0)) = \arctan(\alpha_0) = \arctan(f(0)) = \pi/4$, donc φ et ψ sont solutions sur l'intervalle I du même problème de Cauchy $\begin{cases} y' = 1/2 \\ y(0) = \pi/4 \end{cases}$, donc $\varphi = \psi$.
Par suite, $f = \tan(\varphi) = \tan(\psi) = g$ sur I.
On aurait aussi pu intégrer la relation $\varphi'(x) = 1/2$, pour trouver $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ sur I, ce qui donne $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ pour tout $x \in I$.
10. Si on avait $R > \pi/2$, alors g, continue sur $]-R,R[$, serait continue en $\pi/2$.
Or $\lim_{x\to\pi/2^-} g(x) = \lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\overbrace{\sin x + 1}^{\to 2}}{\underbrace{\cos x}_{\to 0^+}} = +\infty$, donc g n'est pas continue en $\pi/2$, donc $R \leqslant \pi/2$, et, par suite, avec la minoration trouvée en 7, on a bien $R = \pi/2$.

I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Raisonnons par analyse-synthèse : soit $h : I \to \mathbb{R}$.
Analyse : S'il existe p paire et i impaire telle que $h = p + i$ sur I, alors pour tout $x \in I$,

$$h(x) = p(x) + i(x) \text{ et } h(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x),$$

donc $p(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$.
Synthèse : Réciproquement, soit $p : x \in I \mapsto \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $i : x \in I \mapsto \frac{h(x)-h(-x)}{2}$. Alors :

- pour tout $x \in I$, $-x \in I$ et $p(-x) = \frac{h(-x)+h(-(-x))}{2} = \frac{h(x)+h(-x)}{2} = p(x)$, donc p est paire
- pour tout $x \in I$, $-x \in I$ et $i(-x) = \frac{h(-x)-h(-(-x))}{2} = -\frac{h(x)-h(-x)}{2} = -i(x)$, donc i est impaire
- pour tout $x \in I$, $p(x)+i(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2} + \frac{h(x)-h(-x)}{2} = h(x)$, donc $h = p+i$.

Conclusion : D'où, par analyse-synthèse, l'existence et l'unicité demandées.

12. Pour tout $x \in I$,
$$f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$
où $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ est paire et $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ est impaire.
Par ailleurs, pour tout $x \in I$, comme les séries qui aparaissent ci-dessous convergent,
$$f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$
où $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$ est paire et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ est impaire.
D'où, d'après l'unicité de la décomposition prouvée à la question précédente, on a
$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ et } \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

13. tan est développable en série entière sur I, donc coïncide avec sa série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$ sur I, donc, par unicité du développement en série entière de tan sur I, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\tan^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } \tan^{(2n+1)}(0) = \alpha_{2n+1}.$$

14. Pour tout $x \in I$, $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2$, donc $t' = 1 + t^2$.

15. Pour tout $x \in I$, $t'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} x^{2n}$.
Par produit de Cauchy de série entières sur le disque ouvert de convergence, on a aussi, pour tout $x \in I$,
$$\begin{aligned} t'(x) = (t(x))^2 + 1 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)^2 + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} \frac{\tan^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \right) x^n + 1. \end{aligned}$$
D'où, par unicité du développement en série entière de t' sur I, on a, $\alpha_1 = 0 + 1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} \frac{\tan^{(2n-k)}(0)}{(2n-k)!} \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \tan^{(k)}(0) \tan^{(2n-k)}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} \underbrace{\tan^{(k)}(0)}_{=0} \tan^{(2n-k)}(0) + \frac{1}{(2n)!} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k} \tan^{(k)}(0) \tan^{(2n-k)}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \tan^{(2k-1)}(0) \tan^{(2n-(2k-1))}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1} \quad \text{(d'après 13 avec } 2k-1 \text{ et } 2n-2k+1 \text{ impairs)}, \end{aligned}$$
donc, en multipliant de part et d'autre par $(2n)!$, on a bien :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}.$$

Exercice 2 E3A PC 2017

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n(x) = \frac{1}{n^x}$

1. ☞0.5✓ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.
2. ☞1✓ Soit $a \in]1;\ +\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$.
   Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) ☞0.5✓ Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$$
   (b) ☞2✓ Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.
4. ☞0.5✓ Préciser le sens de variation de ζ.
5. On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
   (a) ☞0.5✓ Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.
   (b) ☞1✓ Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
   $$\forall x \geqslant 2,\ 1 \leqslant \zeta(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$
   (c) ☞1✓ En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$.
6. ☞2✓ On considère à présent $h \in]0;\ +\infty[$.
   A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.
7. ☞1✓ Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.
8. On pose : $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
   (a) ☞0.5✓ Justifier que F est bien définie.
   (b) ☞1✓ Monter que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) ☞1✓ Montrer que : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.
   (d) ☞0.5✓ Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

Correction : corrigé fourni par l'UPS, légèrement modifié.

1. L'ensemble de définition de la fonction ζ est $]1;\ +\infty[$ car à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ (c'est du cours).
2. Soit $a \in]1;\ +\infty[$.
   On a alors :
   $$\forall n \geqslant 1,\ \forall x > a,\ 0 < \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}$$
   Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ converge, ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[a;\ +\infty[$.
   Les applications $x \to \frac{1}{n^x}$ étant continues, la convergence uniforme donne la continuité de ζ sur $[a;\ +\infty[$.
   L'élément a étant arbitrairement choisi dans $]1;\ +\infty[$, on a donc convergence normale (donc uniforme) sur tout segment de $]1;\ +\infty[$.
   Les applications $x \to \frac{1}{n^x}$ étant continues, la convergence uniforme sur tout compact donne alors la continuité de la fonction ζ sur $]1;\ +\infty[$.
3. (a) L'application f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On montre alors par récurrence (à rédiger) la relation :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$$
   NB : c'est le sujet de la question, donc n'indiquez pas qu'il s'agit d'une récurrence immédiate. Il faut la faire.

(b) Soit $a \in]1;\ +\infty[$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant 1,\ \forall x > a,\ \left|f_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$$

Soit $k \in N^*$, on montre alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$ converge. Pour cela, on considère $b = \frac{1+a}{2}$ et on vérifie que

$$\frac{(\ln(n))^k}{n^a} \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^b}\right)$$

Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^b}$ converge car $b > 1$, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$ converge.
Ainsi, la série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a;\ +\infty[$. On a donc convergence uniforme sur tout segment de $]1;\ +\infty[$ car a est arbitrairement choisi dans $]1;\ +\infty[$.
Ainsi :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est $\mathscr{C}^\infty$,
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment de $]1;\ +\infty[$.

La fonction ζ est alors de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
On a de plus :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\ \forall x > 1\ \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$$

4. On a :

$$\forall x > 1\ \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln(n)}{n^x} < 0$$

Ainsi, la fonction ζ est décroissante.
On peut aussi indiquer que à n fixé, $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante, donc $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$ est décroissante donc par limite simple $x \mapsto \zeta(x)$ est décroissante. (rappel : on n'a pas la stricte décroissance dans ce cas).

5. (a) La fonction ζ possède une limite finie en $+\infty$ car elle est décroissante et positive (donc minorée) sur $]1;\ +\infty[$.
On peut aussi utiliser le théorème de la double limite (et ainsi avoir la solution des questions suivantes) :

$$\text{à } n \text{ fixé},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme on a convergence uniforme sur $[2, +\infty[$ (on choisit 2 arbitrairement mais il faut choisir), on peut utiliser le théorème de la double limite :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant \zeta(x) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

(c) **REM :** il y a deux variables, on ne peut donc pas dire que c'est le théorème des gendarmes.
Le plus simple est de passer par les ε.
On considère $\varepsilon > 0$ et on sait qu'il existe un N_0 tel que :

$$0 \leqslant \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon$$

Pour ce N_0, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{N_0}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n^x} \qquad \text{par limite d'une somme finie de termes}$$
$$=1$$

Donc, il existe un $A\in\mathbb{R}$, tel que pour $x\geqslant A$, $\sum\limits_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^x}\leqslant 1+\varepsilon$.

Pour un $x\geqslant A$, on aura donc :

$$1\leqslant\zeta(x)\leqslant 1+2\varepsilon$$

ce qui permet d'assurer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$.

6. Soit $h\in]0;\ +\infty[$. L'application $t\mapsto\frac{1}{t^{1+h}}$ étant décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on applique le résultat du cours (refaire le dessin pour suivre le raisonnement) :

$$\forall n\geqslant 2,\ \int_n^{n+1}\frac{dt}{t^{h+1}}\leqslant\frac{1}{n^{h+1}}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^{h+1}}$$

en sommant cela donne (voir le cours et le dessin correspondant) :

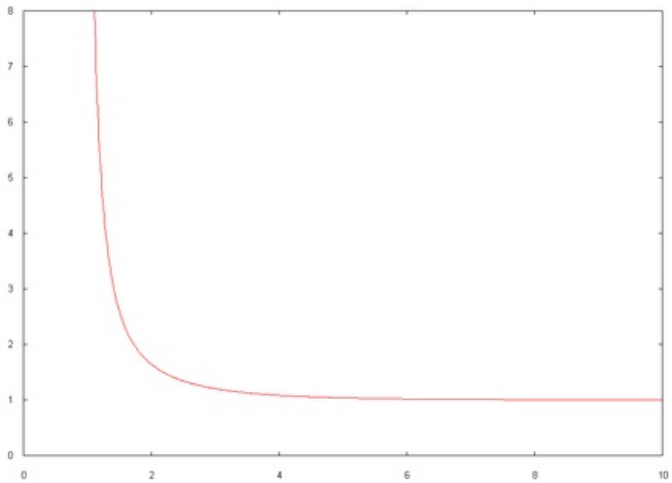
$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{h+1}}\leqslant\zeta(1+h)\leqslant 1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{h+1}}$$

enfin, comme $\dfrac{1}{h}=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{h+1}}$, on obtient :

$$\frac{1}{h}\leqslant\zeta(1+h)\leqslant 1+\frac{1}{h} \qquad \text{et} \qquad 1+\frac{1}{h}\underset{h\to 0}{\sim}\frac{1}{h}$$

Ainsi :$\zeta(x)\underset{x\to 1}{\sim}\frac{1}{x-1}$.

7. Allure de la représentation graphique de ζ



On attend :
- la décroissance,
- la limite en $+\infty$,
- la limite et la forme en 1.
- Éventuellement la valeur en 2

8. (a) Soit $x>0$. La suite réelle $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle.

   Le théorème spécial des séries alternées affirme alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^x}$ converge. D'où l'existence de F.

   REM : c'est à x fixé ! dire $\frac{1}{n^x}$ est décroissante n'a pas de sens (en fonction de x ou de n ?).

   (b) De plus, le théorème affirme également que pour tout naturel $n\geqslant 1$, on a (le reste est inférieur au premier terme négligé) :

$$\forall x>0,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^x}\right|\leqslant\frac{1}{n^x}$$

Ainsi, pour $a > 0$, on a :

$$\forall x > a, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x} \right| \leqslant \frac{1}{n^a}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0$, cela prouve que la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformément sur $[a;\ +\infty[$.

Comme a est arbitrairement choisi dans $\mathbb{R}_+^*$, on a donc convergence sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Comme $x \mapsto \frac{(-1)^k}{k^x}$ est une fonction continue, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Soit $x > 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\zeta(x) + F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^x} \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{2}{n^x} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^x} \\
&= 2^{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 2^{1-x}\zeta(x)
\end{aligned}$$

(d) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{1-x} = 0$, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -1$.

Exercice 3 CCINP PSI 2018 (extrait de la partie III)

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{4}$$

1. ☞0.5✓ Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4).

On suppose qu'il existe une série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme notée J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$.

2. ☞2✓ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \dfrac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}. \end{cases}$$

3. ☞0.5✓ Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$.

4. ☞1✓ Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$.
Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

5. ☞1✓ Montrer que si $\sum_{k\geqslant 0}\beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} & \beta_0 & = & 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, & \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k} & = & 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0<r<R_\alpha$.

6. ☞1✓ Montrer qu'il existe un réel $M>0$ tel que pour tout $k\in\mathbb{N}$: $|\alpha_k|\leqslant\dfrac{M}{r^k}$.
7. ☞2✓ Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k|\leqslant\frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

8. ☞1✓ Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta>0$ de la série entière $\sum_{k\geqslant 0}\beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

9. ☞2✓ Soient $r>0$ et λ une fonction de classe C^2 sur $]0,r[$.
Montrer que la fonction $y\colon x\longmapsto\lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0,r[$ si et seulement si la fonction $x\colon\longmapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0,r[$.

10. ☞1✓ Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

11. ☞1.5✓ En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta>0$ telle que :

$$x\longmapsto\eta(x)+J_0(x)\ \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0,R_\eta[$.

12. ☞1.5✓ En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0,R_\eta[$. On admettra que l'ensemble des solutions de (4) est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

Correction et sujet fournis par l'ups

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est

$$R=\sup\left\{r\geqslant 0\ /\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\right\}\quad\text{et}\quad R\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}.$$

2. J_0 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et se dérive terme à terme.

$$\begin{aligned}
\forall x\in]-R,R[,\quad J_0(x)&=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k x^k\\
J_0'(x)&=\sum_{k=1}^{+\infty}kc_k x^{k-1}\\
J_0''(x)&=\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)c_k x^{k-2}\\
x^2J_0''(x)+xJ_0'(x)+x^2J_0(x)&=\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)c_k x^k+\sum_{k=1}^{+\infty}kc_k x^k+\sum_{k=2}^{+\infty}c_{k-2}x^k\\
x^2J_0''(x)+xJ_0'(x)+x^2J_0(x)&=c_1x+\sum_{k=2}^{+\infty}(k^2c_k+c_{k-2})x^k.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière (sous réserve que $R>0$), comme J_0 est solution de (4), on en déduit :

$$c_1=0\quad\text{et}\quad\forall k\geqslant 2,\quad c_k=-\frac{c_{k-2}}{k^2}.$$

Comme, de plus, $c_0 = 1$ par hypothèse, on montre facilement par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_{2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}.$$

3. On s'intéresse à la série entière $\sum c_{2k} x^{2k}$. Une série entière converge toujours pour $x = 0$.
Prenons x dans $\mathbb{R}^*$ et notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $\quad u_k(x) = c_{2k} x^{2k}$. Ainsi, $u_k(x) \neq 0$ et

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{x^2}{4(k+1)^2} \right| = 0 < 1.$$

Donc le critère de d'Alembert permet de conclure que cette série entière converge pour tout réel x et que son rayon de convergence est donc $R = +\infty$.

On a donc prouvé que la somme de cette série entière, appelée J_0 dans l'énoncé, est une solution de (4) sur $\mathbb{R}$.

4. J_0 est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur le segment $[0, r]$ et donc bornée sur ce segment.
J_0 n'est pas la fonction nulle (par unicité du développement en série entière), donc si (J_0, f) est une famille liée de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f = aJ_0$ et f est ainsi bornée sur $]0, r[$ et donc au voisinage de 0.
5. Par produit de Cauchy, appliqué aux séries entières (absolument convergentes dans l'intervalle ouvert de convergence) :

$$\forall x \in]-R_\alpha, R_\alpha[\cap]-R_\beta, R_\beta[, \quad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} \right) x^n.$$

Or, cette somme vaut 1 par hypothèse donc, par unicité d'écriture d'une série entière, on a :

$$\alpha_0 \beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

Comme $\alpha_0 = 1$ par hypothèse, on obtient :

$$\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

6. Puisque $0 < r < R_\alpha$, par définition du rayon de convergence, la suite $(\alpha_k r^k)_k$ est bornée, donc :

$$\exists M > 0 \ / \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad |\alpha_k r^k| \leqslant M \quad i.e. \quad |\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}.$$

7. Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, H_k l'assertion : « $|\beta_k| \leqslant \dfrac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$ ».

- Initialisation : a relation (5) fournit $\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 = 0$. Donc $\beta_1 = -\alpha_1$ et $|\beta_1| = |\alpha_1| \leqslant \dfrac{M}{r}$. Cela montre H_1.
- Hérédité : Prenons k dans $\mathbb{N}^*$ tel que H_1, ..., H_k soient vraies et montrons que H_{k+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
|\beta_{k+1}| &= \left| -\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k+1-j}\, \beta_j \right| \quad (\text{car } \alpha_0 = 1) \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k} |\alpha_{k+1-j}|\ |\beta_j| \\
&\leqslant \frac{M}{r^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{M}{r^{k+1-j}} \times \frac{M(M+1)^{j-1}}{r^j} \quad (\text{d'après Q.24 et l'hyp. de récurrence}) \\
&\leqslant \frac{M}{r^{k+1}} + \frac{M^2}{r^{k+1}} \left| \frac{(M+1)^k - 1}{(M+1) - 1} \right| \\
&\leqslant \frac{M(M+1)^k}{r^{k+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi, H_{k+1} est vraie et l'on a établi le résultat souhaité par récurrence.

8. On déduit de la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |\beta_k x^k| \leqslant \frac{M}{M+1}\left|\frac{(M+1)x}{r}\right|^k.$$

Les théorèmes de comparaison sur les séries permettent d'affirmer que si $\left|\frac{(M+1)x}{r}\right| < 1$, la série géométrique de terme général $\left(\frac{(M+1)x}{r}\right)^k$ converge et donc que la série $\sum \beta_k x^k$ est absolument convergente. La série $\sum \beta_k x^k$ est donc absolument convergente pourvu que $|x| \leqslant \frac{r}{M+1}$; son rayon de convergence vérifie donc $R_\beta \geqslant \frac{r}{M+1} > 0$.

9. On note : $\forall x \in]0,r[$, $y(x) = \lambda(x)J_0(x)$avec λ fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,r[$. Ainsi, y est aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,r[$. Comme J_0 est solution de (4), on obtient

$$\forall x \in]0,r[: \ x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = x^2\lambda''(x)J_0(x) + 2x^2\lambda'(x)J_0'(x) + x\lambda'(x)J_0(x).$$

De plus , en notant $\forall x \in]0,r[$, $h(x) = x\lambda'(x)J_0^2(x)$, on a

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,r[: \ h'(x) &= \lambda'(x)J_0^2(x) + x\lambda''(x)J_0^2(x) + x\lambda'(x)\ 2J_0(x)J_0'(x)\\ &= \frac{J_0(x)}{x}\ \left(x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x)\right).\end{aligned}$$

- Il est donc clair que si y est solution de (4) sur $]0,r[$ alors h est de dérivée nulle sur $]0,r[$.
- Réciproquement, supposons que $h'(x) = 0$ pour tout $x \in]0,r[$. Notons $g : x \longmapsto x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x)$. Supposons qu'il existe $x_0 \in]0,r[$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Par continuité, g serait non nulle sur un sous-intervalle de $]0,r[$ centré en x_0 et J_0 serait donc nulle sur cet intervalle. Comme J_0 est solution de $u'' + \frac{1}{x}u' + u = 0$ sur $]0,r[$, J_0 serait identiquement nulle sur $]0,r[$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz comme unique solution de (4) s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0. Elle serait donc nulle en 0 par continuité. Cela contredirait la définition de J_0 $(c_0 = 1)$. Donc g est nulle et y est solution de (4) sur $]0,r[$.

10. Par théorème sur le produit de Cauchy des séries entières, J_0^2 est somme d'une série entière de rayon $+\infty$. De plus, $J_0^2(0) = 1$.

11. Cherchons une fonction λ et un réel $r > 0$ tels que $\forall x \in]0,r[: \ xJ_0^2(x)\lambda'(x) = 1$.
La question **Q27.** nous assurera alors que $(x \longmapsto \lambda(x)J_0(x))$ est solution de (4) sur $]0,r[$.
La question **Q28.** permet d'appliquer le paragraphe sur l'inverse d'une série entière non nulle en 0 à J_0^2.
Il existe donc une série entière $\sum \beta_k x^k$ de rayon $r > 0$ et telle que $\beta_0 = 1$ qui vérifie

$$\forall x \in]0,r[: \ J_0^2(x)\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1, \quad \therefore \quad xJ_0^2(x)\ \left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1}\right) = 1.$$

En prenant

$$\forall x \in]0,r[: \ \lambda(x) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \frac{x^k}{k},$$

on obtient bien

$$\forall x \in]0,r[: \ xJ_0^2(x)\lambda'(x) = 1.$$

Notons

$$\forall x \in]0,r[: \ \eta(x) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \frac{x^k}{k}\right) \times J_0(x).$$

Par produit de Cauchy, η est la somme d'une série entière de rayon $R_\eta > 0$ et, d'après la question **Q27.**,

$$\left(J_1 : x \longmapsto \eta(x) + \ln(x)\ J_0(x)\right) \text{ est solution de } (4) \text{ sur }]0,R_\eta[.$$

12. Puisque $J_0(0) = 1$, la fonction $J_1 = \eta + J_0 \times \ln$ n'est pas bornée sur $]0,R_\eta[$.
D'après la question **Q22.**, la famille (J_0, J_1) est donc libre dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,R_\eta[$ et l'on a une base de solutions de (4). On en déduit que l'ensemble des solutions de (4) sur $]0,R_\eta[$ est

$$\left\{aJ_0 + b(\eta + J_0 \times \ln)\ /\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(J_0, \eta + J_0 \times \ln).$$

Devoir surveillé Informatique mercredi 27 novembre

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Calculatrice interdite durée 2h
Thèmes: Programmation en Python

Exercice 1 MP CCINP 2019

Dans cet exercice "Algorithme de décomposition primaire d'un entier" (*Informatique pour tous*), on se propose d'écrire un algorithme pour décomposer un entier en produit de nombres premiers. Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage **Python**. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.

> On définit la valuation p-adique [de n] pour p nombre premier et n entier naturel non nul.
> Si p divise n, on note $v_p(n)$ le plus grand entier k tel que p^k divise n.
> Si p ne divise pas n, on pose $v_p(n) = 0$.
> L'entier $v_p(n)$ s'appelle la valuation p-adique de n.

Q1. ☞1.5✓ Écrire une fonction booléenne `estPremier(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie le booléen `True` si n est premier et le booléen `False` sinon. On pourra utiliser le critère suivant : un entier $n \geq 2$ qui n'est divisible par aucun entier $d \geq 2$ tel que $d^2 \leq n$, est premier.

Q2. ☞1.5✓ En déduire une fonction `liste_premiers(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et renvoie la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Q3. ☞1.5✓ Pour calculer la valuation 2-adique de 40, on peut utiliser la méthode suivante :

- 40 est divisible par 2 et le quotient vaut 20.
- 20 est divisible par 2 et le quotient vaut 10.
- 10 est divisible par 2 et le quotient vaut 5.
- 5 n'est pas divisible par 2.

La valuation 2-adique de 40 vaut donc 3.

Écrire une fonction `valuation_p_adique(n,p)` **non récursive** qui implémente cet algorithme. Elle prend en arguments un entier naturel n non nul et un nombre premier p et renvoie la valuation p-adique de n. Par exemple, puisque $40 = 2^3 \times 5$, `valuation_p_adique(40,2)` renvoie 3, `valuation_p_adique(40,5)` renvoie 1 et `valuation_p_adique(40, 7)` renvoie 0.

Q4. ☞1.5✓ Écrire une deuxième fonction cette fois-ci **récursive** `val_p_adique(n,p)` qui renvoie la valuation p-adique de n.

Q5. ☞1.5✓ En déduire une fonction `decomposition_facteurs_premiers(n)` qui calcule la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$.
Cette fonction doit renvoyer la liste des couples $(p, v_p(n))$ pour tous les nombres premiers p qui divisent n.
Par exemple, `decomposition_facteurs_premiers(40)` renvoie la liste `[[2, 3], [5, 1]]`.

Sujet et correction fournis par l'UPS :

Q1. En respectant l'énoncé, avec un algorithme très peu optimisé donc :

```python
def  estPremier}(n):
    if n<=1:
        return False
    if n==2:
        return True
    p=2
    r=np.sqrt(n) # sale: ce n'est pas un entier...
    while p<=r:
        if n % p == 0:
            return False
        p+=1
    return True
```

Q2. Toujours sans optimiser :

```python
def listePremiers(n):
    li=[]
    p=2
    for p in range(n):
        if estPremier(p):
            li.append(p)
    return li
```

Q3. Il faut un compteur.

```python
def valuation_p_adique(n,p):
    valuation = 0
    nAlias = n
    while nAlias % p>0:
        valuation +=1
        nAlias = nAlias/p
    return valuation
```

Q4. C'est toujours plus concis en récursif.

```python
def val(n,p):
    if n % p != 0:
       return 0
    return val(n/p, p)+1
```

Q5.

```python
def decomp_fact_premiers(n):
    if n==1:
        return []
    li_fact = listePremiers(n)
    resu = []
    for p in li_fact:
        if n % p == 0:
            resu.append([p,val(n,p)])
    return resu
```

donne bien à l'éxécution

```python
print(decomp_fact_premiers(40))
[[2, 3], [5, 1]]
```

Exercice 2 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathscr{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$.

Une permutation de $\mathscr{S}_n$ sera représentée en Python par une liste, dont l'élément d'indice `i` est l'image de `i` par cette permutation.

Par exemple, la liste `[3,1,0,2]` représente la permutation $\sigma \in \mathscr{S}_4$ définie par $\sigma(0) = 3,\ \sigma(1) = 1,\ \sigma(2) = 0$ et $\sigma(3) = 2$.

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser librement les tests Python du type `x in L` (respectivement `x not in L`) permettant de vérifier si `x` est présent dans la liste `L` (respectivement de vérifier si `x` n'est pas présent dans la liste `L`).

Q1. ☞0.5+0.5✓ Si `s` est une liste Python représentant une permutation de $\mathscr{S}_4$, quelle instruction Python permet de trouver l'image de `1` par cette permutation ?
On considère la permutation de $\mathscr{S}_4$ qui échange des éléments 2 et 3 et qui laisse les autres éléments inchangés. Par quelle liste est-elle représentée en Python ?

Q2. ☞1.5✓ Écrire une fonction Python `comp(s1,s2)` prenant en entrée deux listes représentant des permutations σ_1 et σ_2 du même groupe de permutations et renvoyant la liste représentant la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Q3. ☞2✓ Écrire une fonction Python `inv(s)` prenant en entrée une liste représentant une permutation σ et renvoyant la liste représentant σ^{-1}.

Q4. ☞3✓ On souhaite tester si un sous-ensemble `G` de $\mathscr{S}_n$ est ou non un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$.
On rappelle qu'une partie G de $\mathscr{S}_n$ est un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$ si :

- $id \in G$
- $\forall \sigma \in G,\ \sigma^{-1} \in G$.
- $\forall (\sigma_1, \sigma_2) \in G^2,\ \sigma_1 \circ \sigma_2 \in G$.

Écrire une fonction Python `groupe(G)` prenant en entrée une liste de listes, où chaque sous-liste représente une permutation de $\mathscr{S}_n$ et renvoyant `True` s'il s'agit bien d'un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$, `False` sinon.

Q5. ☞3✓ Soit σ une permutation de $\mathscr{S}_n$.
On rappelle que le sous-groupe de $\mathscr{S}_n$ engendré par σ est la partie de $\mathscr{S}_n$ définie par :

$$\left\{\sigma^k \middle| k \in \mathbb{N}\right\}$$

Comme $\mathscr{S}_n$ est fini, on peut montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que $s^{k_0} = Id$. Le sous-groupe de $\mathscr{S}_n$ engendré par σ est donc :

$$\left\{\sigma^k \middle| k \in [\![0, k_0]\!]\right\}$$

Écrire une fonction Python `cyclique(s)` prenant en entrée une liste `s` représentant une permutation σ de $\mathscr{S}_n$ et renvoyant le sous-groupe de $\mathscr{S}_n$ engendré par σ sous la forme d'une liste de listes.

Correction et sujet fournis par l'UPS

Q1. En Python, cela se fait avec `s[1]`.
La transposition `(2 3)` est une permutation qui échange les éléments `2` et `3` et laisse `0` et `1`, donc la liste Python représentant la transposition `(2 3)` dans $\mathscr{S}_4$ serait `[0, 1, 3, 2]`.

Q2. Fonction `comp` pour la composition de permutations :

```python
def comp(s1, s2):
    n = len(s1)
    result = [0] * n
    for i in range(n):
        result[i] = s1[s2[i]]
    return result
```

Q3. Fonction `inv(s)` pour l'inverse d'une permutation :

```python
def inv(s):
    n = len(s)
    result = [0] * n
    for i in range(n):
        result[s[i]] = i
    return result
```

Q4. Pour vérifier si un sous-ensemble G de $\mathscr{S}_n$ est un sous-groupe, nous devons vérifier trois conditions : l'élément neutre (l'identité) est-il présent, est-il stable par la composition et l'inversion. Voici une fonction Python `groupe` pour cela :

```python
def groupe(G):
    n = len(G[0])
    # Verifier l'identite
    identity = list(range(n))
    if identity not in G:
        return False

    # Verifier la stabilite par composition
    for s1 in G:
        for s2 in G:
            if comp(s1, s2) not in G:
                return False

    # Verifier la stabilite par l'inversion
    for s in G:
        if inv(s) not in G:
            return False

    return True
```

Q5. Pour trouver le sous-groupe engendré par une permutation, nous devons composer successivement la permutation jusqu'à ce que nous revenions à la permutation initiale. Voici une fonction Python `eyelique` pour cela :

```python
def eyelique(s):
    subgroup = [s]
    current = s
    while True:
        current = comp(s, current)
        if current == s:
            break
        subgroup.append(current)
     return subgroup
```

NB : les fonctions Python sont données seulement à titre indicatif .

Exercice 3 Mysql CCINP MP math1 exo1

On considère deux tables : CLIENTS et PARTENAIRES. La première contient des informations sur les clients et la deuxième permet d'identifier qui sont les partenaires des clients.

Un client peut avoir plusieurs partenaires et un partenaire peut avoir plusieurs clients.

La table CLIENTS contient les attributs suivants :

- `id` : identifiant d'un individu (entier), clé primaire ;
- `nom` (chaîne de caractères) ;
- `prenom` (chaîne de caractères) ;
- `ville` (chaîne de caractères) ;
- `email` (chaîne de caractères).

La table PARTENAIRES contient les attributs suivants :

- `id` : identifiant de suivi (entier), clé primaire ;
- `id_client` : identifiant du client représenté par l'attribut **id** dans la table CLIENTS (entier) ;
- `partenaire` : nom du partenaire (chaîne de caractères).

1. ☞1✓ Écrire une requête SQL permettant d'extraire les identifiants de tous les clients provenant de la ville de "Toulouse".
2. ☞1.5✓ Écrire une requête SQL permettant d'extraire les emails de tous les clients ayant "SCEI" comme partenaire.
3. ☞1.5✓ Écrire une requête SQL permettant de calculer le nombre de clients par ville.
   On affichera deux colonnes : la ville et le nombre de clients de cette ville.
4. ☞2✓ Écrire une requête SQL permettant de déterminer les partenaires ayant plus de 50 clients.
   On affichera deux colonnes : le nom du partenaire et le nombres de clients (qui doit donc être supérieur à 50).

Correction :

1. C'est une sélection :

```sql
SELECT id FROM CLIENTS WHERE ville = "Toulouse"
```

2. Il faut joindre les deux tables.

```sql
SELECT CLIENTS.email FROM CLIENTS
JOIN PARTENAIRES ON PARTENAIRES.id client = CLIENTS.id
WHERE PARTENAIRES.partenaire = "SCEI"
```

3. Il faut grouper par ville.

```sql
SELECT villes, COUNT(*)  FROM CLIENTS
GROUP BY villes
```

4. Jointure + agrégation + sélection après agrégation :

```sql
SELECT PARTENAIRE.partenaire , COUNT(*) AS nbrClients
FROM CLIENTS
JOIN PARTENAIRES ON PARTENAIRES.id client = CLIENTS.id
GROUP BY PARTENAIRE.partenaire
HAVING nbrClients >= 50
```

Exercice 4 **Étude d'une suite récurrente.**

1. ☞1.5✓ Soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^x - 2$. Écrire une fonction en Python permettant d'obtenir le graphe représentant la fonction f sur $[-2,-1]$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.
2. ☞1.5✓ On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 2. \end{cases}$$

   Écrire une fonction `suite` prenant pour argument un entier n et retournant la valeur du terme u_n.
3. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x - 2$.
   (a) ☞1✓ **Question mathématique** Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet sur $]-\infty, 0[$ une solution et une seule. On note α cette solution. Vérifier que : $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1$.
   (b) ☞1.5✓ Écrire une fonction `valeur_approchee` en Python retournant par la méthode de dichotomie une valeur approchée par défaut de α à 10^{-4} près.
4. ☞2✓ **Question mathématique** Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

1. Bien construire la liste des X et la liste des Y pour `plot`.

```python
def f(x):
    return np.exp(x) - 2

def trace()
    X = np.linspace(-3, 0, 100)
    Y = [f(x) for x in X]
    plt.plot(X, Y, label='courbe représentatice de f')
    plt.plot(X, X, label='première bissectrice')
    plt.title("Suite récurrente")
    plt.legend()
    plt.grid(True)
```

   ou encore avec des array :

```python
X = np.linspace(-3, 0, 100)
Y = np.exp(X) - 2
plt.plot(X, Y)
```

2. Simple application de l'instruction $x = f(x)$:

```python
def u(n):
  x = -1
  for i in range(1, n + 1):
    x = f(x)
  return x
```

3. (a) On vérifie que φ est dérivable et $\varphi'(x) = e^x - 1$. Ainsi φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.
   On trouve ensuite $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\varphi(0) = -2$.
   On applique ensuite le théorème des valeurs intermédiaires.
   Bien construire le tableau de variation en mettant le maximum d'information.
   (b) On attend l'algorithme de dichotomie.

```python
def phi(x) :
  return np.epx(x) - 2 -x

a,b=-2,-1
eps=1E-4
while b - a > eps:
  c = (a + b) / 2
  if phi(a) * phi(c) < 0:
    b = c
  else:
    a = c
  return a
```

4. On démontre par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-2,-1]$$

Rappel : toujours commencer par chercher un intervalle stable.
On note donc $\mathscr{P}(n)$: "$u_n \in [-2,-1]$".
$\mathscr{P}(0)$ est évident.
Si n est tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, on a alors :

$$e^{u_n} < 1 \text{ donc } u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \leqslant -1$$
$$e^{u_n} > 0 \text{ donc } u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \geqslant -2$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-2,-1]$$

On a ensuite :

$$\forall x \in [-2,-1],\ \varphi(x) \leqslant 0 \text{ et donc } e^x - 2 \leqslant x$$

on remplace x par u_n (ce qui est bien possible car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-2,-1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$$

Ce qui montre que (u_n) est décroissante.
La suite est décroissante et minorée donc converge vers une limite $l \leqslant 0$. Cette limite est solution de $\varphi(l) = 0$, et donc $l = \alpha$. Ainsi, (u_n) converge vers α.

Devoir surveillé 3 — Samedi 7 décembre

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Calculatrice interdite — Durée 4h
Thèmes: Séries entières, algèbre sans réduction

Exercice 1 ☞3✓**Question de cours :** exercice fait en classe entière.

On note $E = \mathscr{C}^1\Big([0,1],\mathbb{R}\Big)$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note aussi :

$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\}$$

Pour $k \in \{0,1,2\}$, on note : $e_k : x \longmapsto x^k$ et $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.
Montrer que F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E.

Exercice 2 **E3A PC MATH 2 2018** Sujet complet : durée prévue 3h.

L'objet de ce problème est détudier les éventuelles solutions de l'équation :

$$\ln(x) = ax$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé et $x > 0$ est l'inconnue.

☞3✓**Partie I. Etude de l'équation** (E_a)

1. On se fixe, dans cette question, un réel a quelconque.
   (a) ☞0.5✓ Montrer que si $a \in]-\infty, 0]$, l'équation (E_a) admet une unique solution $\alpha \in]0,1]$.
   (b) ☞0.5✓ Montrer que que si $a \in]0, \frac{1}{e}[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions α et β vérifiant $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e, +\infty[$.
   (c) ☞0.5✓ Montrer que si $a = \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on donnera la valeur.
   (d) ☞0.5✓ Montrer que si $a > \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.
2. ☞1✓ Illustrer sur quatre graphiques différents les cas où $a \in]-\infty, 0]$, $a \in]0, \frac{1}{e}[$, $a = \frac{1}{e}$ et $a > \frac{1}{e}$ (on représentera la fonction logarithme ainsi que la droite d'équation $y = ax$)

Partie II. Etude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'équation fonctionnelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (R)$$

où l'inconnue est une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.

1. ☞0.5✓ Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solutions de (R).
2. ☞0.5✓ Soit φ une solution de (R).
   Montrer que :
   $$\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0.$$
3. Soit φ une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.
   (a) ☞2✓ Donner la valeur de $\varphi(0)$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) > 0$.
   (b) ☞1.5✓ Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(nx) = (\varphi(x))^n.$$
   (c) ☞0.5✓ Montrer que
   $$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m.$$

(d) ☞0.5✓ Déduire des questions précédentes que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}.$$

(e) ☞1✓ Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers x ($\lfloor \cdot \rfloor$ désignant la fonction partie entière).

(f) ☞2✓ Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = (\varphi(1))^x.$$

Partie III. Etude d'une suite de polynômes

On considère pour la suite de ce problème la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X+n)^{n-1}.$$

1. (a) ☞0.5✓ Expliciter les polynômes P_1 et P_2.
   (b) ☞0.5✓ Donner la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. ☞1✓ Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = P_{n-1}(x+1).$$

3. ☞3✓ En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)$$

(on pourra procéder par récurrence sur $\mathbb{N}$).

Partie IV. Retour sur l'équation (E_a)

Dans cette partie on note α_a **la plus petite** solution, si elle existe, de l'équation (E_a).

1. (a) ☞0.5✓ Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad (x+n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^x n^{n-1}$.
   (b) ☞0.5+1✓ Rappeler la formule de Stirling puis montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ fixés, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} P_n(x) a^n$ converge absolument si et seulement si $|a| \leqslant \dfrac{1}{e}$.
2. Dans cette question on se fixe un réel a de $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ et on note F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) a^n.$$

   (a) ☞1✓ Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) ☞0.5✓ Rappeler le résultat de cours sur le produit de Cauchy de deux séries.
   (c) ☞1✓ En utilisant les résultats de la partie III., montrer que F_a est solution de (R) et en déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = (F_a(1))^x.$$

   (d) ☞1.5✓ Montrer que F_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a'(x) = a F_a(x+1).$$

   (e) ☞1✓ En calculant $F_a'(0)$ de deux façons différentes, montrer que $F_a(1)$ est solution de (E_a).
3. On note G la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ par $G(a) = F_a(1)$.
   (a) ☞1✓ Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ et monotone sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$.
   (b) ☞1✓ Expliciter $G\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right)$, image de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ par la fonction G.
   (c) ☞1✓ Conclure que

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad F_a(1) = \alpha_a.$$

4. ☞1✓ Soit C un réel tel que $1 \leqslant C \leqslant e^{\frac{1}{e}}$. Montrer que l'équation $y^y = C$, d'inconnue $y > 0$, admet une unique solution y_0 et que

$$y_0 = 1 + \ln(C) + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (\ln(C))^n.$$

Correction et sujet fournis par l'UPS :

Partie I. Etude de l'équation (E_a)

Commentaire : partie assez facile, mais beaucoup de confusions sur le théorème des valeurs intermédiaires. On rappelle que pour l'appliquer il faut indiquer continue et strictement croissante ET dessiner le tableau de variations.

On choisit ici de travailler sur la fonction $f_a : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln x - ax.$, mais on pouvait aussi étudier $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

1. Soit $f_a : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln x - ax$.

   f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f_a'(x) = \dfrac{1}{x} - a$.

   (a) Si $a \in]-\infty, 0]$, pour tout $x > 0$, $f_a'(x) > 0$, donc

x	0		α		1		$+\infty$
Variations de $f_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-a$	$\nearrow$	$+\infty$

   f_a est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le tableau de variations, $(E_a) \Leftrightarrow f_a(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée α. et $\alpha \in]0, 1]$.

   (b) Si $a \in]0, \frac{1}{e}[$, pour tout $x > 0$,

$$f_a'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - a > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{a}.$$

   On a donc le tableau de variations :

x	0		α		$\frac{1}{a}$		e		β		$+\infty$
Signe de f_a'			$+$		0			$-$			
Variations de $f_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\oplus$	$\searrow$	$\oplus$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   On vérifie en effet que :

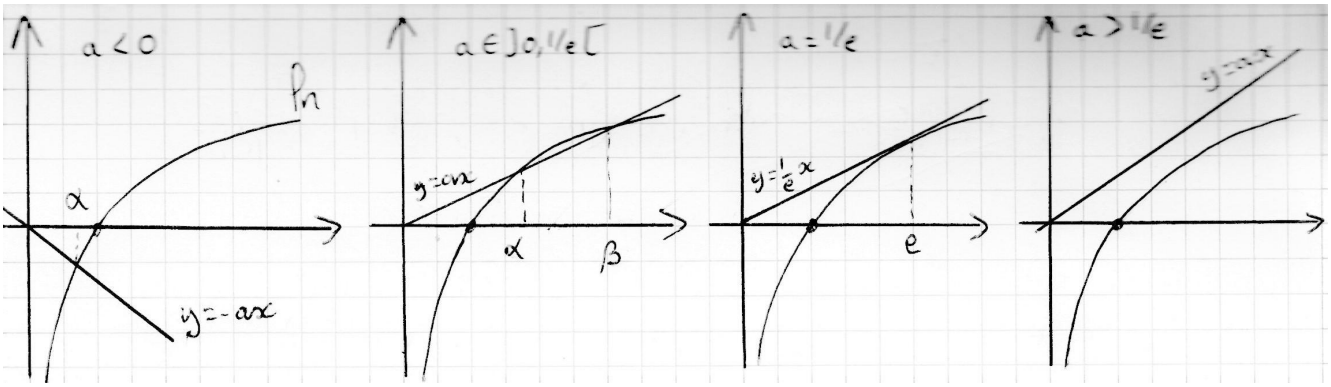
$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = -\infty \text{ par croissances comparées}$$
$$f_a\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(1/a) - 1 = -\ln(a) - 1 > 0$$
$$f_a(e) = 1 - ae > 0$$

   D'après le tableau de variation (sur chacun des intervalles la fonction f_a est continue et strictement monotone) :
   - Il existe une solution $\alpha \in \left]0, \frac{1}{a}\right[$. Comme $\alpha < \frac{1}{a}$ on a $\alpha < \frac{1}{e}$.
   - Il existe une solution $\beta \in]e, +\infty[$.

   (c) Si $a = \frac{1}{e}$, on a le même tableau de variations qu'à la question précédente, avec cette fois $f_a(1/a) = f_{1/e}(e) = \ln(e) - 1 = 0$, donc l'équation $(E_{1/e})$ a une unique solution : $x = e$.

   (d) Si $a > \frac{1}{e}$, on a le même tableau de variations qu'à la question I1b avec cette fois $f_a(1/a) = -\ln(a) - 1 < 0$, donc $f_a(x) \leqslant f_a(1/a) < 0$ pour tout $x > 0$, donc l'équation (E_a) n'a aucune solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On attend un dessin du type :



REM : attention à bien représenter la fonction ln : tangente en 1, forme en 0.

Partie II. Etude d'une équation fonctionnelle

1. Suppsons φ constante.
   Alors il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = K$.
   Alors
   $$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)\right) \Leftrightarrow K = K^2 \Leftrightarrow K = 0 \text{ ou } K = 1.$$
   L'équation (R) a donc deux solutions constantes : $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$.
2. Si $\varphi(0) = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(x+0) = \varphi(x)\underbrace{\varphi(0)}_{=0} = 0$.
   Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$, alors, comme $0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$.
   On a donc bien, par double-implication, l'équivalence :
   $$\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0.$$
3. Comme $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0)\varphi(0)$, on a $\varphi(0)^2 = \varphi(0)$, donc $\varphi(0)(\varphi(0)-1) = 0$, donc, comme $\varphi(0) \neq 0$, on a $\varphi(0) = 1$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0.$$
   S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0$, alors, d'après le calcul précédent, $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, et on démontre alors facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$.
   Comme $\lim \frac{x}{2^n} = 0$, par continuité de φ sur $\mathbb{R}$, donc en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = \varphi(0) = 1$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$.
   C'est exclu (par unicité de la limite), donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \neq 0$.
   On a donc bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$.
   ☞0.5 pour $\varphi(0)$, 0.5 pour $\varphi(x) \geqslant 0$, et 1 pour $\varphi(x) > 0$✓
4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(nx) = (\varphi(x))^n$ (HR_n).
   Initialisation : Pour $n = 0$, $\varphi(nx) = \varphi(0) = 1$ et $(\varphi(x))^n = (\varphi(x))^0 = 1$, donc on a bien HR_0.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_n vérifiée. Alors $\varphi((n+1)x) = \varphi(nx+x) = \varphi(nx)\varphi(x) = (\varphi(x))^n\varphi(x) = (\varphi(x))^{n+1}$. On a bien HR_{n+1}.
   Conclusion : D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(nx) = (\varphi(x))^n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$1 = \varphi(0) = \varphi(-nx+nx) = \varphi(-nx)\varphi(nx),$$
   donc $\varphi(-nx) = \dfrac{1}{\varphi(nx)} = (\varphi(x))^{-n}$.
   On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\quad \varphi(nx) = (\varphi(x))^n$.
5. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $1/m \in \mathbb{R}$, donc, d'après la question précédente appliquée à $x = 1/m$ et $n = m \in \mathbb{Z}$, on a :
   $$\varphi(1) = \varphi(m(1/m)) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m.$$

6. Soit $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, D'après la question précédente,

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \varphi(1)^{1/m},$$

donc, d'après la question II4 avec $x = 1/m$, on a

$$\varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi\left(n\frac{1}{m}\right) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^n = \left(\varphi(1)^{1/m}\right)^n = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}.$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'après les propriétés de la partie entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x.$$

Donc, en divisant par 10^n, on a

$$x - 10^{-n} < x_n \leqslant x.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x - 10^{-n} = x$, on a, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
Commentaire : question qui semble très classique (c'est la suite des valeurs décimales qui converge vers x), mais étonnamment peu réussie.

8. $g : x \in \mathbb{R} \mapsto (\varphi(1))^x = \exp(x\ln(\varphi(1)))$ est continue sur $\mathbb{R}$ (Rq : $\varphi(1) > 0$).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) \quad \text{(par continuité de } \varphi \text{ en } x) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right) \quad \text{(par définition de } x_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\varphi(1))^{\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}} \quad \text{(d'après la question II6 avec "} n = \lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{" et } m = 10^n \in \mathbb{N}^*) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\varphi(1))^{x_n} = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) \\
&= g(x) = (\varphi(1))^x \quad \text{(par continuité de } g \text{ en } x)
\end{aligned}$$

Commentaire : il faut la continuité de φ.

Partie III. Etude d'une suite de polynômes

1. (a) $P_1 = \frac{1}{1!}X(X+1)^0 = X$ et $P_2 = \frac{1}{2!}X(X+2)^1 = \frac{1}{2}X^2 + X$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(0) = \frac{1}{n!}0(0+n)^{n-1} = 0$$

   et $P_0(0) = 1$.
   Commentaire : attention à la valeur en 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= \frac{1}{n!}\left((x+n)^{n-1} + (n-1)x(x+n)^{n-2}\right) = \frac{1}{n!}(x+n)^{n-2}(x+n+(n-1)x) \\
&= \frac{1}{n!}(x+n)^{n-2}n(x+1) = \frac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+n)^{n-2} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+1+n-1)^{n-2} = P_{n-1}(x+1).
\end{aligned}$$

3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^n P_k(x)P_{n-k}(y)$" (HR_n)
Initialisation : Pour $n = 0$, comme $P_0 = 1$, on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $P_0(x+y) = 1$
et $\sum_{k=0}^0 P_k(x)P_{0-k}(y) = P_0(x)P_0(y) = 1 \times 1 = 1$, donc on a bien HR_0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_n vérifiée.

Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x+y) - P_{n+1}(y) &= \int_y^{x+y} P'_{n+1}(u)du \\
&= \int_y^{x+y} P_n(u+1)du \quad \text{(d'après la question III2 avec } n+1 \in \mathbb{N}^*) \\
&= \int_0^x P_n(t+1+y)dt \quad \text{(changement de variable affine } u = t+y) \\
&= \int_0^x \sum_{k=0}^n P_k(t+1)P_{n-k}(y)dt \quad \text{(d'après } HR_n) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(P_{n-k}(y) \int_0^x P_k(t+1)dt \right) \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^n \left(P_{n-k}(y) \int_0^x P'_{k+1}(t)dt \right) \quad \text{(d'après la question III2 avec } k+1 \in \mathbb{N}^*) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(P_{n-k}(y) \left[P_{k+1}(t)\right]_0^x \right) = \sum_{k=0}^n \left(P_{n-k}(y)(P_{k+1}(x) - P_{k+1}(0)) \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(P_{n-k}(y)P_{k+1}(x) \right) \quad (P_{k+1}(0) = 0 \text{ car } k+1 \in \mathbb{N}^*) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} P_j(x)P_{n+1-j}(y) \quad \text{(en posant } j = k+1)
\end{aligned}$$

donc

$$P_{n+1}(x+y) = P_{n+1}(y) + \sum_{j=1}^{n+1} P_j(x)P_{n+1-j}(y) = \sum_{j=0}^{n+1} P_j(x)P_{n+1-j}(y).$$

On a bien HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^n P_k(x)P_{n-k}(y).$$

Partie IV. Retour sur l'équation (E_a)

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant -x$,

$$\begin{aligned}
(x+n)^{n-1} &= n^{n-1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = n^{n-1}\exp\left((n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \\
&= n^{n-1}\exp\left((n-1)\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = n^{n-1}\underbrace{\exp\left(x+o(1)\right)}_{\to e^x \neq 0} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} e^x n^{n-1}.
\end{aligned}$$

Commentaire : attention à la composition d'équivalent !

(b) Formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
Commentaire : c'est une série entière « en a » dont les coefficients dépendent de x !
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ fixés.

$$|P_n(x)a^n| = \frac{1}{n!}|x|(x+n)^{n-1}|a|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}|x|e^x n^{n-1}|a|^n = \frac{e^n|x|e^x|a|^n}{n\sqrt{2\pi n}} = \frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}}.$$

Si $|a| \leqslant \frac{1}{e}$, alors $0 \leqslant \frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}} \leqslant \frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}$.
Or, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann et $3/2 > 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}}$, puis $\sum_{n\geqslant 1}|P_n(x)a^n|$ convergent, donc $\sum P_n(x)a^n$ converge absolument.

Si $|a| > \dfrac{1}{e}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{(e|a|)^n}{n^{3/2}} = +\infty$ par croissances comparées, donc $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{(e|a|)^n}{n^{3/2}}$ diverge grossièrement, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1} |P_n(x)a^n|$ diverge, donc $\sum P_n(x)a^n$ ne converge pas absolument.

On a donc bien établi que $\sum_{n\geqslant 0} P_n(x)a^n$ converge absolument si et seulement si $|a| \leqslant \dfrac{1}{e}$.

2. (a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto P_n(x)a^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme).
Pour tout $b > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [-b,b]$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n!}|x|.|x+n|^{n-1}|a|^n \leqslant \frac{1}{n!}b(b+n)^n|a|^{n-1} = P_n(b)|a|^n,$$

donc $\|f_n\|_\infty^{[-b,b]} \leqslant P_n(b)|a|^n$.
Or, $\sum_{n\geqslant 1} P_n(b)|a|^n$ converge d'après la question IV1b car $|a| \leqslant 1/e$, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty^{[-b,b]}$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-b,b]$.
Par suite, $F_a = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[-b,b]$, ceci étant valable pour tout $b > 0$, F_a est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries absolument convergentes.
Alors la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

(c) • F_a est continue sur $\mathbb{R}$ d'après IV2a.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$, comme les séries définissant $F_a(x)$ et $F_a(y)$ convergent absolument (d'après IV1b), on a :

$$\begin{aligned}
F_a(x)F_a(y) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)a^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(y)a^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} P_k(x)a^k P_{n-k}(y)a^{n-k} \quad \text{(par produit de Cauchy de deux séries absolument convergente)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a^n \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x+y)a^n \quad \text{(d'après III3)} \\
&= F_a(x+y).
\end{aligned}$$

F_a est donc bien solution de (R) et, par suite, d'après la question II8, comme $F_a(0) = P_0(0)a^0 = 1 \neq 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = (F_a(1))^x.$$

(d) En reprenant les notations de la question IV2a.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
$\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (d'après la question IV1b).
Pour tout $b > 0$, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $x \in [-b,b]$,

$$\begin{aligned}
|f_n'(x)| = |P_n'(x)a^n| = |P_{n-1}(x+1)a^n| &= \frac{1}{(n-1)!}|x+1||x+1+n-1|^{n-2}|a|^n \\
&\leqslant \frac{1}{(n-1)!}(b+1)(b+1+n-1)^{n-2}|a|^n = |a|P_{n-1}(b)|a|^{n-1},
\end{aligned}$$

donc $\|f_n'\|_\infty^{[-b,b]} \leqslant |a|P_{n-1}(b)|a|^{n-1}$.
Or $\sum_{n\geqslant 2} P_{n-1}(b)|a|^{n-1}$ converge (d'après la question IV1b avec $|a| \leqslant 1/e$), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 2} \|f_n'\|_\infty^{[-b,b]}$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-b,b]$.
$F_a = \sum_{n\geqslant 0} f_n$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-b,b]$, ceci pour tout $b > 0$, donc F_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n'(x)a^n = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_{n-1}(x+1)a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x+1)a^{n+1} = aF_a(x+1).$$

(e) D'après la question précédente, on a $F_a'(0) = aF_a(1)$.
En dérivant cette fois-ci F_a à partir de l'expression obtenue à la question IV2c, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a'(x) = \big(\exp(x\ln(F_a(1)))\big)' = \ln(F_a(1))\exp(x\ln(F_a(1))) = \ln(F_a(1))F_a(x),$$

donc, en appliquant en 0, on a aussi $F_a'(0) = \ln(F_a(1))F_a(0) = \ln(F_a(1))$.
On a donc $\ln(F_a(1)) = F_a'(0) = aF_a(1)$, i.e. $F_a(1)$ est solution de (E_a).

3. (a) $G : a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)a^n$ est une série entière.
D'après l'étude faite en IV1b, elle converge si et seulement si $a \in [-1/e, 1/e]$, donc son rayon de convergence est $1/e$.
Par suite, F_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) \geqslant 0$.
Soit $a, b \in [0, 1/e]$ avec $a \leqslant b$. Pour tout $n \geqslant 0$, $a^n \leqslant b^n$, donc $P_n(1)a^n \leqslant P_n(1)b^n$.
En sommant ces inégalités pour tout $n \in \mathbb{N}$ (les deux séries convergent), on obtient :

$$G(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)a^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)b^n = G(b).$$

La fonction G est donc bien monotone (en même croissante) sur $[0, 1/e]$.

(b) $G(0) = F_0(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)0^n = P_0(1) = 1$.
$G(1/e) = F_{1/e}(1)$ est solution de $(E_{1/e})$. Or, $(E_{1/e})$ a une unique solution : e, donc $G(1/e) = e$.
Comme G est continue et croissante sur $[0, 1/e]$,

$$G\left(\left[0, \tfrac{1}{e}\right]\right) = [G(0), G(1/e)] = [1, e].$$

(c) Si $a \in [-1/e, 0]$, (E_a) a une unique solution, α_a, donc, comme $G(a) = F_a(1)$ est solution de (E_a), on a $G(a) = \alpha_a$.
Si $a \in [0, 1/e]$, (E_a) a deux solutions : $\alpha \leqslant e$ et $\beta_a > e$.
Comme $G(a) = F_a(1)$ est solution de (E_a) et $G(a) \in [1, e]$, $G(a) = \alpha_a$.
On a donc bien :

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad F_a(1) = \alpha_a.$$

4. Pour tout $y > 0$,

$$y^y = C \Leftrightarrow \exp(y\ln(y)) = C \Leftrightarrow y\ln y = \ln C \Leftrightarrow \ln(y) = \frac{\ln C}{y} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(C)\frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \text{ solution de } E_{-\ln(C)}.$$

Or, $1 \leqslant C \leqslant e^{\frac{1}{e}} \Rightarrow 0 \leqslant \ln(C) \leqslant 1/e \Rightarrow -\ln(C) \in [-1/e, 0]$, et, dans ce cas, $(E_{-\ln C})$ a une unique solution : $\alpha_{-\ln C} = F_{-\ln(C)}(1)$.
L'équation $y^y = C$ a donc un unique solution, y_0 et $\dfrac{1}{y_0} = F_{-\ln C}(1) \neq 0$, donc

$$\begin{aligned}
y_0 &= (F_{-\ln(C)}(1))^{-1} = F_{-\ln C}(-1) \quad \text{(d'après la question IV2c)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(-1)(-\ln C)^n \\
&= P_0(-1) + P_1(-1)(-\ln C) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)(-1+n)^{n-1}(-\ln C)^n \\
&= 1 + \ln C + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{(n-1)^{n-1}}{n!}(\ln C)^n.
\end{aligned}$$

Exercice 3

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$$

On note R le rayon de la série entière la série entière $\left(\sum a_n z^n\right)$.

1. ☞1.5✓ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant 1$.
Indication : on rappelle que $e \approx 2.7$
☞0.5✓Que peut-on en déduire sur le rayon R ?

2. ☞2✓ Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{e^z+1}$$

Indication : on pourra commencer par calculer le produit : $e^z \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)$

3. ☞1✓ Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer la formule :

$$\tan x = \frac{1}{i} - \frac{2}{i\left(e^{i2x}+1\right)}$$

4. ☞2✓ En déduire que pour tout $x \in \left]-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right[$,

$$\tan x = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1} a_{2p+1} 2^{2p+1} x^{2p+1}$$

Correction :

1. Il faut commencer par calculer les premiers termes !

$$a_1 = -\frac{1}{2}\frac{a_0}{1} = -\frac{1}{2}$$
$$a_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{1} + \frac{a_0}{2}\right) = 0$$

On montre donc par récurrence forte la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant 1$$

L'initialisation est évidente pour $n = 0$.
Considérons $n \in \mathbb{N}$ fixé, tel que $\forall k \in [\![0, n]\!], \mathscr{P}(k)$ est vraie.
On a alors :

$$\begin{aligned}
|a_{n+1}| &= \left|-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{n+1-k}}{k!}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{|a_{n+1-k}|}{k!} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} && \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&\leqslant \frac{1}{2}(e-1) \leqslant 1
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité et la conclusion.
Ainsi, (a_n) est bornée, donc $R \geqslant 1$.

2. On considère donc un $z \in \mathbb{C}$, vérifiant $|z| \leqslant R$.
On va utiliser un produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}
e^z \times \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k \times \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} z^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} z^n + a_0 \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n + 1 = -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + 2
\end{aligned}$$

En effet pour $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} + a_n = -2a_n + a_n = -a_n$$

Ainsi :

$$e^z \times \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) + 2$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$(e^z + 1) \times \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = 2$$

ou encore :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{e^z + 1}$$

3. On commence par retrouver la formule demandée :

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)} \\
&= \frac{e^{i2x} + 1}{i\left(e^{i2x} + 1\right)} \\
&= \frac{e^{i2x} + 1 - 2}{i\left(e^{i2x} + 1\right)} \\
&= \frac{1}{i} - \frac{2}{i\left(e^{i2x} + 1\right)}
\end{aligned}$$

4. Si on prend donc $x \in \left]-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right[$, comme $|2ix| < R$, on a :

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{1}{i} - \frac{2}{i\left(e^{i2x} + 1\right)} \\
&= \frac{1}{i} - \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (2ix)^n \\
&= \frac{1}{i} - \frac{1}{i} \left(\underbrace{\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} a_n (2ix)^n}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} a_n (2ix)^n}_{\in i\mathbb{R}} \right)
\end{aligned}$$

On ne garde que la partie réelle (puisque tan est réelle). En donc :

$$\begin{aligned}
\tan x &= -\frac{1}{i} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} a_n (2ix)^n \\
&= -\frac{1}{i} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} (2x)^{2p+1} i^{2p+1} \\
&= -\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} 2^{2p+1} x^{2p+1} (-1)^p \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1} a_{2p+1} 2^{2p+1} x^{2p+1}
\end{aligned}$$

Devoir non surveillé pour le Lundi 20 janvier 2025

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Thèmes: Réduction, séries entières et équations différentielles

Exercice 1 CCINP PC 2023 Endomorphisme cyclique

Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\left(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\right)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (4x - 2y, x + y)$$

Q1. ☞0.5✓ En considérant $v = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

Q2. ☞1✓ Déterminer les valeurs propres de f et donner une base de chaque sous-espace propre de f.

Q3. ☞0.5✓ Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

Q4. ☞0.5✓ Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Q5. ☞1✓ Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Q6. ☞1✓ L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$

Q7. ☞0.5 (linéarité) 0.5 dégré✓ Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q8. ☞1✓ Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.

Q9. ☞0.5✓ En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

Q10. ☞1✓ Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k.

Soit $v \in E$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Q11. ☞0.5✓ Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

Q12. ☞1 + bonus de 1 si démonstration✓ Montrer que le déterminant de la famille $\mathscr{F} = \big(v, h(v), \dots, h^{n-1}(v)\big)$ dans la base $\mathscr{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Q13. ☞1.5✓ Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

Correction (Sujet et correction fournis par l'UPS) :

Partie I - Étude d'un premier exemple

Q1. Ici $\dim(E) = 2$
Soit $v = (1,0) \in \mathbb{R}^2$. $f(v) = (4,1)$ qui est libre avec v car on a deux vecteurs non colinéaires.
$(v, f(v))$ famille libre à $2 = \dim(E)$ éléments donc base de E.
Donc f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

Q2. En notant $\mathscr{B}$ la base canonique. $M = M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\chi_M(X) = \chi_f(X) = X^2 - 5X + 6 = (X-3)(X-2)$ Donc $sp(f) = \{2, 3\}$.
En utilisant M on trouve :
$E_2(f) = \ker(f - 2id_E) = vect((1,1))$
$E_3(f) = \ker(f - 3id_E) = vect((2,1))$
On peut remarquer que f est diagonalisable, même si cela n'est pas demandé.

Q3. En prenant n'importe quel w vecteur propre de f, $f(w)$ est alors colinéaire à w et donc $(w, f(w))$ liée.
Concrètement : Soit $w = (1,1)$, $f(w) = 2w$, $(w, 2w)$ liée et donc pas base de E.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Q4. Il suffit de calculer M^2 et de vérifier que l'on a bien l'égalité $M^2 = M + 2I_3$ qui rend compte matriciellement de la relation $g^2 = g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Q5. Je propose ici plusieurs possibilités :
a) M est symétrique réelle donc le Théorème spectral assure qu'elle est diagonalisable, mais celui ci est peu intéressant car ne donne pas le spectre.
b) Grâce à Q4. $P = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ est annulateur de M scindé à racines simples et donc par théorème M diagonalisable. De plus $sp(M) \subset \{-1, 2\}$ et forcément égal sinon M serait égale à $-I_3$ ou $2I_3$.
c) Enfin par le classique $\chi_M(X)$ qui se calcule bien ici en faisant $C_1 + C_2 \to C_1$, on peut sortir alors $(X+1)$ en facteur, puis $L_2 - L_1 \to L_2$ qui donne $\chi_M(X) = (X+1)^2(X-2)$.
Par les ordres de multiplicité $E_2(M)$ est forcément de dimension 1, et enfin $E_1(M)$ est le plan d'équation $x - y + z = 0$ de dimension 2 on a bien la somme des dimensions des sev propres qui vaut 3.

Q6. Prenons $v \in \mathbb{R}^3$. Par Q4. on a donc $g^2(v) = g(v) + 2v$ et donc $(v, g(v), g^2(v))$ n'est pas libre.
L'endomorphisme g n'est donc pas cyclique.

Partie III - Étude d'un troisième exemple

ATTENTION il y a un petit conflit de notations : Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. Ici $E = \mathbb{R}_n[X]$ et donc $\dim(E) = n + 1$ et pas n.

Q7. Montrons que Δ est linéaire :
Soit $P,Q \in E$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X) =$
$\lambda P(X+1)+\mu Q(X+1)-\lambda P(X)-\mu Q(X) = \lambda\Delta(P)+\mu\Delta(Q)$
Ensuite soit $P \in E$ par principe des degrés,
$deg(P(X+1)) = \deg(P(X))$ et $\deg(P(X+1)-P(X)) \leqslant max(\deg(P(X+1)), deg(P(X)))$ ainsi $\Delta(P) \in E$.
Conclusion Δ est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Q8. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Si $k=0$, $\Delta(1)=0$.
Si $k \geqslant 1$ en utilisant le binôme de Newton :
$\Delta\left(X^k\right) = (X+1)^k - X^k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$ On constate pour la suite que c'est un polynôme de degré $k-1$ et son coefficient dominant vaut k.

Q9. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant, notons $d \geqslant 1$ son degré. $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots \alpha_d X^d$.
Par linéarité de Δ, $\Delta(P) = \alpha_0\Delta(1) + \alpha_1\Delta(X) + \cdots \alpha_d\Delta(X^d)$
Et grâce à la Q8, $\Delta(P)$ est bien un polynôme de degré $d-1$, et son coefficient dominant vaut $d\alpha_d$.

Q10. Prenons le vecteur X^n.
Par Q9, la famille $(X^n, \Delta(X^n), \Delta^2(X^n), \cdots, \Delta^n(X^n))$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de n à 0 c'est une famille libre de $n+1$ vecteurs de E et $dim(E) = n+1$ c'est donc une base de E.
Ainsi l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Q11. Montons par récurrence sur p, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1\lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^p v_n$$

Amorce $p=1$. Nous avons $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ et h linéaire, et pour tout k, $h(v_k) = \lambda_k v_k$, ainsi par linéarité de h on a bien $h(v) = \alpha_1\lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n v_n$
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé, supposons l'égalité :
$h^p(v) = \alpha_1\lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^p v_n$
Il suffit de nouveau d'appliquer h d'invoquer sa linéarité et pour les mêmes principes que pour l'amorce on a bien :
$h^{p+1}(v) = h(h^p(v)) = \alpha_1\lambda_1^{p+1} v_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_{n+1}^p v_n$
Conclusion : Par principe de récurrence l'égalité est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

Q12. Le déterminant de la famille $\mathscr{F} = \left(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\right)$ dans la base $\mathscr{B}$ est le déterminant de la matrice des coordonnées de cette famille dans $\mathscr{B}$ leurs coordonnées étant données par Q11.
Donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$
Il suffit alors de sortir $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ par n linéarité, et ainsi de tomber sur le déterminant de Vandermonde $V_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$
Conclusion

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

R Le calcul du déterminant de Vandermonde est du cours.

Q13. Si h admet n valeurs propres distinctes.
Je prends $v = v_1 + \cdots + v_n$, soit tous les $\alpha_k = 1$ et grâce à Q12, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$
$(v, h(v), \cdots, h^{n-1}(v))$ est alors une base de E et h est cyclique.
Si h est cyclique, il existe un vecteur v tel que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$
Et toujours par Q12 ceci garantit que toutes les valeurs propres sont distinctes.

Exercice 2 **CCINP PC 2023 Exercice 3** Un jeu de société

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$: le pion est avancé d'autant de cases que

le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :
1) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;
2) sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I - Préliminaires

✯ I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

Q1. ☞0.5✓ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?

Q2. ☞0.5✓ Que représente la variable aléatoire T ?

✯ I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Q3. ☞0.5✓ Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Q4. ☞0.5✓ Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1 .

Q5. ☞0.5✓ Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

✯ II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q6. ☞0.5✓ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Q7. ☞0.5✓ Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

Q8. ☞1.5✓ Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction des évènements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$. En déduire que :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

Q9. ☞1✓ Calculer $P(T = 0)$.

✯ II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant A} P(T = k)x^k$ sur son intervalle de convergence.

Q10. ☞0.5 (rayon) +1 (expression)✓ Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum_{k\geqslant A} P(T=k)x^k$ et montrer que :

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.$$

Q11. ☞0.5✓ En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

✯ III. 1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leqslant k)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}.$$

Q12. ☞1✓ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'évènements $((X_{n+1}=0), \ldots, (X_{n+1}=M-1))$, montrer que :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k-\ell).$$

Q13. ☞1✓ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n}\binom{n+k}{n}$$

✯ III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite : si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} P(Z>n)$ converge, alors Z admet une espérance et on a l'égalité :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z>n)$$

Q14. ☞1.5✓ Que peut-on dire des évènements $(T>n)$ et $(S_n<A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

Sujet et correction fournis par l'UPS

Partie I - Préliminaires

✯ I.1 - Modélisation

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. X_n représente l'avancement relatif à l'étape n.
S_n représente l'avancement absolu (i.e la position) à l'étape n.

Q2. T représente "le temps d'attente" pour dépasser A, c'est à dire le premier (le plus petit) n tel que $S_n \geqslant A$.

✯ I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

Q3. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que que $f^{(p)}$ existe sur $]-1,1[$ et que
$\forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$
Amorce $p=0$. C'est la définition de f.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ quelconque fixé, supposons la propriété vraie au rang p.
On a alors $f^{(p)}$ qui est dérivable sur $]-1,1[$ comme fonction rationnelle à dénominateur non nul, ainsi $f^{(p+1)}(x) = (f^{(p)})'(x) = \dfrac{d}{dx}p!(1-x)^{-(p+1)} = p!(-1)(-(p+1))(1-x)^{-(p+2)} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}$
Conclusion : Par principe de récurrence le résultat est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Q4. Soit $p \in \mathbb{N}$ "fixé". Posons pour tout $n \geqslant p$, $a_n = \binom{n}{p} > 0$.
Les coefficients étant >0 nous pouvons appliquer la règle de D'Alembert sans la variable x pour déterminer R le rayon de convergence : Par expression en factorielles des combinaisons et simplification : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n+1-p} \to +1$ quand

$n \to +\infty$. Ainsi $R = \dfrac{1}{1} = +1$.

Conclusion : le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant p} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} x^n$ est égal à 1.

Q5. D'abord par DSE usuel, f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Ensuite soit $p \in \mathbb{N}$ par théorème de dérivation des séries entières on peut dériver f p fois terme à terme sur l'ouvert de convergence ce qui donne $f^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} p!\binom{n}{p} x^{n-p}$.

Enfin nous avons l'expression de $f^{(p)}$ obtenue à Q28. il suffit alors de multiplier par x^p et diviser par $p!$ pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

✯ II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q6. Remarquons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \sim \mathscr{B}(1/2)$, S_n apparait donc comme somme de n vad indépendantes suivants toutes une $\mathscr{B}(1/2)$.

Ainsi, si $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Q7. En prenant la définition de T de l'énoncé :

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas :

Si le procédé s'arrête : $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$ et $T(\omega) \geqslant A$ car "au mieux" on a avancé de $+1$ à chaque fois.

Si le procédé ne s'arrête pas, (cela peut arriver par exemple lorsque ou tous les X_k renvoient 0) alors $T(\omega) = 0$.

Ainsi les valeurs prises par la variable aléatoire T sont $\{0\} \cup [\![A, +\infty[\![$.

Q8. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$.

Vu qu'ici on ne peut qu'avancer d'un coup ou ne pas bouger à chaque étape,

$(T = k) = (S_{k-1} = A-1) \cup (X_k = 1)$.

Ensuite les évènements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$ sont indépendants (par le lemme des coalitions), donc $P(T = k) = P(S_{k-1} = A-1)P(X_k = 1)$ nous connaissons ces lois usuelles , nous avons bien :

$$P(T = k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ A-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2^k}$$

Q9. Par Q30. $P(T = 0) = 1 - P(T > 0)$. Et $P(T > 0) = \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \frac{1}{2^k}$

Nous savons évaluer cette somme grâce à Q30 appliqué à $p = A-1$ et $x = 1/2$.

$\sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \frac{1}{2^k} = \dfrac{1/2^{A-1}}{1/2^A}$ au final $P(T > 0) = 1$ et $P(T = 0) = 0$.

✯ II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q10. Exploitons ici les résultats obtenus.

La série entière définissant G_T correspond à celle de Q29 mais avec un facteur $\dfrac{1}{2^k}$. Cela assure (sans détails ...) que le rayon de convergence $R_T = 2$, ensuite il suffit d'utiliser la formule de Q30. pour $p = A-1$ en $\dfrac{x}{2}$ ($x \in]-2,2[$ donc $x/2 \in]-1,1[$) qui donne bien

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.$$

Q11. Le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie est donné par $E(T)$.

Comme $R_T = 2 > 1$,G_T est dérivable en 1, et donc $E(T) = G_T'(1)$.

$G_T'(x) = A(\dfrac{x}{2-x})^{A-1} \dfrac{2}{(2-x)^2}$, ainsi $E(T) = 2A$

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

✯ III. 1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leqslant k)$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales pour le système complet d'évènements $((X_{n+1}=0),\dots,(X_{n+1}=M$
Soit $k \leqslant A-1$, $P(S_{n+1} \leqslant k) = \sum_{\ell=0}^{k} P(S_{n+1} \leqslant k | X_{n+1}=\ell) P(X_{n+1}=\ell)$
Il suffit alors de constater que :
$P(S_{n+1} \leqslant k | X_{n+1}=\ell) = P(S_n \leqslant k-\ell)$ et $P(X_{n+1}=M) = \dfrac{1}{M}$
On a bien

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k-\ell).$$

Q13. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$$

Amorce : $n=1$ $S_1 = X_1$ et X_1 suit une loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$.
Donc $P(X_1 \leqslant k) = \dfrac{k+1}{M}$. Et $\binom{k+1}{1} = k+1$.
On a bien l'égalité pour $n=1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose l'égalité vraie au rang n.
Pour calculer $P(S_{n+1} \leqslant k)$ il suffit d'utiliser H.R dans le résultat de Q37, puis d'appliquer la formule proposée par l'énoncé en début de III.1.

✯ III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q14. Les évènements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ sont égaux pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De plus $(S_n < A) = (S_n \leqslant A-1)$.
Utilisons la formule proposée par l'énoncé, nous avons donc $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n \leqslant A-1)$
Or par Q38. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \leqslant A-1) = \dfrac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{n}$.
Cette formule reste vraie pour $n=0$, $P(S_0 \leqslant A-1) = 1$.
On utilise alors la symétrie des coefficients binomiaux, puis changement d'indice, qui nous ramène à la formule de la Q30. appliqué à $p = A-1$, $x = \dfrac{1}{M}$ qui tous calculs faits donne $E(T) = \dfrac{M^A}{(M-1)^A}$

Exercice 3 E3A PC 2020

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. ☞1✓ En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.
2. ☞0.5✓ On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
   Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

   Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. (a) ☞0.5✓ Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.
   (b) ☞0.5✓ Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.
   (c) On pose, lorsque cela est possible,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n,$$

   produit de Cauchy réel des deux série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

☞0.5✓Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et ☞0.5✓donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

(d) ☞1✓En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$

4. ☞1✓Démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

5. ☞1✓ En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

   On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

6. ☞1✓ Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Correction : (sujet et correction fournis par l'UPS)
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. **Commentaire :** question facile mais mal traitée : beaucoup ne font pas la différence entre récurrence forte et récurrence usuelle. De plus, beaucoup écrivent : on pose $P(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant 1$, ce qui n'a pas de sens !
   Montrons par récurrence forte sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$. On note donc HR_n : « $0 < a_n \leqslant 1$ ».
   Initialisation : Par hypothèse, $a_0 = 1 \in]0,1]$, donc on a bien HR_0.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
   Alors

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+2} \quad \text{(d'après } HR_k\text{, pour } 0 \leqslant k \leqslant n) \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n+1}{n+1} = 1 \\
\text{et } a_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \\
&> \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{0}{n-k+2} \quad \text{(d'après } HR_k\text{, pour } 0 \leqslant k \leqslant n) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

   donc on a bien HR_{n+1}.
   Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.
2. Pour $x = 1$, la suite $(a_n x^n) = (a_n)$ est bornée, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
3. (a) La rayon de convergence de la série entière $\left(\sum \frac{x^n}{n+2}\right)$ est le même que celui de $\left(\sum x^n\right)$, qui est 1.
   On peut aussi utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+3} \to 1$$

   (b) **Commentaire :** question mal comprise : il faut juste regarder rapidement en 1 et en -1.
   Comme le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}\right)$, est 1, l'ensemble réel de définition D de la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

vérifie

$$]-1,1[\subset D\subset[-1,1].$$

Pour $x=1$, on a $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n+2}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+2}$ qui diverge (série harmonique), donc $1\notin D$.
Pour $x=-1$, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n+2}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+2}$ est une série alternée et, comme $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n+2}\right|\right)=\left(\frac{1}{n+2}\right)$ tend en décroissant vers 0, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+2}$ converge d'après le critère des séries alternées, donc $-1\in D$.
L'ensemble de définition recherché est donc $[-1,1[$.

(c) Les deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n+2}$ ont un rayonde convergence supérieur ou égal à 1, donc $\sum_{n\geqslant 0}w_nx^n$, qui est le produit de Cauchy de ces deux séries entières, a aussi un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. De plus, par définition du produit de Cauchy de deux séries (entières), on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$w_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+2}\times a_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a_k\times\frac{1}{n-k+2}=(n+1)a_{n+1}.$$

Commentaire : revoir l'expression du produit de Cauchy.

(d) Par suite, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}f(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}w_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=f'(x).\end{aligned}$$

4. **Méthode 1 :** déjà, on peut voir que $\forall x\in[0,1[,f(x)>0$, en effet :

$$\forall x\in[0,1[,f(x)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{a_kx^k}_{\oplus}>1$$

Considérons donc la fonction :

$$g:x\longmapsto\ln(f(x))$$

Cette fonction est ainsi définie et dérivable sur $[0,1[$. On a :

$$\forall x\in[0,1[,\ g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$$

Ainsi, la fonction g' et la fonction $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$ sont égales sur $[0,1[$. On peut donc intégrer cette égalité, et en déduire que :

$$\forall x\in[0,1[,\ g(x)-g(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+2)(n+1)}$$

par intégration d'une série entière sur un segment de son intervalle ouvert de convergence. Il ne reste plus qu'à vérifier que $g(0)=\ln(f(0))=\ln(1)=0$.
Autre méthode : La fonction f est donc solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$y'-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right)y=0\quad(E).$$

Or une primitive sur $]-1,1[$ de $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$ est $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$, donc les solutions de (E) sur $]-1,1[$ sont les fonctions de la forme

$$x\mapsto K\exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right),$$

où $K\in\mathbb{R}$.

De plus, $f(0) = a_0 = 1$, donc on a $Ke^0 = 1$, donc $K = 1$, et, par suite,

$$f : x \mapsto \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Par suite, on a bien, pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
REM : cette méthode donne la relation pour tout $x \in]-1,1[$, et pas uniquement sur $[0,1[$.

5. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum_{n\geqslant} \frac{x^n}{n+2}$ convergent et, pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x) \\
&= 1 + \ln(1-x)\frac{1-x}{x}
\end{aligned}$$

donc

$$f(x) = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right) = \exp\left(1 + \ln(1-x)\frac{1-x}{x}\right) = e\,(1-x)^{\frac{1-x}{x}}.$$

Pour $x = 0$, $f(x) = 1$, donc, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e\,(1-x)^{\frac{1-x}{x}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

6. Comme $1/2 \in]-1,1[$ est à l'intérieur du disque ouvert de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = e\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1-1/2}{1/2}} = \frac{e}{2}.$$

Devoir surveillé 4 — Samedi 25 janvier

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Calculatrice non autorisée — 4h
Thèmes: Réduction, séries entières et équations différentielles

Sujet et correction fournis par l'UPS.
Sujet écrit par E. Le Nagard et correction écrite par S. Gonnord.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

L'épreuve est constituée d'un problème en cinq parties largement indépendantes.

PROBLÈME

Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n-ième lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités p et q (respectivement) d'être générées. Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.

On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie à travers sa série génératrice.

Pour cette étude probabiliste, on mobilise diverses propriétés analytiques (surtout sur les séries entières) et quelques propriétés d'algèbre linéaire.

Dans les parties **I**, **II** et **V**, on examine le temps d'attente pour les séquences C puis CC, puis CPC et CCPPC. La partie **II** est indépendante de la partie **I** et traite de questions préliminaires sur les séries entières qui seront investies dans les parties **III** et **V**. La partie **IV** est indépendante des parties précédentes et traite les questions préliminaires d'algèbre linéaire qui servent exclusivement dans la partie **V**. La partie **III** ne dépend de la partie **I** que par la question **Q4** et de la partie **II** que par la question **Q10**. La partie **V** utilise seulement la question **Q11** de la partie **II** et la partie **IV**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n » et C_n l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant n » .

Partie I - Étude d'un cas simple ☞2.5✓

Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1. On résume l'expérience par la figure 1 suivante :

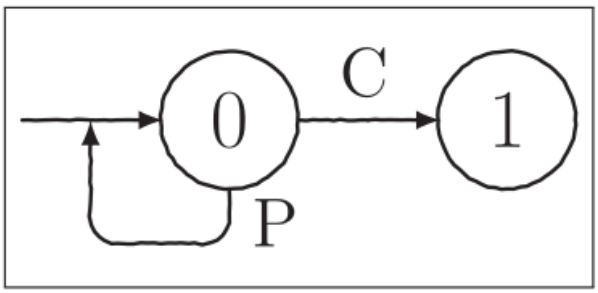


Figure 1

On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note G_Y la série génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence.

On sait alors que $R_Y \geqslant 1$ et que :

$$\forall t \in]-R_Y, R_Y[,\ G_Y(t) = \mathbf{E}(t^Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n)t^n.$$

Q1. ☞0.5✓ Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathbf{P}(Y=n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q2. ☞0.5✓ Montrer que $R_Y = \dfrac{1}{p} > 1$ et que : $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p}\right[,\ G_Y(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.

Q3. ☞1✓ Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que $G'(1) = \dfrac{1}{q}$ et $G''(1) = \dfrac{2p}{q^2}$.

Q4. ☞0.5✓ Donner les valeurs de $\mathbf{E}(Y)$ et de $\mathbf{V}(Y)$.

Partie II - Séries entières☞4.5✓

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$

Q5. ☞0.5✓ Montrer que $\sum u_n(a)z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

Q6. ☞0.5✓ Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\dfrac{1}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n$.

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions **Q7** à **Q10**, on suppose que $|a| < |b|$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(a)u_{n-k}(b)$ et pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, $f(t) = \dfrac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$.

Q7. ☞0.5✓ Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)$$

Q8. ☞1✓Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Q9. ☞1✓ En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

Q10. ☞0.5✓ Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_f tel que $R_f = |a|$.

Soit a, b, c et λ des nombres complexes non nuls. On suppose que : $|a| \leqslant |b| \leqslant |c|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on pose : $g(t) = \dfrac{\lambda t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}$.

Q11. ☞0.5✓ Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_g tel que $R_g \geqslant |a|$.

Partie III - Étude d'un cas intermédiaire☞8✓

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C. De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC. On résume l'expérience par la figure 2 suivante :

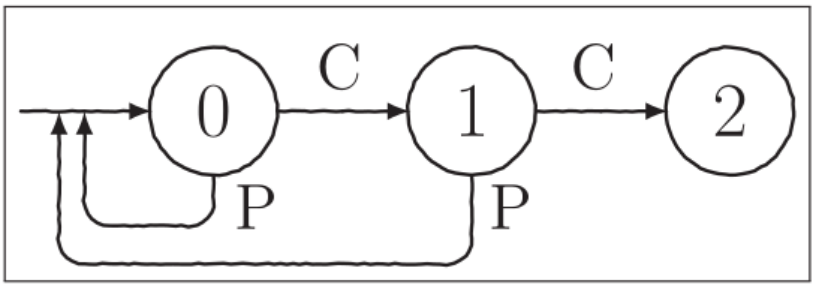


Figure 2

On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC.

On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbf{P}(Z = n)$. On note G_Z la série génératrice de Z et R_Z son rayon de convergence. On rappelle que $R_Z \geqslant 1$.

Q12. ☞0.5✓ Calculer p_1, p_2 et p_3.

Q13. ☞0.5✓ Justifier que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'évènements.

Q14. ☞1✓ En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}$.

Q15. ☞1✓ En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2t^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Q(t) = 1 - pt - pqt^2$, $\Delta = p^2 + 4pq > 0$, $a = \dfrac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$ et $b = \dfrac{-\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$.

Q16. ☞0.5✓ Montrer que $Q(-1) = 1 + p^2 > 0$ et que $Q(1) = q^2 > 0$.

Q17. ☞0.5✓Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = -pq(t - a)(t - b)$.

Q18. Montrer que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on définit $f(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q19. ☞0.5✓ Montrer à l'aide de la question **Q10** que f est développable en série entière au voisinage de 0, que sa série entière associée est G_Z et que $R_Z = |a|$.

Q20. ☞1✓ Montrer que, pour tout $t \in]-|a|, |a|[$, on a : $G_Z(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q21. ☞1✓ Montrer que Z admet une espérance et une variance puis que $\mathbf{E}(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.

Q22. ☞0.5✓ Vérifier, à l'aide des questions **Q4** et **Q21**, que $\mathbf{E}(Z) \geqslant \mathbf{E}(Y) + 1$ où Y est la variable aléatoire définie en partie **I**.

Q23. ☞0.5✓ Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Partie IV - Algèbre linéaire☞8.5✓

On considère les matrices $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p & 0 & p & 0 \\ q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A, si bien que $\chi_A(t)$ est le déterminant de $A - tI_4$.

Q24. ☞0.5✓ Montrer que 0 est valeur propre de A et donner un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

Q25. ☞1✓ Trouver les réels α, β et γ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t^4 - t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On dit que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) lorsque $S = tAS + L$.

Q26. ☞0.5✓ Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, S est solution de (E_t) si et seulement si $(I_4 - tA)S = L$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\psi_A(t)$ le déterminant de la matrice $I_4 - tA$.

Q27. ☞0.5✓ Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\psi_A(t) = t^4\chi_A(1/t)$.

Q28. ☞0.5✓ Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$.

Q29. ☞0.5✓ En déduire que, pour t au voisinage de 0, l'équation (E_t) possède une unique solution S.

Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, on note U_k la k-ième colonne de $I_4 - tA$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ et on suppose que

la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t).

Q30. ☞0.5✓ Vérifier que $L = U_1S_0 + U_2S_1 + U_3S_2 + U_4S_3$.

Q31. ☞0.5✓ En déduire que $\det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) = S_3 \cdot \psi_A(t)$.

Q32. ☞0.5✓ Montrer que, pour t au voisinage de 0, on a l'égalité :

$$S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.$$

On se propose de déterminer certaines propriétés des valeurs propres de A. On note λ une valeur propre complexe non nulle de A.

Q33. ☞0.5✓ Montrer que λ est valeur propre de la matrice transposée de A.

Q34. ☞0.5✓ En déduire qu'il existe trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$(\mathscr{H}) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} px_1 & + & qx_2 & = & \lambda x_1 \\ qx_2 & + & px_3 & = & \lambda x_2 \\ & & px_1 & = & \lambda x_3 \end{array} \right. .$$

On considère désormais trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 qui vérifient le système $(\mathscr{H})$. On note alors $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ et on remarque que l'on peut toujours se placer dans l'un des trois cas suivants :

i) $M = |x_3|$; **ii)** $M = |x_2|$ avec $M > |x_3|$; **iii)** $M = |x_1|$ avec $M > |x_2|$ et $M > |x_3|$.

Q35. ☞1✓ Montrer, en distinguant ces trois cas, que $|\lambda| < 1$.

Q36. ☞1✓ Montrer l'existence de nombres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| < 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$.

Q37. ☞0.5✓ Montrer l'existence de nombres complexes μ, a, b et c tels que :

$\mu \neq 0$, $1 < |a| \leqslant |b| \leqslant |c|$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi_A(t) = \mu(t-a)(t-b)(t-c)$.

Partie V - Étude d'un dernier cas☞10✓

Dans cette partie, on suppose que :

- l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C ;
- l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre P ;
- l'automate passe du niveau 2 au niveau 3 en générant la lettre C ;
- si l'automate est au niveau 0 ou 2 et qu'il génère la lettre P, alors il retombe au niveau 0 ;
- si l'automate est au niveau 1 et qu'il génère la lettre C, alors il reste au niveau 1.

L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 3, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CPC.

Q38. ☞0.5✓ Reproduire, sur votre copie, la figure 3 suivante en la complétant pour résumer l'expérience de cette partie **V**.

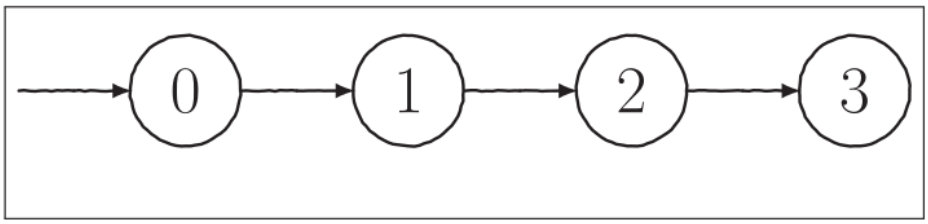


Figure 3

Pour $i \in [\![0,3]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_{n,i}$ l'événement « après avoir généré la n-ième lettre, l'automate se trouve au niveau i »et $E_{0,i}$ l'événement « l'automate se trouve initialement au niveau i ». On pose $p_{n,i} = \mathbf{P}(E_{n,i})$ et pour tout $t \in [-1,1]$, on définit $S_i(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,i}t^n$.

On note T l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 3.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

On remarque que la série génératrice de T (notée G_T) est alors S_3 et on note R_T son rayon de convergence. On rappelle que $R_T \geqslant 1$.

Q39. ☞0.5✓ Déterminer $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{0,2}$ et $p_{0,3}$.

Q40. ☞1✓ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\begin{cases} p_{n,0} &= p \cdot p_{n-1,0} &+ p \cdot p_{n-1,2} \\ p_{n,1} &= q \cdot p_{n-1,0} &+ q \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,2} &= p \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,3} &= q \cdot p_{n-1,2} \end{cases}$

Soit $t \in [-1,1]$. On note $S(t)$ la matrice colonne suivante : $S(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{pmatrix}$.

Q41. ☞1✓ Montrer que $\begin{cases} S_0(t) &= tp \cdot S_0(t) &+ tp \cdot S_2(t) &+ 1 \\ S_1(t) &= tq \cdot S_0(t) &+ tq \cdot S_1(t) \\ S_2(t) &= tp \cdot S_1(t) \\ S_3(t) &= tq \cdot S_2(t) \end{cases}$.

Q42. ☞0.5✓ Montrer que la matrice colonne $S(t)$ est solution de l'équation (E_t) définie en partie **IV**.

Q43. ☞1✓ Montrer que $\forall t \in]-R_T, R_T[$, $G_T(t) = \dfrac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}$ et montrer que $R_T > 1$.

Q44. ☞0.5✓ Montrer que T admet une espérance et une variance.

Q45. ☞1✓ Donner l'expression de $\mathbf{E}(T)$ en fonction de q seulement.

Q46. ☞4✓ Proposer une méthode permettant de déterminer le temps d'attente moyen de la première réalisation par l'automate de la séquence CCPPC : on précisera notamment le schéma des six niveaux correspondants et la matrice analogue à A que l'on peut faire intervenir dans ce problème.

Correction : Sujet et correction fournis par l'UPS.

Il s'agit d'un très bel énoncé. Le reproche majeur qu'on peut lui faire est le morcellement des questions : le tout aurait été faisable en environ 25 questions moins élémentaires (et 15 aux mines !).

Partie I – Étude d'un cas simple

1. Y est le rang du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli **indépendantes** : cette variable aléatoire suit donc une loi géométrique de paramètre q (la probabilité de générer C).

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{G}(q)\,;\, \mathbb{P}(Y = n) = p^{n-1}q \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$$

2. La série génératrice de Y est donc $\sum \frac{q}{p}(pt)^n$, de rayon de convergence $1/p$.
(pour $r \geqslant 0$, la suite $\left(\frac{q}{p}(pr)^n\right)$ est bornée si et seulement si $pr \leqslant 1$, c'est-à-dire $r \leqslant \frac{1}{p}$).
La somme de cette série vaut $G_Y(t) = \dfrac{q}{p}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(pt)^n = \dfrac{q}{p}\dfrac{pt}{1-pt}$, et ainsi :

$$\boxed{R_Y = \frac{1}{p} > 1 \text{ et } G_Y(t) = \frac{qt}{1-pt} \text{ pour tout } t \in]-1/p, 1/p[.}$$

Puisque le rapport du jury en parle, précisons que $0 < p < 1$, *ce qui justifie* $\dfrac{1}{p} > 1$...

3. En tant que somme de série entière, on sait que G_Y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, les dérivées se calculant en dérivant terme à terme. Comme $R_Y > 1$:

$$\boxed{G_Y \text{ est deux fois dérivable en 1.}}$$

Comme de plus pour tout $t \in]-1/p, 1/p[$, $G'_Y(t) = \dfrac{q(1-pt)+qtp}{(1-pt)^2} = \dfrac{q}{(1-pt)^2}$ puis $G''_Y(t) = \dfrac{2pq}{(1-pt)^3}$, on a donc :

$$\boxed{G'_Y(1) = \frac{1}{q} \text{ et } G''_Y(1) = \frac{2p}{q^2}.}$$

4. Le lien entre l'espérance (respectivement la variance) et les dérivées de G_Y en 1 sont vaguement au programme... et surtout à savoir retrouver. Je pense qu'ils peuvent être donnés cash, après éventuellement un prudent calcul au brouillon, qui donnerait quelque chose comme :

$$G'_Y(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(Y),$$

$$G''(Y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(Y(Y-1)) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y) = \mathrm{Var}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 - \mathbb{E}(Y),$$

soit ici :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1) = \frac{1}{q} \text{ et } \mathrm{Var}(Y) = G''_Y(1) + G'_Y(1) - G'_Y(1)^2 = \frac{p}{q^2}.}$$

Et si on connaît son cours (ou qu'on ouvre le poly...), on retrouve bien l'expression connue des espérances et variance d'une géométrique (attention, ici q joue le rôle usuel de p...). Le rapport du jury laisse penser qu'on pouvait/devait parachuter les formules.

Partie II – Séries entières

5. On est à nouveau face à une série entière géométrique de raison $1/a$; le cours ou l'argument vu plus haut nous donne son rayon de convergence :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum \left(-\frac{1}{a^{n+1}}\right) z^n \text{ vaut } |a|.}$$

6. Pour $|z| < |a|$, notre fine connaissance des séries géométriques nous donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{a^{n+1}}\right) z^n = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - z/a},$$

soit encore, comme annoncé :

$$\boxed{\text{Pour } |z| < |a|, \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{a^{n+1}}\right) z^n = \frac{1}{z-a}.}$$

7. Il va essentiellement falloir sommer des termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{b}{a} \neq 1$:

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^{k+1}} \cdot \frac{1}{b^{n+1-k}} = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{ab^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}},$$

soit après une dernière agitation de termes :

$$\boxed{v_n = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right).}$$

8. On a $|a| < |b|$, donc $\dfrac{1}{|a|} > \dfrac{1}{|b|}$, donc $\left(\dfrac{1}{b}\right)^{n+1} = o\left(\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n+1}\right)$, donc :

$$\boxed{v_n \sim \frac{1}{(b-a)a^{n+1}}.}$$

9. Pour $r > 0$, on a $(v_n r^n)$ bornée si et seulement si $\left(\dfrac{1}{a(b-a)} \cdot \left(\dfrac{r}{a}\right)^n\right)$ l'est, c'est-à-dire si $r \leqslant |a|$:

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum v_n z^n \text{ vaut } |a|.}$$

Pour $|z| < |a|$, les séries $\sum u_n(a) z^n$ et $\sum v_n(a) z^n$ sont absolument convergentes, donc leur produit de Cauchy également, la somme du produit étant égal au produit des sommes des deux séries :

$$\boxed{\text{Pour } |z| < |a|, \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n = \frac{1}{(z-a)(z-b)}.}$$

10. Pour $t \in]-a, a[$, on a $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n t^{n+2} = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} v_{k-2} t^k$: il s'agit bien d'un développement en série entière... et le rayon de convergence de la série associée est le même que celui de $\sum v_n z^n$.

11. On note que $g(t) = f(t) \cdot \dfrac{1}{t-c}$, et les arguments vus à la question 9 (produit de Cauchy de deux séries de rayon $\geqslant |a|$) nous permettraient de montrer de la même façon :

$$\boxed{g \text{ est développable en série entière au voisinage de 0, avec un rayon de convergence } \geqslant |a|.}$$

Les arguments à la Cauchy donnaient seulement une minoration du rayon, la valeur exacte n'étant acquise que par la forme particulière de la série entière.

Partie III – Étude d'un cas intermédiaire

12. Bien entendu, $p_1 = 0$. Ensuite, $p_2 = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2)$ (indépendance) donc $p_2 = q^2$. Enfin, la seule possibilité pour avoir $Z = 3$ est que les trois premières lettres soient PCC, donc toujours par indépendance : $p_3 = \mathbb{P}(P_1 \cap C_2 \cap C_3) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}(C_3) = pq^2$.

$$\boxed{p_1 = 0,\ p_2 = q^2 \text{ et } p_3 = pq^2.}$$

13. D'une part (P_1, C_1) est complet (deux événements disjoints, de réunion Ω), et d'autre part $C_1 = (C_1 \cap P_2) \cup (C_1 \cap C_2)$, l'union étant disjointe. Ainsi :

$$\boxed{(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2) \text{ est un système complet d'événements.}}$$

14. La formule des probabilités totales (pour le système complet d'événements précédent) nous donne :

$$p_n = \mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}_{P_1}(Z = n)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}_{C_1P_2}(Z = n)\mathbb{P}(C_1P_2) + \mathbb{P}_{C_1C_2}(Z = n)\mathbb{P}(C_1C_2)$$

Si les deux premières lettres sont C_1C_2, alors $Z = 2$ donc $Z \neq n$: $\mathbb{P}_{C_1C_2}(Z = n) = 0$. Si maintenant la première lettre est P_1, alors l'automate est dans l'état zéro, donc la probabilité pour que $n-1$ lettres plus tard il soit dans l'état 2 vaut $\mathbb{P}(Z = n-1)$: $\mathbb{P}_{P_1}(Z = n) = \mathbb{P}(Z = n-1) = p_{n-1}$. De même, $\mathbb{P}_{C_1P_2}(Z = n) = \mathbb{P}(Z = n-2)$ (si après 2 lettres on est dans l'état 0, la probabilité de se retrouver dans l'état 2 après les $n-2$ lettres suivantes est $\mathbb{P}(Z = n-2) = p_{n-2}$). Enfin, $\mathbb{P}(P_1) = p$ et par indépendance, $\mathbb{P}(C_1P_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(P_2) = pq$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 3,\ p_n = p\,p_{n-1} + pq\,p_{n-2}.}$$

On se rassure en regardant les trois premiers termes de la suite, bien entendu...

15. On fixe $t \in [-1, 1]$ et on multiplie la relation précédente par t^n, puis on somme pour $n \in [\![3, +\infty[\![$: les séries en jeu sont toutes absolument convergentes (les termes généraux sont positifs et majorés par $p_n = \mathbb{P}(Z = n)$, terme général d'une série absolument convergente). On obtient ainsi :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} p_n t^n = pt \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1} t^{n-1} + t^2 pq \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-2} t^{n-2}. \qquad (R)$$

Par décalages d'indices :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1} t^{n-1} = \sum_{i=2}^{+\infty} p_i t^i = G_Z(t) - (p_0 + p_1 t) = G_Z(t)$$

et $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} p_{n-2} t^{n-2} = G_Z(t)$. Puisque le membre de gauche de (R) vaut $G_Z(t) - p_2 t^2 = q^2 t^2$, on obtient $G_Z(t) - q^2 t^2 = (pt + pqt^2) G_Z(t)$, ce qui n'est plus trop éloigné de l'objectif.

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in [-1, 1],\ G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2 t^2.}$$

16. Pfff... une de ces nombreuses questions élémentaires un peu usantes. Or donc :

$$Q(-1) = 1 + p - pq = 1 + p - p(1-p) = 1 + p^2 \quad \text{et} \quad Q(1) = 1 - p - pq = q - pq = q(1-p) = q^2$$

$$\boxed{Q(-1) = 1 + p^2 > 0 \text{ et } Q(1) = q^2 > 0}$$

Ces résultats seront utiles... deux questions plus loin, pour localiser les racines de Q...

17. Le polynôme $Q = 1 - pX - pqX^2$ (quelle idée de parler de l'application polynomiale Q, comme en prébac...) est de degré 2, coefficient dominant $-pq$ et possède deux racines distinctes a et b : on peut donc le factoriser sous la forme $Q = -pq(X-a)(X-b)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ Q(t) = -pq(t-a)(t-b)}$$

18. *J'avais d'abord abordé cette question par un calcul absurde... avant de prendre 15cm de recul sur l'énoncé...*
L'application Q vérifie $Q(-1) = 1 > 0$, $Q(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (terme dominant) et est **continue**, donc le théorème des valeurs intermédiaires [1] nous assure qu'elle possède une racine dans $]-\infty,-1[$. De même, elle possède une racine dans $]1,+\infty[$. Par ailleurs, les deux racines de Q sont a et b avec $b < a$, donc : $b < -1 < 0 < 1 < a$. Ensuite :

$$|b| = -b = \frac{\sqrt{\Delta}+p}{2pq} > \frac{\sqrt{\Delta}-p}{2pq} = a = |a| > 1,$$

et ainsi :

$$\boxed{1 < |a| < |b|}$$

19. D'après les questions précédentes, $f(t) = \dfrac{-\frac{q}{p}t^2}{(t-a)(t-b)}$, et la question 10 s'applique avec $\lambda = -\dfrac{q}{p}$ (la condition $|a| < |b|$ étant bien vérifiée).

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière, de série entière associée } G_Z \text{ ayant un rayon de convergence } R_Z = |a|}$$

20. Haaaaaa une question intéressante et fine (la façon dont le rapport du jury passe dessus négligemment me surprend...). Ce qu'on a montré dans ce qui précède, c'est que la relation $G_Z(t) = \dfrac{q^2t}{1-pt-pqt^2}$ est valable pour $t \in]1,1[$, et il s'agit donc de l'étendre à $]-|a|,|a|[$. Or on a ici :

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n t^n$$

(notations de la deuxième partie), donc **par unicité du développement en série entière**, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = v_n$. La relation s'étend alors bien à $]-|a|,|a|[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in]-|a|,|a|[,\ G_Z(t) = \frac{q^2t^2}{1-pt-pqt^2}.}$$

21. Une somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. Or ici, $R_Z = |a| > 1$, donc G_Z est deux fois dérivable en 1, donc :

$$\boxed{Z \text{ possède une espérance et une variance.}}$$

Il reste à calculer $\mathbb{E}(Z) = G_Z'(1)$. Ici :

$$\forall t \in]-R_Z,R_Z[, \qquad G_Z'(t) = \frac{2tq^2(1-pt-pqt^2)+q^2t^2(p+2pqt)}{(1-pt-pqt^2)^2}.$$

Pour évaluer en 1 on note que $1-p-pq = q^2$ (question 16), donc :

$$\mathbb{E}(Z) = 2 + \frac{p}{q^2} + 2\frac{p}{q} = 2 + \frac{1-q}{q^2} + 2\frac{1-q}{q}.$$

Finalement, comme demandé :

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}.}$$

22. Il s'agit d'établir : $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q^2} \geqslant 1 + \dfrac{p}{q^2}$, soit encore : $q+1 \geqslant q^2+p = q^2+1-q$, ou encore $q^2 \leqslant 2q$, c'est-à-dire $q \leqslant 2$. Cette dernière inégalité est vérifiée, et on a travaillé par équivalence (de l'importance du choix des mots quand on rédige...), ce qui prouve l'inégalité demandée.

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) \geqslant \mathbb{E}(Y) + 1.}$$

1. Oui, bon... une extension.

23. La première occurrence de CC est évidemment **strictement** précédée par la première occurrence de C, donc on a toujours $Z \geqslant Y+1$. Par croissance de l'espérance, on on déduit : $\mathbb{E}(Z) \geqslant 1+\mathbb{E}(Y)$.

Partie IV – Algèbre linéaire

24. Si on a fini par comprendre cette histoire de « j'écris des choses en haut et à droite de la matrice pour comprendre ce que les colonnes représentent », alors on voit immédiatement qu'avec les notations qu'on imagine, on a $u(e_4)=0$, ou encore en notant $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AX_0 = 0 = 0.X_0$. Comme $X_0 \neq 0$, ceci prouve que :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A\text{, un vecteur propre associé étant } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

25. Soit $t \in \mathbb{R}$. On calcule $\chi_A(t)$ en développant par rapport à la première colonne (qui ne contient qu'un terme (potentiellement) non nul) puis les déterminants 3×3 par rapport à la première colonne (par exemple) :

$$\chi_A(t) = t\begin{vmatrix} t-p & 0 & -p \\ -q & t-q & 0 \\ 0 & -p & t \end{vmatrix} = t\left((t-p)(t-q)t + q(-(-p)(-p))\right) = t\left(t^3 - \underbrace{(p+q)}_{1}t^2 + pqt - qp^2\right),$$

soit donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ \chi_A(t) = t^4 - t^3 + \underbrace{pq}_{\alpha}\, t^2 \underbrace{-qp^2}_{\beta} t + \underbrace{0}_{\gamma}}$$

26. Question assez troublante... S est solution de (E_t) si et seulement si $S - tAS = L$, c'est-à-dire : $(I-tA)S = L$ (pas convaincu ? alors développez $(I-tA)S$!).
27. On rappelle que lorsque $\lambda \in \mathbb{K}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la linéarité du déterminant **par rapport à chacune de ses colonnes** implique : $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$, donc ici pour $t \neq 0$:

$$\psi_A(t) = \det(I-tA) = \det\left(t\left(\frac{1}{t}I - A\right)\right) = t^4 \det\left(\frac{1}{t}I - A\right).$$

$$\boxed{\psi_A(t) = t^4\chi_A(1/t).}$$

28. D'après ce qui précède et la question 25, on a :

$$\forall t \neq 0, \qquad \psi_A(t) = t^4\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^3} + pq\frac{1}{t^2} - p^2q\frac{1}{t}\right) = 1 - t + pqt^2 - p^2qt^3.$$

Il reste à voir que pour $t=0$, le résultat (mais pas le calcul !) reste vrai puisque $\psi_A(0) = \det(I) = 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ \psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt - t + 1.}$$

29. Puisque ψ_A est continue et non nulle en 0 :

Il existe un voisinage de 0 *sur lequel* ψ_A *ne s'annule pas.*

Suer ce voisinage, $I_4 - tA$ est alors inversible, si bien que l'équation (E_t), qui est équivalente à $(I_4-tA)S = L$, possède une unique solution (accessoirement, c'est $(I_4-tA)^{-1}L$).

$$\boxed{\text{Pour } t \text{ au voisinage de 0, } (E_t) \text{ possède une unique solution.}}$$

30. Le calcul par bloc de $(I_4-tA)S$ donne (attention : les U_k sont des colonnes et les S_k des scalaires !) :

$$(I_4-tA)S = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = S_0U_1 + \cdots + S_3U_4.$$

Mais par ailleurs on a supposé $(I_4-tA)S = L$. Ainsi :

$$\boxed{L = S_0U_1 + \cdots + S_3U_4}$$

31. Le caractère multilinéaire puis alterné du déterminant nous assure que :

$$\det_{\mathscr{B}}(U_1,U_2,U_3,L) = S_0 \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(\mathbf{U_1},U_2,U_3,\mathbf{U_1})}_{0} + \cdots + S_2 \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(U_1,U_2,\mathbf{U_3},\mathbf{U_3})}_{0} + S_3 \det_{\mathscr{B}}(U_1,U_2,U_3,U_4)$$

Ainsi :

$$\boxed{\det_{\mathscr{B}}(U_1,U_2,U_3,L) = S_3 \det(U_1,U_2,U_3,U_4) = S_3 \det(I_4 - tA) = S_3\psi_A(t).}$$

32. Au voisinage de 0, on a $\psi_A(t) \neq 0$, puis $S_3 = \dfrac{\det_{\mathscr{B}}(U_1,U_2,U_3,L)}{\psi_A(t)}\cdot$.
Or le déterminant au numérateur se calcule très simplement en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\det_{\mathscr{B}}(U_1,U_2,U_3,L) = \begin{vmatrix} 1-pt & 0 & -pt & 1 \\ -qt & 1-qt & 0 & 0 \\ 0 & -pt & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -qt & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -qt & 1-qt & 0 \\ 0 & -pt & 1 \\ 0 & 0 & -qt \end{vmatrix} = pq^2t^3$$

(oui, comptez bien le nombre de « moins » !). Comme on se souvient de l'expression de $\psi_A(t)$, on peut conclure !

$$\boxed{\text{Au voisinage de 0, } S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}\cdot}$$

33. On se souvient que le déterminant d'une matrice est celui de sa transposée. Ou encore que le rang d'une matrice est également celui de sa transposée. Ainsi, $A - \alpha I$ est inversible si et seulement si ${}^tA - \alpha {}^tI = {}^tA - \alpha I$ l'est : A et ${}^tA$ ont le même spectre (j'imagine que ce résultat pouvait d'ailleurs être donné cash). Puisque λ est valeur propre de A, le résultat suit :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } {}^tA.}$$

34. D'après la question précédente, il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ **non nul** tel que ${}^tAX = \lambda X$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 + qx_4 = \lambda x_3 \\ 0 = \lambda x_4 \end{cases}$$

Puisque $\lambda = 0$, la dernière équation fournit $x_4 = 0$, donc x_1, x_2 et x_3 ne sont pas tous nuls, et par ailleurs la troisième équation devient $px_1 = \lambda x_3$.

$$\boxed{\text{Le système } (\mathscr{H}) \text{ possède une solution non nulle.}}$$

35. Dans le cas où $M = |x_3| > 0$ (ben oui, la solution est non nulle, donc le coefficient de plus gros module est non nul), la troisième équation fournit $\lambda = p\dfrac{x_1}{x_3}$, donc $|\lambda| = p\dfrac{|x_1|}{|x_3|}\cdot$ Puisque $0 < p < 1$ et $\dfrac{|x_1|}{|x_3|} \leqslant 1$, on obtient bien $|\lambda| < 1$.
Dans le second cas, on regarde la deuxième équation. Par inégalité triangulaire :

$$|\lambda|\,|x_2| \leqslant q\,|x_2| + p\,|x_3|$$

donc $|\lambda| \leqslant q + p\dfrac{|x_3|}{|x_2|}$. Mais $\dfrac{|x_3|}{|x_2|} < 1$ et $p > 0$ (point crucial pour maintenir l'inégalité stricte) donc $p\dfrac{|x_3|}{|x_2|} < p$ puis $|\lambda| < p + q = 1$.
Le dernier cas se traite de la même façon, en s'intéressant à la première équation de $(\mathscr{H})$.

$$\boxed{|\lambda| < 1.}$$

Bien entendu, puisqu'exceptionnellement on traite d'inégalités STRICTES, il convient de faire bien attention aux arguments permettant de les obtenir, puisque ça y est enfin : vos mains écrivent naturellement, par défaut, des inégalités larges.

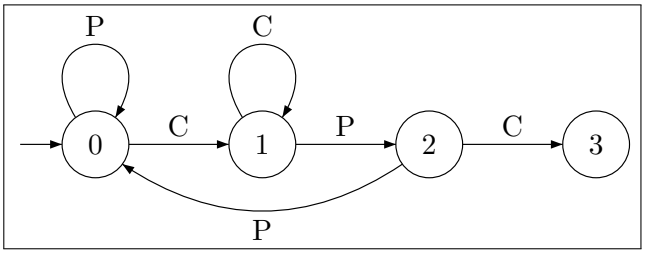
36. χ_A est un polynôme de degré 4, unitaire, et possédant 0 comme racine ; on sait alors qu'il est scindé sur $\mathbb{C}$ et que plus précisément il se factorise $X(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$, avec **a priori** les α_i pouvant être égaux entre eux, éventuellement nuls.
Mais ici, on a vu que χ_A possède 0 comme racine SIMPLE ($\chi_A'(0) = 1 \neq 0$), donc les α_i sont tous non nuls. Il reste à les réordonner pour que les modules soient croissants (et la question précédente nous assure que ces modules sont tous strictement plus petits que 1.

$$\boxed{\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C};\quad 0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| < 1 \ \text{ et } \ \forall t \in \mathbb{R},\ \chi_A(t) = t(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3).}$$

37. On a, pour $t \neq 0$:
$$\begin{aligned}\psi_A(t) &= t^4\chi_A(1/t) = t^4\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-\lambda_1\right)\left(\frac{1}{t}-\lambda_2\right)\left(\frac{1}{t}-\lambda_3\right) = t(1-\lambda_1 t)(1-\lambda_2 t)(1-\lambda_3 t)\\ &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 t(t-1/\lambda_1)(t-1/\lambda_2)(t-1/\lambda_3)\end{aligned}$$
Puisque $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| < 1$, on a $1 < \left|\frac{1}{\lambda_3}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\lambda_2}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\lambda_1}\right|$, ce qui nous incite à poser $a = \frac{1}{\lambda_3}$, $b = \frac{1}{\lambda_2}$, $c = \frac{1}{\lambda_1}$ et $\mu = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 (= -p^2 q) \neq 0$ Il reste à noter que la relation prouvée pour $t \neq 0$ s'étend à $t = 0$ (les deux membres sont égaux à 1).

Partie V – Étude d'un dernier cas

38. J'utilise la notation des informaticiens et non des zessistes pour ce type d'automates : les flèches arrivent sur des états et pas au mileu d'autres flèches !



L'idée (qui reste intuitive...) est de s'assurer de passer à l'état 3 au premier moment où on aura rencontré le mot CPC.
À chaque instant, la question est donc : quel est le plus gros préfixe (début) de CPC que je viens de rencontrer ?

39. Bien entendu :
$$\boxed{S_0(0) = \begin{pmatrix} p_{0,0}\\ p_{0,1}\\ p_{0,2}\\ p_{0,3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}$$

40. On ne détaille que la première équation, les autres étant de même nature. Le principe est le même qu'à la question 14 : on conditionne l'événement $E_{n,0}$ selon le système complet d'événements $(E_{n-1,0}, E_{n-1,1}, E_{n-1,2}, E_{n-1,3})$, sachant que la modélisation du problème nous donne les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{E_{n-1,i}}(E_{n,0})$: elles sont données par les flèches entrantes dans l'état 0 :
$$\mathbb{E}_{n,0} = \underbrace{\mathbb{P}(E_{n-1,0})}_{p_{n-1,0}}\underbrace{\mathbb{P}_{E_{n-1,0}}(E_{n,0})}_{p} + \underbrace{\mathbb{P}(E_{n-1,1})}_{p_{n-1,1}}\underbrace{\mathbb{P}_{E_{n-1,0}}(E_{n,0})}_{0} + \underbrace{\mathbb{P}(E_{n-1,2})}_{p_{n-1,2}}\underbrace{\mathbb{P}_{E_{n-1,2}}(E_{n,0})}_{p} + \underbrace{\mathbb{P}(E_{n-1,3})}_{p_{n-1,3}}\underbrace{\mathbb{P}_{E_{n-1,3}}(E_{n,0})}_{0},$$
ce qui nous donne exactement la première équation demandée.
Une lecture attentive du graphe nous donne les autres équations, basées sur le même principe.

41. Même principe qu'à la question 15 ! On prend la première relation du système précédent. On multiplie par t^n, en laissant de coté tp dans les deux termes du membre de droite. Toutes les séries étant absolument convergentes (les coefficients de ces séries entières sont positifs et de somme 1), on peut joyeusement sommer **pour** n **allant de** 1 **à** $+\infty$. Le membre de gauche est alors $S_0(t) - p_{0,0} = S_{0,t} - 1$, alors que celui de droite est $tpS_1(t) + tpS_2(t)$, et c'est gagné. Le même principe fournit les autres équations.

42. Hum, que vaut $tAS(t) + L$? Mais mais mais, c'est $S(t)$!

43. La fonction génératrice $G_T = S_3$ vaut, d'après la question 32 : $S_3(t) = \dfrac{pq^2t^3}{-p^2qt^3+pqt^2-t+1}$, pour t au voisinage de 0. Mais le raisonnement fait en fin de partie II (questions 19 et 20) nous assure qu'en fait, S_3 est de rayon de convergence égal au module de la plus petite racine du dénominateur, et que la relation s'étend du voisinage de 0 à $]-R,R[$. La question 37 nous assure que ces racines sont de module strictement plus grand que 1, ce qui prouve : $R_T > 1$.

$$\boxed{R_T > 1 \text{ et pour tout } t \in]-R_T,R_T[,\ G_T(t) = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3+pqt^2-t+1}}$$

44. Comme pour la question 21 : G_T est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_T,R_T[$ qui contient $[-1,1]$, donc G_T est deux fois dérivables en 1, donc :

$$\boxed{T \text{ possède une espérance et une variance.}}$$

45. Il reste à calculer courageusement $\mathbb{E}(T) = G_T'(1)$. On a :

$$G_T'(t) = \frac{3pq^2t^2}{-p^2qt^3+pqt^2-t+1} - pq^2t^3\frac{-3p^2qt^2+2pqt-1}{(-p^2qt^3+pqt^2-t+1)^2}$$

et donc :

$$G_T'(1) = \frac{3pq^2}{-p^2q+pq} - pq^2\frac{-3p^2q+2pq-1}{(-p^2q+pq)^2}$$

On simplifie :

$$-p^2q+pq = pq(-p+1) = pq^2$$

Ainsi :

$$G_T'(1) = 3 - \frac{-3p^2q+2pq-1}{pq^2} = \frac{1}{(1-q)q^2}\left(3pq^2+3p^2q-2pq+1\right)$$

Ensuite :

$$1 = (p+q)^3 = p^3+q^3+3pq^2+3p^2q \text{ donc } 3pq^2+3p^2q = 1-p^3-q^3$$

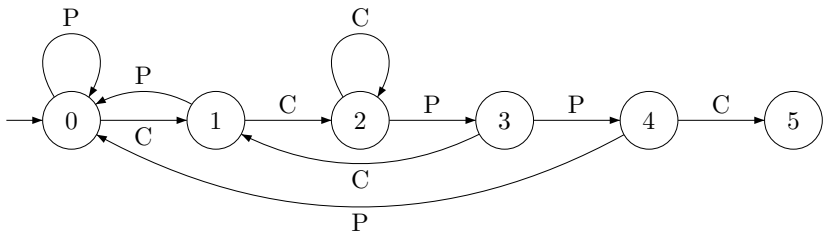
et donc :

$$\begin{aligned}3pq^2+3p^2q-2pq+1 &= 1-p^3-q^3-2pq+1\\ &= 2-(1-q)^3-q^3-2(1-q)q\\ &= 2-\left(1-3q+3q^2-q^3\right)-q^3-2(q-q^2)\\ &= 1+q-q^2\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{1+q-q^2}{q^2(1-q)}}$$

46. Commençons par construire l'automate associé à la recherche de ce motif. C'est la même chose que pour la question 18 : quel est le plus gros préfixe de CCPPC que je viens de rencontrer ? Si c'est par exemple CCP, j'aimerais lire P (le plus gros préfixe devient CCPC, je passe à l'état 4) ; mais si c'est C, alors je viens de lire CCPC : le plus gros préfixe de CCPPC en cours est C et je passe dans l'état 1.



Maintenant, la matrice associée à cet automate se construit en plaçant, en position (i, j), la probabilité de passer de l'état j à l'état i (oui, dans ce sens ; et les numérotations partent de 0) :

$$A = \begin{pmatrix} p & p & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche l'espérance de S_5, qui est une fraction avec $p^2q^3t^5$ au numérateur (« il se lit sous la diagonale »), et $\psi_A(t)$ au dénominateur, qui est aussi $t^6\chi_A(1/t)$. Pas envie de calculer tout ça ? ? ? Moi non plus...

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{1+q^2(1-q)^2}{q^3(1-q)^2}.}$$

Devoir non surveillé pour le lundi 3 mars 2025

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Thèmes: Calculatrice non autorisée

Réduction, intégrale généralisée, produit scalaire et espace euclidien

Exercice 1 CCINP PC 2019 EXO 1

Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. ☞0.5✓ Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.
2. ☞1✓ Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. ☞0.5✓ Soit $k \in [\![1,n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.$$

4. ☞0.5✓ Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. ☞1✓ Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. ☞1✓ Écrire la matrice de α dans la base $(1,X,\dots,X^n)$.
7. ☞0.5✓ En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0,n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.

8. ☞0.5✓ Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

9. ☞1✓ En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. ☞0.5✓ Justifier que P_k est de degré k.
11. ☞1✓ Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. ☞1✓ Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.
13. ☞0.5✓ En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.
14. ☞1✓ Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \dots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

15. ☞1✓ Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

16. ☞0.5✓ En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$
17. ☞1✓ Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Correction (fournie par l'UPS)

I.1 - Généralités

Q1. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et f la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\exp(-t)$.
Par produit, f est continue sur $[0; +\infty[$.

PQ est un polynôme que l'on peut écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $t^2 f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k t^{2+k} e^{-t}$.

Pour tout k, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^{2+k}e^{-t} = 0$ donc, par somme, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^2 f(t) = 0$ et $f(t) = o(1/t^2)$. $2 > 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$. f l'est donc aussi.
On en conclut que f est intégrable sur $[0; +\infty[$ et donc l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

Q2. **commentaire :** pour définie positif, il faut arriver à $P = 0$ et donc utiliser l'infinité des racines.
Soit $\phi : (P, Q) \mapsto (P|Q)$.

- La question précédente prouve que ϕ est définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité d'intégrales généralisées convergentes, $\phi(P_1 + \lambda P_2, Q) = \phi(P_1, Q) + \lambda\phi(P_2, Q)$: ϕ est linéaire à gauche.
- Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\phi(P, Q) = \phi(Q, P)$: ϕ est symétrique ; étant linéaire à gauche, elle est bilinéaire et symétrique.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\phi(P, P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t}dt$.
  Pour tout $t \in [0; +\infty[$, $P(t)^2 e^{-t} \geqslant 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $\phi(P, P) \geqslant 0$: ϕ est positive.

On suppose $\phi(P,P)=0$; alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t}dt = 0$.

Comme $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue et positive, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P(t)^2 e^{-t} = 0$ et $P(t) = 0$. Le polynôme P a une infinité de racines, donc est nul. Par conséquent ϕ est définie.

– **Conclusion :** ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q3. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $u(t) = t^k$, $v(t) = -e^{-t}$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, pour $t \geqslant 0$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = e^{-t}$. De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc, par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$$

c'est-à-dire,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt$$

Q4. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(k)$: "$(X^k|1) = k!$".

Pour $k = 0$, $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$: $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(k)$ vraie.

D'après la question précédente, $(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1)$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $(X^{k+1}|1) = (k+1)k! = (k+1)!$: $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On peut alors conclure par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire, $(X^k|1) = k!$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

Propriétés de l'application α

Q5. ☞0.5+ 0.5✓Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P \leqslant n$ donc $\deg P' \leqslant n-1$, $\deg P'' \leqslant n-2$; ainsi $\alpha(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

De plus, par linéarité de la dérivation, α est linéaire donc α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1 - X$ et, pour $k \geqslant 2$, $\alpha(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + kX^{k-1} - kX^k = -kX^k + k^2X^{k-1}$. La matrice de α dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

Q7. Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux à savoir $0, -1, -2, \cdots, -n$. α possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ donc α est diagonalisable.

Finalement, α est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k;\ k \in [\![0,n]\!]\}$.

Q8. D'après la question précédente, le polynôme caractéristique de α est scindé à racines simples donc les sous espaces propres de α sont de dimension 1 : $\dim\left(\ker \alpha + kid_{\mathbb{R}_n[X]}\right) = 1$.

Q9. Soit Q_k un vecteur (non nul) engendrant $\ker\left(\alpha + kid_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$ et c_k son coefficient dominant.

c_k est non nul et $P_k = \dfrac{1}{c_k}Q_k$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Si R_k est un polynôme vérifiant ces propriétés, en particulier, $R_k \in \ker\left(\alpha + kid_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = aQ_k$. Le coefficient dominant de R_k est 1 donc $a = \dfrac{1}{c_k}$ et $R_k = P_k$.

Par conséquent, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q10. Soit d le degré de P_k

On raisonne sur les termes de plus haut degré. Si k est non nul, on peut identifier les coefficients de degré k pour obtenir $-d = -k$ donc $d = k$.

Pour $k = 0$: $\alpha(1) = 0$ et 1 est un polynôme de coefficient dominant 1 tel que $\alpha(1) = -0 \times 1$ donc, par unicité, $P_0 = 1$, de degré 0.

Q11. On vient de voir que $P_0 = 1$. Soit $P = X + a$ un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1.
$\alpha(P) = 1 - X$ donc $\alpha(P) = -P$ si et seulement si $a = -1$. Ainsi $P_1 = X - 1$.
De même, on pose $P = X^2 + bX + c$. $P' = 2X + b$, $P'' = 2$ et $\alpha(P) = 2X + (1-X)(2X+b) = -2X^2 + (4-b)X + b$ donc $\alpha(P) = -2P$ si et seulement si $4 - b = -2b$ et $b = -2c$ d'où $b = -4$ et $c = 2$.
Par conséquent, $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \cdots, P_n)$

Q12. Par définition, $(\alpha(P)|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt$.
on pose $u(t) = tP'(t)e^{-t}$. u et Q sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, $u'(t) = e^{-t}(tP''(t) + P'(t) - tP'(t))$; par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)Q(t) = 0$ donc, par intégration par parties,

$$(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$$

Q13. En procédant de même mais en partant de $(P|\alpha(Q))$ et en échangeant les rôles de P et Q, on obtient $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

Q14. **Méthode 1 :** Soit k et l deux entiers distincts de $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après $Q13$, $(\alpha(P_k)|P_l) = (P_k|\alpha(P_l))$ et, d'après $Q9$, $-k(P_k|P_l) = -l(P_k|P_l)$; or $k \neq l$ donc $(P_k|P_l) = 0$
Conclusion : $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$; elle ne comporte pas le vecteur nul donc elle est libre et elle contient $n+1$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Méthode 2 : comme α est autoadjoint, le théorème spectral assure l'existence d'une BON de vecteurs propres, mais rien n'indique a priori que cette base soit $(P_0, \ldots, P_n)$ (et ce n'est de toute manière pas le cas car elle n'est pas normée).
Par contre, en conséquence directe du théorème spectral, les sous-espaces propres sont supplémentaires orthogonaux,ù or ici c'est des droites, donc pour k et l deux entiiers, on a : $P_k \in E_{-k}(\alpha)$ et $P_l \in E_{-l}(\alpha)$, et ces espaces sont orthogonaux, donc $P_k \perp P_l$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

Q15. Soit $(l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{R}^n$.
Sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on considère les applications $\phi : P \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ et $\psi : P \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i P(x_i)$.
ϕ et ψ sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc elles sont égales si et seulement si elles coincident sur tous les vecteurs de la base $(1, X, \cdots, X^{n-1})$.
Pour $i \leqslant n-1$, $\phi(X^i) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i e^{-t}dt = i!$ et $\psi(X^i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} l_j x_j^i$.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\phi(X^i) = \psi(X^i)$ équivaut donc au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

Q16. La matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de Vandermonde associée aux réels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qui sont deux à deux distincts donc le déterminant de V est non nul. V est donc inversible et le système précédent admet une unique solution : il existe un unique n-uplet $(l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la relation $(*)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q17. Soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^2$.
$P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et, pour tout i, $P(x_i) = 0$ donc $\psi(P) = 0$.
Par contre, $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[0; +\infty[$ donc $\phi(P) > 0$.
Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} l_i P(x_i)$$

Exercice 2 **CCP 2017 PSI** Problème 1

Présentation générale

On se propose ici d'étudier certaines propriétés des matrices antisymétriques réelles. Après avoir étudié un exemple en dimension 2, on utilise les matrices antisymétriques pour paramétrer un sous-ensemble de matrices orthogonales.

Notations

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour tout entier $n > 0$, on désigne par $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille n et par $O_n(\mathbb{R})$ celui de matrices réelles orthogonales de taille n. Le groupe *spécial orthogonal* est constitué des matrices orthogonales de déterminant 1.

Partie I - Un exemple en dimension 2

1. ☞0.5✓ Soit t un réel et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres complexes de A.
2. ☞1✓ Calculer $R = (I_2 + A)(I_2 - A)^{-1}$ et montrer que R est une matrice du groupe spécial orthogonal.
3. ☞1✓ Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $M = (I_2 + R_\theta)^{-1}(I_2 - R_\theta)$.

Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Dans ce qui suit, n désigne un entier > 0.

4. ☞0.5✓ Soient $B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si C est inversible et $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.
5. ☞1✓ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons

$$(AX)^T \overline{X}$$

Montrer que λ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).

6. ☞0.5 + 0.5 + 0.5✓ Déduire de la question précédente que si A est antisymétrique réelle, alors $I_n + A$ est inversible et

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$

Montrer que $R = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est une matrice orthogonale.

7. ☞1✓ Calculer le déterminant de R.
8. ☞1✓ Soit R une matrice orthogonale telle que $I_n + R$ soit inversible. Démontrer que la matrice $A = (I_n + R)^{-1}(I_n - R)$ est antisymétrique.
9. ☞1.5✓ On suppose ici que $n = 3$ et que $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée par la base canonique. Soit r une rotation d'angle $\theta \in]-\pi, \pi[$ autour d'un axe orienté par un vecteur u de norme 1 et soit $R \in O_3(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique.
Montrer qu'il existe une matrice antisymétrique $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$R = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A)$$

Correction (sujet et correction fournis pas l'UPS) légèrement modifiés :

Partie I - Un exemple en dimension 2

1. On a

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + t^2$$

Les valeurs propres étant les racines de χ_A,

$$\mathrm{Sp}(A) = \{it, -it\}$$

2. **Commentaire :** il faut utiliser le résultat vu en cours :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

On vérifie par calcul que

$$(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$R = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de R sont clairement orthogonales. Leur norme vaut 1 (car $(1-t^2)^2+4t^2 = (1+t^2)^2$) et donc R est orthogonale.
REM1 : on peut aussi et c'est pareil vérifier $R^T R = I_2$.
REM2 : on peut aussi s'avancer pour la q6. et faire directement le cas général en remarquant que A est antisymétrique. Son déterminant étant égal à 1, on en déduit que

$$R \in SO_2(\mathbb{R})$$

où $SO_n(\mathbb{R})$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

3. Un calcul permet de vérifier que

$$(I_2 + R_\theta)^{-1} = \frac{1}{2(1+\cos(\theta))}\begin{pmatrix} 1+\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1+\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le calcul matriciel donne alors

$$M = \frac{1}{1+\cos(\theta)}\begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

4. On suppose $BC = CB$. En multipliant à gauche et droite par C^{-1}, on obtient immédiatement

$$C^{-1}B = BC^{-1}$$

REM : autre méthode plus compliqué : B commute avec C or C^{-1} est un polynôme en C, donc B commute avec C^{-1}.

5. On a

$$(AX)^T\overline{X} = (\lambda X)^T\overline{X} = \lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

et par ailleurs, en utilisant le fait que A est réelle,

$$(AX)^T\overline{X} = X^TA^T\overline{X} = -X^TA\overline{X} = -X^T\overline{(AX)} = -\overline{\lambda}X^T\overline{X} = -\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

Comme $\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 \neq 0$ (car X est non nul) on a $\lambda = -\overline{\lambda}$ ce qui prouve que λ est imaginaire pur. On a ainsi

$$\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$$

6. En particulier, -1 n'est pas valeur propre de A et $I_n + A$ est donc inversible. Comme $I_n - A$ et $I_n + A$ commutent, la question 4 donne

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$

On a de plus (puisque $(MN)^T = N^TN^T$ et $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$)

$$RR^T = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n - A)^{-1}$$

Comme $(I_n. - A)$ et $(I_n + A)$ commutent, on conclut que $RR^T = I_n$ et donc

$$R \in O_n(\mathbb{R})$$

7. Le déterminant étant un morphisme multiplicatif,

$$\det(R) = \frac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)}$$

Méthode 2 : Comme $A^T = -A$, on a :

$$\det(I_n - A) = \det(I_n + A^T) = \det\left((I_n + A)^T\right) = \det(I_n + A)$$

donc $\det(R) = 1$.
Méthode 1 : On a :

$$\det(R) = \frac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)} = \frac{\chi_A(1)}{(-1)^n \chi_A(-1)}$$

On note k la multiplicité de 0 comme valeur propre de A (éventuellement nulle). On a donc l'existence d'un polynôme Q tel que $\chi_A = X^k Q$ et Q est sans racine réelle. On a alors $Q(1)$ et $Q(-1)$ de même signe et $\det(R)$ est du signe de $(-1)^{n-k}$. Or, $n-k$ est le degré de Q et est donc pair (car Q est un polynôme réel sans racine réelle). $\det(R)$ est donc positif.
Comme R est une matrice orthogonale,

$$\det(R) = 1$$

8. On a

$$A^T = (I_n - R)^T (I_n + R)^{-1^T} = (I_n - R^T)(I_n + R^T)^{-1} = (I_n - R^{-1})(I_n + R^{-1})^{-1}$$

Un calcul simple montre que

$$(I_n + R)(I_n - R^{-1}) = I_n + R - R^{-1} - I_n = (R - I_n)(I_n + R^{-1})$$

en multipliant par l'inverse de $(I_n + R^{-1})$ à droite et l'inverse de $(I_n + R)$ à gauche, on en déduit que

$$A^T = (I_n + R)^{-1}(R - I_n) = -A$$

ce qui montre que A est antisymétrique.

9. Dans une base orthonormée directe de premier vecteur orientant et dirigrant l'axe, on connaît la matrice de la rotation r. En notant P la matrice de passage de la base canonique à cette base adaptée, on a $P \in O_3(\mathbb{R})$ (changement de b.o.n.) et

$$P^{-1}RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$$

Posons $t = \tan(\theta/2)$ (qui existe puisque $\theta \neq 0[\pi]$) et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $C = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que $I_3 - B$ est inversible et que

$$(I_3 + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + C)^{-1} \end{pmatrix}$$

puis que

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + C)^{-1}(I_2 - C) \end{pmatrix}$$

Avec la première partie, on obtient (il faut changer B en $-B$ et donc t en $-t$ et $(I_3 + B)^{-1}$ et $(I_3 - B)$ commutent)

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & -\frac{2t}{1+t^2} \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Or, $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(\theta) = \cos(\theta)$ et $\frac{2t}{1+t^2} = \sin(\theta)$ et donc

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = P^{-1}RP$$

On en déduit que

$$R = P(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B)P^{-1} = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A) \text{ avec } A = PBP^{-1}$$

On conclut en remarquant que puisque B est antisymétrique et P orthogonale, A est antisymétrique.

Exercice 3 E3A PSI 2019 Math 1 exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B} = ((E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2})$ sa base canonique.

On rappelle que $\forall (r,t,u,v) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{r,t} \times E_{u,v} = \begin{cases} O_n & \text{lorsque } t \neq u \\ E_{r,v} & \text{lorsque } t = u \end{cases}$

Si $M \in E_n$, on notera dans tout l'exercice, $Tr(M)$ la trace de la matrice M et M^T la matrice transposée de la matrice M.

On dira qu'une matrice M de E_n est **nilpotente** s'il existe un entier naturel r non nul tel que : $M^r = O_n$. Par exemple, la matrice $E_{1,2}$ de $\mathscr{B}$ est nilpotente.

On rappelle que l'application qui à tout couple de matrices (A,B) de E_n associe $(A \mid B) = Tr(A^T B)$ définit un produit scalaire sur E_n.

On dira qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ est **stable pour une matrice** A de E_n si : $\forall X \in V, AX \in V$.

Soit H un hyperplan de E_n. On veut montrer que H contient au moins une matrice inversible de E_n.

1. ☞0.5✓ Soit T une matrice n'appartenant pas à H. Justifier que l'on a : $E_n = H \oplus \text{Vect}(T)$.
2. ☞0.5✓ Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique $\mathscr{B}$.
3. ☞1✓ Déterminer les valeurs propres d'une matrice nilpotente.
4. ☞1.5✓ On note $U = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (E_{i,j} + E_{j,i})$. Démontrer que U est inversible.
5. On suppose alors que H ne contient pas de matrice inversible.

   Soit N une matrice nilpotente de E_n

   (a) ☞0.5✓ Justifier l'existence d'une matrice $A \in H$ et d'un scalaire α tels que : $N = A + \alpha I_n$.

   (b) ☞1+0.5✓ Justifier que 0 est valeur propre de A et prouver que $N \in H$.
6. ☞1✓ Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que H est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire que :

$$\forall (A,B) \in H^2, \quad AB \in H$$

7. ☞1✓ On prend $n = 2$. Exhiber un hyperplan de E_2 stable pour la multiplication des matrices.
8. On se propose de montrer que $I_n \in H$ et on raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin H$.

   (a) ☞1✓ On note p la projection sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à H.
   Prouver que l'on a : $\forall (M,N) \in E_n^2$, $p(MN) = p(M)p(N)$.

   (b) ☞1✓ Démontrer l'implication suivante : $M^2 \in H \Rightarrow M \in H$.

   (c) ☞1✓ Prouver alors que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j} \in H$.

   (d) ☞0.5✓ Conclure.

On se propose maintenant de démontrer que $n = 2$, c'est-à-dire de démontrer qu'il n'existe pas d'hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication pour $n \geqslant 3$

9. Soit A un élément non nul de l'orthogonal de H pour le produit scalaire $(. \mid .)$.

   (a) ☞1✓ Justifier que pour tout $B \in H$, BA^T est colinéaire à A^T.

   (b) ☞1✓ Montrer que la matrice A^T n'est pas inversible.

   (c) ☞1✓ Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par : $W = \text{Im}(A^T)$.
   Montrer que W est stable pour tous les éléments de H, c'est-à-dire que pour toute matrice $B \in H$, W est stable pour B.

   (d) ☞0.5✓ Soient :
   - p le rang de la matrice A^T,
   - $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\text{Im}(A^T)$, complétée en une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$,
   - P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{B}_1$.

   Montrer que l'application $\varphi_P : M \in E_n \mapsto P^{-1}MP \in E_n$ est un automorphisme de E_n.

(e) ☞1✓ En déduire que l'on a : $\dim(H) \leqslant n^2 - p(n-p)$.

10. ☞1✓ Conclure.

Sujet et correction fournis par l'UPS, légèrement modifiés

Correction :

1. **Commentaire :** c'est clairement une question de cours.
   Soit T une matrice n'appartenant pas à H.
   Soit $A \in H \cap \mathrm{Vect}(T)$.
   Puisque $A \in \mathrm{Vect}(T)$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}, A = \lambda T$. Or $A = \lambda T \in H$ avec $T \notin H$, donc $\lambda = 0$ et $A = 0$. Ainsi $H \cap \mathrm{Vect}(T) = \{0\}$ et la somme est directe.
   De plus,
   $$\dim(H \oplus \mathrm{Vect}(T)) = \dim(H) + \dim \mathrm{Vect}(T) = (n^2-1)+1 = n^2 = \dim(E_n),$$
   donc $\boxed{E_n = H \oplus \mathrm{Vect}(T).}$
2. Soit $i \in [|1,n|]$. On a $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ donc $\forall r \geqslant 1, E_{i,i}^r = E_{i,i} \neq 0$. Donc $E_{i,i}$ n'est pas nilpotente.
   Soit $i \neq j$ deux indices dans $[|1,n|]$. Alors $E_{i,j}^2 = 0$ donc $E_{i,j}$ est nilpotente (d'indice de nilpotence 2).
   $\boxed{\text{Les matrices nilpotentes de la base canonique } \mathscr{B} \text{ sont les } \{E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2, i \neq j\}.}$
3. ☞0.5 pour chaque inclusion✓ Soit A une matrice nilpotente. Il existe $r \geqslant 1$ tel que $A^r = 0$.
   Le polynôme $P(X) = X^r$ annule la matrice A, donc $Sp(A) \subset \mathrm{Racines}(P) = \{0\}$.
   Rédaction 1 : Puisque le spectre complexe de A est non vide, on a $\boxed{Sp(A) = \{0\}.}$
   Rédaction 2 : Si A est inversible, alors on multiplie par A^{r-1} et $A = 0$. Ainsi, une matrice nilpotente ne peut pas être inversible et donc 0 est dans le spectre.
   $\boxed{\text{La seule valeur propre d'une matrice nilpotente est 0.}}$
4. **Commentaire :** cette question n'est pas triviale.
   La matrice U contient des 1 partout sauf sur la diagonale.
   Méthode 1 : La première idée est un calcul de rang / déterminant :
   $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$
   En faisant :
   $$\forall i > 1,\ l_i \leftarrow l_i - l_1$$
   on obtient :
   $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -1 & & & & \\ 1 & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{vmatrix}$$
   Puis en faisant :
   $$C_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{n} C_k$$

on obtient :

$$\begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & \\ & & & & & -1 \end{vmatrix}$$

cette dernière matrice est triangulaire supérieure donc le déterminant de la matrice est $n-1$ / le rang de la matrice est plein, la matrice est inversible.

Méthode 2 : Posons

$$J = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice dont tous les coefficients valent 1. On remarque que

$$U + I_n = \sum_{i<j} (E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} E_{i,i} = J,$$

donc $U = J - I_n$.

La matrice J est de rang 1 donc par le théorème du rang, $\dim(\ker(J)) = n-1$. 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$ dans χ_J. De plus $Tr(J) = n = (n-1) \times 0 + 1 \times n$ est la somme des valeurs propres donc n est aussi valeur propre. Ainsi $Sp(J) = \{n, 0\}$.

J est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormale, donc $\exists P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}JP = \mathrm{Diag}(n, 0, \dots, 0)$.

Or $U = J - I_n$ donc $P^{-1}UP = P^{-1}JP - I_n = \mathrm{Diag}(n, 0 \dots, 0) - \mathrm{Diag}(1, \dots, 1) = \mathrm{Diag}(n-1, 1, \dots, 1)$.

$\boxed{Sp(U) = \{n-1, 1\}.}$ Ainsi $0 \notin Sp(U)$ donc $\ker(U) = \{0\}$ et $\boxed{U \text{ est inversible.}}$

5. (a) La matrice identité est inversible, or on suppose que H ne contient pas de matrice inversible, donc $I_n \notin H$.
D'après la question 1 appliquée avec $T = I_n$, on a $M_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$ donc toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme d'une somme d'une matrice de H et d'une matrice de $\mathrm{Vect}(I_n)$.
En particulier, N s'écrit sous la forme $N = A + B$ avec $A \in H$ et $B \in \mathrm{Vect}(I_n)$.
Donc $\boxed{\exists A \in H, \exists \alpha \in \mathbb{R},\ N = A + \alpha I_n.}$

(b) ☞0.5+1✓ $A \in H$ or par hypothèse, H ne contient pas de matrice inversible, donc A n'est pas inversible. Par suite $\ker(A) \neq \{0\}$ donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A.}$
N est nilpotente donc $\exists r \geqslant 1, N^r = (A + \alpha I_n)^r = 0$, donc le polynôme $P(X) = (X + \alpha)^r$ annule la matrice A. On en déduit que $Sp(A) \subset \mathrm{Racines}(P) = \{-\alpha\}$. Puisque 0 est valeur propre de A, on a nécessairement $\boxed{\alpha = 0.}$ D'où $\boxed{N = A \in H.}$
Autre rédaction : Il existe un X non nul tel que $AX = 0$, donc $NX = \alpha X$, ie $\alpha \in Sp(N)$ or N est nilpotente, donc $\alpha = 0$.

6. Supposons par l'absurde que H ne contient pas de matrice inversible, alors on vient de montrer que toute matrice nilpotente appartient à H.
Alors les matrices $(E_{i,j})_{i \neq j}$ sont toutes dans H. En particulier, leur somme $U = \sum_{i<j} (E_{i,j} + E_{j,i})$ est une somme de matrices de H, or H est un sous-espace vectoriel, donc $\boxed{U \in H}$, ce qui est absurde puisqu'on a montré à la question 4 que U est inversible.
Ainsi $\boxed{\text{tout hyperplan } H \text{ de } E_n \text{ contient au moins une matrice inversible.}}$

7. **Commentaire :** il faut un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, donc un espace de dimension 3.
Notons $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel constitué des matrices symétriques de E_n. $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la multiplication des matrices et $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Pour $n = 2$, $\dim(\mathscr{S}_2(\mathbb{R})) = 3 = 4 - 1$, on peut dire que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{21} + E_{12})$.
Donc $\boxed{\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \text{ est un hyperplan de } E_2 \text{ stable pour la multiplication matricielle.}}$
Autre idée : les matrices triangulaires supérieures, ie $\mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{21})$.

8. (a) On suppose par l'absurde que $I_n \notin H$.
D'après la question **1.**, on a $E_n = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus H$, et on peut définir la projection p sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à H.

Soit $(M,N) \in E_n^2$. On utilise la décomposition en somme directe $E_n = \text{Vect}(I_n) \oplus H$:

$$\begin{array}{llll} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, & \exists A_1 \in H, & M = \lambda_1 I_n + A_1 & \text{avec } p(M) = \lambda_1 I_n. \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, & \exists A_2 \in H, & M = \lambda_2 I_n + A_2 & \text{avec } p(M) = \lambda_2 I_n. \end{array}$$

Il vient

$$MN = (\lambda_1 I_n + A_1)(\lambda_2 I_n + A_2) = \underbrace{\lambda_1 \lambda_2 I_n}_{\in \text{Vect}(I_n)} + \underbrace{\lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_1 + A_1 A_2}_{\in H},$$

car H est un sous-espace vectoriel stable pour la multiplication matricielle, donc $A_1 A_2 \in H$.
On en déduit que $p(MN) = \lambda_1 \lambda_2 I_n = (\lambda_1 I_n)(\lambda_2 I_n) = p(M)p(N)$.
D'où $\boxed{\forall (M,N) \in E_n^2, p(MN) = p(M)p(N).}$

(b) Soit $M \in E_n$ telle que $M^2 \in H$. La décomposition $M^2 = 0 + M^2$ avec $0 \in \text{Vect}(I_n)$ et $M^2 \in H$ donne $p(M^2) = 0$.
D'après la question **8.1.**, on a $0 = p(M^2) = p(M)^2$.
Notons $M = \lambda I_n + A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}, A \in H$, alors $p(M) = \lambda I_n$ donc $0 = p(M)^2 = (\lambda I_n)^2 = \lambda^2 I_n$ donc $\lambda = 0$. On en déduit que $p(M) = 0$ puis $M \in H$.
Ainsi $\boxed{M^2 \in H \Rightarrow M \in H.}$

(c) Soit $(i,j) \in [|1,n|]^2$.
Premier cas. On suppose que $i \neq j$. On a $(E_{i,j})^2 = 0 \in H$ puisque H est un sous-espace vectoriel.
D'après la question **8.2.**, $(E_{i,j})^2 \in H \Rightarrow E_{i,j} \in H$.
Deuxième cas. On suppose que $i = j$. Soit $i \in [|1,n|]$. Puisque $n = 2$, il existe $j \in [|1,n|]$ tel que $i \neq j$.
Or H est stable par multiplication matricielle et contient $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$ donc $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i} \in H$.
Donc $\boxed{\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, \quad E_{i,j} \in H.}$

(d) **Preuve 1 :** on a alors $I_n = E_{1,1} + \ldots + E_{n,n} \in H$ car H est stable par combinaison linéaire, ce qui est absurde puisque l'on a supposé que $I_n \notin H$.
Preuve 2 : on a $E_n = \text{Vect}(E_{i,j}, 1 \leqslant i,j \leqslant n) \subset H \subset E_n$, donc $H = E_n$ ce qui est absurde puisque H est un hyperplan de E_n.
Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction donc $\boxed{I_n \in H.}$

9.

(a) On note $H^\perp$ l'orthogonal de H pour le produit scalaire de l'énoncé $(\cdot|\cdot)$.
A est une matrice non nulle de l'orthogonal de H : $A \in H^\perp$.
Montrons tout d'abord que $H^\perp = \text{Vect}(A)$.
D'après le cours, $H^\perp$ est un supplémentaire de H, or H est un hyperplan de E_n donc son orthogonal est de dimension 1. Puisque $A \in H^\perp$ avec $A \neq 0$, on en déduit que (A) est une base de $H^\perp$, donc on a $\boxed{H^\perp = \text{Vect}(A).}$
On fixe maintenant $B \in H$ quelconque. Soit $C \in H$. Puisque H est stable pour la multiplication des matrices, la matrice CB est encore dans H.
Or $A \in H^\perp$ donc le produit scalaire suivant est nul :

$$0 = (A|CB) = Tr(A^T CB) = Tr(BA^T C) = Tr\left(\left(AB^T\right)^T C\right) = (AB^T|C).$$

On vient de montrer que $\forall C \in H, (AB^T|C) = 0$, autrement dit $AB^T \in H^\perp = \text{Vect}(A)$.
Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, AB^T = \lambda A$. En transposant, il vient : $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad BA^T = \lambda A^T.}$
En d'autres termes, $\boxed{\text{pour tout } B \in H,\ BA^T \text{ est colinéaire à } A^T.}$

(b) **Méthode 1 :** Supposons A^T inversible, alors avec la question précédente, on a pour tout $B \in H$, il existe λ tel que $BA^T = \lambda A^T$ et donc tel que $B = \lambda I_n$, on en déduit que $H \subset \text{Vect}(I_n)$, donc $dim(H) \leqslant 1$ ce qui n'est pas possible puisque H est de dimension $n^2 - 1$.
Méthode 2 :
Dans un premier temps, montrons que H contient au moins une matrice non nulle et non inversible.
Posons $K = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}) \subset E_n$ (c'est possible car $n \geqslant 2$). On a $\dim(K) = 2$.
Soit $A = (a_{i,j}) \in K$, alors A est triangulaire supérieure avec $a_{2,2} = 0$, donc $\det(A) = 0$ et A n'est pas inversible.
Ainsi K est constitué de matrices non inversibles.
Supposons par l'absurde H et K en somme directe. Alors on aurait

$$\dim(H \oplus K) = \dim(H) + \dim(K) = (n^2 - 1) + 2 = n^2 + 1 > n^2 = \dim(M_n(\mathbb{R})),$$

ce qui est absurde. Donc la somme n'est pas directe, $H \cap K \neq \{0\}$, et $\boxed{H \text{ contient au moins une matrice non nulle et non i}}$
Supposons par l'absurde A^T inversible. On fixe une matrice $B \in H$ non nulle et non inversible. Alors son rang vérifie $1 \leqslant Rg(B) \leqslant n-1$.
Puisque A^T est inversible, la multiplication à droite par A^T ne modifie pas le rang, donc $Rg(BA^T) = Rg(B)$.
D'après la question **1.**, BA^T est colinéaire à A^T donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $BA^T = \lambda A^T$. Si $\lambda = 0$, on obtient $Rg(B) = Rg(BA^T) = Rg(0) = 0$, ce qui est absurde car $Rg(B) \geqslant 1$. Si $\lambda \neq 0$, on obtient $Rg(B) = Rg(BA^T) = Rg(\lambda A^T) = Rg(A^T) = n$, ce qui est absurde car $Rg(B) \leqslant n-1$.
On aboutit à une contradiction donc $\boxed{A^T \text{ n'est pas inversible.}}$

(c) Soit $B \in H$. Montrons que W est stable par B.
Soit $x \in W = \mathfrak{I}(A^T)$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = A^T y$.
De plus, d'après la question **9.1.**, $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad BA^T = \lambda A^T$. Il vient

$$Bx = B(A^T y) = (BA^T)y = \lambda A^T y = \lambda x \in \mathrm{Vect}(x) \subset W.$$

Ainsi $\forall x \in W, Bx \in W$, donc W est stable par B.
Finalement, on a montré que $\boxed{W \text{ est stable pour tous les éléments de } H.}$

(d) P est une matrice de passage donc est bien inversible.
L'application $\varphi_P : \left| \begin{array}{ccc} E_n & \to & E_n \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \right.$ est clairement linéaire car la multiplication matricielle à gauche ou à droite est linéaire, donc φ_P est un endomorphisme de E_n.
Montrons que cet endomorphisme est bijectif. Pour cela on remarque par exemple que $\varphi_{P^{-1}} : \left| \begin{array}{ccc} E_n & \to & E_n \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array} \right.$ vérifie :

$$\forall M \in E_n, \quad \varphi_{P^{-1}} \circ \varphi_P(M) = \varphi_{P^{-1}}(P^{-1}MP) = P(P^{-1}MP)P^{-1} = M = Id_{E_n}(M),$$

donc $\varphi_{P^{-1}} \circ \varphi_P = Id_{E_n}$, ce qui prouve que φ_P est bijective et que sa bijection réciproque est $\varphi_{P^{-1}}$.
Donc $\boxed{\varphi_P : \left| \begin{array}{ccc} E_n & \to & E_n \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \right. \text{ est un automorphisme de } E_n.}$

(e) D'après les notations de l'énoncé, $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $W = \mathfrak{I}(A^T)$, que l'on a complétée en une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathscr{B}_1$.
En particulier, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP$ est la matrice dans la base $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme $x \mapsto Mx$ canoniquement associé à la matrice M. Soit $B \in H$. On a montré que W est stable pour tous les éléments de H, donc W est stable par B. Par suite, $\forall i \in [|1,p|]$, puisque $e_i \in W$, on en déduit que $Be_i \in W = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
Autrement dit, la matrice $P^{-1}BP$ dans $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme canoniquement associé à B est de la forme :

$$P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad A_1 \in M_p(\mathbb{R}), A_2 \in M_{p,n-p}(\mathbb{R}), A_3 \in M_{n-p}(\mathbb{R}).$$

Remarquons que le nombre de coefficients nuls dans la matrice ci-dessus vaut $p(n-p)$.
On a donc montré que l'ensemble des $P^{-1}BP$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les $E_{i,j}$ suivants :

$$\varphi_P(H) = \{\varphi_P(B), B \in H\} = \{P^{-1}BP, B \in H\} \subset \mathrm{Vect}(E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2 \setminus [|n-p+1,n|] \times [|1,p|]).$$

D'après la question **9.4.**, φ_P est un automorphisme de E_n, d'où

$$\dim(H) = \dim(\varphi_P(H)) \leqslant \dim \mathrm{Vect}(E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2 \setminus [|n-p+1,n|] \times [|1,p|]) = n^2 - p(n-p).$$

Finalement $\boxed{\dim(H) \leqslant n^2 - p(n-p).}$

10. On a montré que :

$$\dim(H) = n^2 - 1 \leqslant n^2 - p(n-p), \quad \text{donc} \quad p(n-p) \leqslant 1.$$

Or $p(n-p) \in \mathbb{N}$ donc $p(n-p)$ vaut 0 ou 1.
Supposons que $p(n-p) = 0$, alors on a soit $p = 0$, soit $n - p = 0$.
Si $p = 0$, alors $A^T = 0$ donc $A = 0$ ce qui est exclu.
Si $n - p = 0$, alors $p = n \leqslant n-1$, ce qui est absurde. En effet A^T n'est pas inversible d'après la question 9.2, donc $p = Rg(A^T) \leqslant n-1$.
Par suite $p(n-p) \neq 0$ donc $p(n-p) = 1$. On en déduit que $p = 1$ et $n - p = 1$ soit $n = p + 1 = 2$. $\boxed{\text{On a démontré que } n = 2.}$

Devoir surveillé concours blanc Vendredi 8 mars

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Calculatrice non autorisée Durée : 4h
Thèmes: Réduction, intégrale généralisée, produit scalaire et espace euclidien

Exercice 1 CCINP PC 2018

Faire le sujet complet CCP filière PC année 2018 en annexe.
Le sujet est constitué d'un seul problème en six parties à traiter en 4h.
Les calculatrices sont interdites.

Sujet et corrigé fournis par l'UPS (Laurent Carrot)

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$.

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux☞6✓

1. ☞0.5+0.5✓ Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

2. ☞0.5+0.5✓ Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.
3. ☞0.5✓ Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. ☞1✓ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

5. ☞1.5✓ Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

6. ☞1✓ En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$.
On les note $x_1, \dots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n}(X-x_k).$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ ☞6.5✓

7. ☞0.5✓ Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions 8 à 13, n désigne un entier naturel.

8. ☞0.5✓ Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \phi_n(P) = \phi(P)$.

9. ☞0.5✓ On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ m_{k,k} = k(k+1)$.
10. ☞0.5✓ Montrer que ϕ_n est diagonalisable.
On pourra utiliser la question 9.
11. ☞0.5✓ Vérifier que : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ (X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
12. ☞1.5✓ Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 11, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que :

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0.$$

13. ☞1✓ Montrer que, pour $k \in [\![0,n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée.
On pourra utiliser la question 12.
14. ☞1.5✓ Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ.

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

15. ☞1 dont 0.5 pour rédaction exacte✓ Justifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

16. ☞0.5+0.5✓ Établir que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P),Q\rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt$, puis que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P),Q\rangle = \langle P,\phi(Q)\rangle.$$

17. ☞1✓ Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
On pourra utiliser la question 13.
18. ☞1✓ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle P,L_n\rangle = 0$.
19. ☞0.5✓ On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}L_n$.
Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d(P,\mathbb{R}_n[X]) = \inf\limits_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|P-Q\|$ la distance de P au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

20. ☞1.5✓ Soit $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P,\mathbb{R}_n[X]) = \|P-T_n\|$, puis justifier l'égalité :

$$d(P,\mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2,\ \text{où } c_k(P) = \langle P,Q_k\rangle.$$

21. ☞1✓ Prouver que la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et que : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(c_k(P))^2 \leqslant \|P\|^2$.

Partie IV - Fonction génératrice☞6✓

On admet dans la suite du problème que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0$$

et on considère la série entière de la variable t : $\sum L_n(x)t^n$.

On note r la racine positive du polynôme $X^2 - 2X - 1$.

22. ☞1.5✓ Montrer que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|L_n(x)| \leqslant r^n$.
On pourra raisonner par récurrence et utiliser la relation admise au début de cette partie.
23. ☞0.5✓ Pour $x \in [-1,1]$, on note $R(x)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum L_n(x)t^n$. Montrer que : $R(x) \geqslant \dfrac{1}{r}$.
24. ☞1.5✓ Pour $x \in [-1,1]$ et $t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, on pose $S_x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$.
Montrer que S_x est solution sur $\left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :
$$(1-2tx+t^2)y' + (t-x)y = 0.$$
25. ☞1.5✓ En déduire que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2-2xt+1}}$.
26. ☞1✓ Indiquer une méthode permettant, à partir du seul résultat de la question 25, de retrouver l'expression des polynômes L_0, L_1 et L_2.

Partie V - Expression intégrale des polynômes de Legendre☞12✓

Pour $\theta \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos u)^n du$.

27. ☞1.5✓ Soit $t \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction v_n de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $v_n(u) = t^n(\cos\theta + i\sin\theta\cos u)^n$.
Montrer que $\sum v_n$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$.
28. ☞1.5✓ Justifier l'égalité : $\forall t \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1-t\cos\theta - it\sin\theta\cos u}$.

Dans les question 29 et 30, a désigne un réel strictement positif.

29. ☞1.5✓ Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u} du = 0$.
On pourra utiliser un changement de variable défini par $v = \pi - u$.
30. ☞1.5✓ Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+a^2\cos^2 u} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.
On pourra utiliser le changement de variable défini par $u = \arctan v$.
31. ☞3✓ En déduire que :
$$\forall t \in]-1,1[, \forall \theta \in [0,\pi], \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1-t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}}.$$
32. ☞1✓ Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in [0,\pi]$, $L_n(\cos\theta) = w_n(\theta)$.
33. ☞0.5✓ Justifier que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall t \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2-2xt+1}}$.
34. ☞1.5✓ Prouver que : $\forall x \in [-1,1]$, $R(x) = 1$.
On pourra raisonner par l'absurde et montrer qu'alors, pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $|z| < R(x)$, on a
$$(z^2-2xz+1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n\right)^2 = 1.$$

Partie VI - Application à l'approximation d'intégrales

Dans les question 35 à 43, n désigne un entier naturel non nul.

35. ☞1.5✓ Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{2n-1}$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $2n$ réels $t_1 < \cdots < t_{2n}$ vérifiant : $\forall i \in [\![1,2n]\!], h(t_i) = 0$.
Montrer qu'il existe un réel c tel que $h^{(2n-1)}(c) = 0$.
36. ☞2✓ Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note ℓ_i l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\ell_i(P) = P(x_i)$
(on rappelle que $x_1, \ldots, x_n$ désignent les racines de L_n et qu'elles sont deux à deux distinctes).
Montrer que $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est libre dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.
37. ☞1✓ En déduire que pour toute application linéaire ψ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique n-uplet $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \ell_k$.
38. ☞1✓ Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de réels tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} P(t)dt = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n).$$

39. ☞1.5✓ Montrer que la relation de la question 38 reste vérifiée pour tout P de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.
On pourra, pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$, utiliser la division euclidienne de P par L_n et la question 18.

Dans la suite du problème, f désigne une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$.

40. ☞1.5✓ Montrer que : $\exists! H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \forall i \in [\![1,n]\!], \begin{cases} H_n(x_i) = f(x_i) \\ H_n'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$.
On pourra commencer par déterminer le noyau de l'application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ qui à P associe : $(P(x_1), \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n))$.

On rappelle que A_n a été défini à la question 6.

41. ☞1.5✓ Soit $x \in [-1,1]$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!], x \neq x_i$.
Montrer que : $\exists c \in [-1,1], f(x) - H_n(x) = \dfrac{A_n(x)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$.
On pourra utiliser l'application g définie sur $[-1,1]$ par $g(t) = f(t) - H_n(t) - \dfrac{A_n(t)^2}{(2n)!}K$, où K est un réel dépendant de x à préciser, et appliquer le résultat de la question 35 à la fonction g'.
42. ☞1✓ Montrer que : $\forall y \in [-1,1], \exists c \in [-1,1], f(y) - H_n(y) = \dfrac{A_n(y)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$.
43. ☞1.5✓ Justifier l'existence de $M_{2n}(f) = \max_{t \in [-1,1]} |f^{(2n)}(t)|$, puis prouver que :

$$\left| \int_{-1}^{1} f(t)dt - (\alpha_i f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)) \right| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} A_n(t)^2 dt.$$

44. ☞1.5✓ Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)^2 dt$.

Correction :

Correction fournie par l'ups (Laurent Carrot) légèrement modifiée.

Partie I - Quelques résultats généraux

1. $U_0 = 1$ et $L_0 = \dfrac{1}{2^0 0!} U_0^{(0)} = 1$.
$U_1 = (X^2 - 1)$ et $L_1 = \dfrac{1}{2^1 1!} U_1^{(1)} = \dfrac{1}{2}(2X) = X$.
$U_2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et $L_2 = \dfrac{1}{2^2 2!} U_2^{(2)} = \dfrac{1}{8}(4X^3 - 4X)' = \dfrac{1}{8}(12X^2 - 4) = \dfrac{1}{2}(3X^2 - 1)$.
2. Pour le degré, on a $\deg(U_n) = n$ donc $\deg(L_n) = \deg(U_n^{(n)}) = 2n - n = n$.
Pour le terme dominant :

$$U_n = X^{2n} + \ldots \text{ donc } L_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

3. La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre (degrés échelonnés) et elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, donc $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$, donc U_n a deux racines, -1 et 1, de multiplicité n.
Rédaction 1 : Comme $U_n = (X^2-1)^n$, $U_n' = n(2X)(X^2-1)^{n-1} = 2n(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-0)$, donc, en prenant $\lambda = 2n$ et $\alpha = 0 \in]-1,1[$, on a bien le résultat.
Rédaction 2 : (prépare la question suivante) : Comme -1 et 1 sont racines de multiplicité n de U_n, elles sont racines de multiplicité $n-1$ de U_n'. De plus, on a $U_n(1) = U_n(-1)$ où U_n est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ (c'est un polynôme !), donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]-1,1[$ tel que $U_n'(\alpha) = 0$. On a $\deg(U_n') = 2n-1$, et on a trouvé $2(n-1)+1 = 2n-1$ racines (avec leur ordre). On a donc toutes les racines.
Ainsi, U_n' est scindé et s'écrit :
$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

5. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Supposons qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :
$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$
On supposera de plus, quitte à renuméroter, que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k$.
Posons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$. Alors on a $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \alpha_{k+1}$.
Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $U_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, dérivable sur $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ (polynôme) et $U_n^{(k)}(\alpha_{k-1}) = U_n^{(k)}(\alpha_k)$ (est nul).
Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ tel que $(U_n^{(k)})'(\beta_k) = 0 \Leftrightarrow U_n^{(k+1)}(\beta_k) = 0$.
Le mieux est de faire un dessin avec un axe. On a par construction,
$$-1 = \alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \cdots < \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1,$$
donc les réels $(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant k+1}$ sont deux à deux distincts.
On a donc trouvé les racines (β_k). Il reste à voir les ordres.
Comme -1 et 1 sont racines de multiplicité $n-k \geqslant 1$ de $U_n^{(k)}$, -1 et 1 sont racines de multiplicité $n-k-1$ de $(U_n^{(k)})' = U_n^{(k+1)}$.
On a donc : -1 et 1 sont racines de multiplicité $n-k-1$ et on a trouvé k+1 autres racines d'ordre au moins 1, ce qui fait : $2(n-k-1)+k+1 = 2n-k-1$, c'est le degré de (U_n^{k+1}) qui est donc scindé et s'écrit donc sous la forme :
$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

6. On note $\mathscr{P}(k)$ la proposition :
"il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :
$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)."$$
La question 4 est l'initialisation et la question 5 est l'hérédité pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ Ainsi, par récurrence finie, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ_k tels que :
$$U_n^{(k)} = \mu_k(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$
En particulier, pour $k = n$, il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ_n tels que :
$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2^n n!}U_n^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\mu_n(X-1)^{n-n}(X+1)^{n-n}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n) \\ &= \frac{1}{2^n n!}\mu_n(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n), \end{aligned}$$
donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont n racines distinctes de L_n, et toutes ces racines sont dans $]-1,1[$.
En les ordonnant, on a bien l'existence des réels $-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ tels que
$$L_n = a_n \prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$$
car L_n est de degré n et de coefficient dominant a_n.

Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

7. Pour tout $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P+Q) &= (X^2-1)(\lambda P+Q)''+2X(\lambda P+Q)' \\ &= (X^2-1)(\lambda P''+Q'')+2X(\lambda P'+Q') \quad \text{(linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda((X^2-1)P''+2XP')+((X^2-1)Q''+2XQ') \\ &= \lambda\phi(P)+\phi(Q),\end{aligned}$$

donc ϕ est une application linéaire.
De plus, elle va de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ (énoncé), donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

8. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\begin{aligned}\deg(\phi(P)) &= \deg((X^2-1)P''+2XP') \leqslant \max((X^2-1)P'',2XP') = \max(2+\deg(P''),1+\deg(P')) \\ &\leqslant \max(2+\deg(P)-2,1+\deg(P)-1) = \max(\deg(P),\deg(P)) = \deg(P),\end{aligned}$$

donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
$\mathbb{R}_n[X]$ est donc bien stable par ϕ.
Rappel : $\deg(P+Q)\boxed{\leqslant}\max(\deg(P),\deg(Q))$, avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, et $\deg(P')\boxed{\leqslant}\deg(P)-1$, avec égalité si $\deg(P) \geqslant 1$.

9. Soit $M = (m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Alors, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\phi(X^j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} m_{i,j}X^i$.
Or,

$$\begin{aligned}\phi(X^0) &= \phi(1) = 0 \\ \phi(X^1) &= 2X\end{aligned}$$

et, pour tout $j \in [\![2,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\phi(X^j) &= (X^2-1)j(j-1)X^{j-2}+2XjX^{j-1} \\ &= j(j-1)X^j-j(j-1)X^{j-2}+2jX^j \\ &= j(j+1)X^j-j(j-1)X^{j-2}.\end{aligned}$$

Ce qui donne la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & & & \\ & 2 & 0 & \ddots & & \\ & & 6 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & n(n+1) \end{pmatrix}$$

donc M est bien triangulaire supérieure et, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

10. Comme M est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale.
On a donc $Sp(M) = \{k(k+1),\ k \in [\![0,n]\!]\}$.
Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)(k+2)-k(k+1) = 2(k+1) > 0$, donc la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. (argument important !)
Les réels $(k(k+1))_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont donc deux à deux distincts, donc M admet $n+1$ valeurs propres distinctes, et $M \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, donc M est diagonalisable, donc ϕ_n est diagonalisable.

11. Pour $k=0$, $U_k' = 0$ et $2kXU_k = 0$, donc $(X^2-1)U_k'-2kXU_k = 0$.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $U_k' = 2kX(X^2-1)^{k-1}$, donc $(X^2-1)U_k'-2kXU_k = 2kXU_k-2kXU_k = 0$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a bien $(X^2-1)U_k'-2kXU_k = 0$.

12. D'après la formule de Leibniz pour les polynômes, en prenant la convention (habituelle) $\binom{n}{k} = 0$ si $k \notin [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
((X^2-1)U_k')^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (X^2-1)^{(i)} (U_k')^{(k+1-i)} \\
&= \binom{k+1}{0}(X^2-1)(U_k')^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}(X^2-1)'(U_k')^{(k)} + \binom{k+1}{2}(X^2-1)''(U_k')^{(k-1)} \\
&\quad + \sum_{k=3}^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \underbrace{(X^2-1)^{(i)}}_{=0 \text{ car } i \geqslant 3} (U_k')^{(k+1-i)} \\
&= (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + 2\frac{k(k+1)}{2}U_k^{(k)}
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
(2kXU_k)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (2kX)^{(i)} (U_k)^{(k+1-i)} \\
&= \binom{k+1}{0}(2kX)(U_k)^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}(2kX)'(U_k)^{(k)} + \sum_{i=2}^{k+1} \binom{k+1}{i} \underbrace{(2kX)^{(i)}}_{=0 \text{ car } i \geqslant 2} (U_k)^{(k+1-i)} \\
&= 2kXU_k^{(k+1)} + (k+1)2kU_k^{(k)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
((X^2-1)U_k' - 2kXU_k)^{(k+1)} &= (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + k(k+1)U_k^{(k)} - 2kXU_k^{(k+1)} - (k+1)2kU_k^{(k)} \\
&= (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)}.
\end{aligned}$$

Par suite, d'après la question 11,

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = ((X^2-1)U_k' - 2kXU_k)^{(k+1)} = 0.$$

13. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ (car $\deg(L_k) = k \leqslant n$), $L_k \neq 0$ (car $a_k \neq 0$) et :

$$\phi(U_k^{(k)}) = (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} \underset{\text{cf Q12}}{=} k(k+1)U_k^{(k)}$$

ainsi, $U_k^{(k)}$ est vecteur propre associé à $k(k+1)$, comme $L_k = \frac{1}{2^k k!}U_k^{(k)}$, on a L_k est aussi un vecteur propre de ϕ_n associé à la valeur propre $k(k+1)$.

14. D'une part, ϕ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension $n+1$) qui admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc tous les espaces propres de ϕ_n sont de dimension 1 (ce sont des droites).
De plus, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, L_k est vecteur propre de ϕ_n associé à $k(k+1)$, donc $E_{k(k+1)}(\phi_n) = \text{Vect}(L_k)$.
On a donc $\boxed{Sp(\phi_n) = \{k(k+1),\ k \in [\![0,n]\!]\} \text{ et, pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ E_{k(k+1)}(\phi_n) = \text{Vect}(L_k).}$
Attention à ne pas confondre ϕ_n et ϕ !
Soit un $k \in \mathbb{N}$, et P un vecteur propre de ϕ_n associé à $k(k+1)$, alors :

$$\phi(P) = \phi_k(P) = k(k+1)P,$$

donc P est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre $k(k+1)$.
On a donc $\{k(k+1),\ k \in \mathbb{N}\} \subset Sp(\phi)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Vect}(L_k) \subset E_{k(k+1)}(\phi)$.
NB : il faut faire l'inclusion réciproque !
Réciproquement, soit λ une valeur propre de ϕ et $P \neq 0$ un vecteur propre associé à λ.
Soit $n = \deg(P)$. Alors

$$\lambda P = \phi(P) = \phi_n(P),$$

donc P est un vecteur propre de ϕ_n associé à la valeur propre (de ϕ_n) λ.
Par suite, $\lambda \in Sp(\phi_n)$, donc il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $\lambda = k(k+1)$ et $P \in E_{k(k+1)}(\phi_n) = \text{Vect}(L_k)$.
On a donc $Sp(\phi) \subset \{k(k+1),\ k \in \mathbb{N}\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_{k(k+1)}(\phi) \subset \text{Vect}(L_k)$.
Par double inclusion,

$$\boxed{Sp(\phi) = \{k(k+1),\ k \in \mathbb{N}\} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \quad E_{k(k+1)}(\phi) = \text{Vect}(L_k).}$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

15. • Pour tout $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ existe car $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1,1]$.
• Pour tout $P,Q,R \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle(\lambda P+Q),R\rangle &= \int_{-1}^{1}(\lambda P+Q)(t)R(t)dt\\ &= \int_{-1}^{1}\lambda P(t)R(t)+Q(t)R(t)dt\\ &= \lambda\int_{-1}^{1}P(t)R(t)dt+\int_{-1}^{1}Q(t)R(t)dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)}\\ &= \lambda\langle P,R\rangle+\langle Q,R\rangle,\end{aligned}$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche.
• Pour tout $P,Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt = \int_{-1}^{1}Q(t)P(t)dt = \langle Q,P\rangle,$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
• $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.
• Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,P\rangle = \int_{-1}^{1}(P(t))^2dt \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale (bornes dans le bon sens), donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positif.
• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P,P\rangle = 0$.
Comme $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1,1]$ et $-1<1$,

$$\langle P,P\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}(P(t))^2dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1,1],\ P(t)=0.$$

Par suite, P a une infinité de racines, donc P est nul. **NB :** bien conclure que P est le polynôme nul !
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc défini.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

16. Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle\phi(P),Q\rangle = \int_{-1}^{1}((t^2-1)P''(t)+2tP'(t))Q(t)dt.$$

Posons $u'(t) = (t^2-1)P''(t)+2tP'(t)$, $u(t) = (t^2-1)P'(t)$, $v(t) = Q(t)$, $v'(t) = Q'(t)$.
Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\langle\phi(P),Q\rangle &= \int_{-1}^{1}((t^2-1)P''(t)+2tP'(t))Q(t)dt\\ &= \underbrace{\left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt.\end{aligned}$$

Cette dernière écriture étant symétrique en P et Q, on obtient :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle\phi(P),Q\rangle = \langle\phi(Q),P\rangle \underset{\text{par symétrie de } \langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle P,\phi(Q)\rangle.$$

17. Soit k et n deux entiers naturels distincts. On a :

$$\begin{aligned}k(k+1)\langle L_k,L_n\rangle &= \langle k(k+1)L_k,L_n\rangle \quad \text{(linéarité à gauche)}\\ &= \langle\phi(L_k),L_n\rangle \quad (\text{car } L_k \in E_{k(k+1)}(\phi))\\ &= \langle L_k,\phi(L_n)\rangle \quad \text{(d'après la question précédente)}\\ &= \langle L_k,n(n+1)L_n\rangle \quad (\text{car } L_n \in R_{n(n+1)}(\phi))\\ &= n(n+1)\langle L_k,L_n\rangle \quad \text{(linéarité à droite)},\end{aligned}$$

donc $(k(k+1)-n(n+1))\langle L_k,L_n\rangle = 0$, donc $\langle L_k,L_n\rangle = 0$, car, comme $(k(k+1))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante (cf. question 10), $k(k+1) \neq n(n+1)$. (**NB :** argument important !)
La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (cf. question 3), pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe n réels $a_0, \cdots a_{n-1}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i$.
Par suite,

$$\begin{aligned}
\langle P, L_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i, L_n \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \langle L_i, L_n \rangle \quad \text{(linéarité à gauche)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 0 \quad \text{(car, pour tout } i \in [\![0, n-1]\!],\ i \neq n \text{ et d'après la question 17)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

19. Soit k et n deux entiers naturels distincts. On a :

$$\langle Q_k, Q_n \rangle = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \langle L_k, L_n \rangle = 0,$$

donc la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|Q_n\| \underset{\text{homogénéité}}{=} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \|L_n\| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \sqrt{\frac{2}{2n+1}} = 1,$$

donc $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, en posant $n = \deg(P)$, il existe $a_0, \ldots, a_n$ tels que $P = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \right) Q_i$, donc la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$. Comme elle est de plus libre (car orthogonale), c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.
$\boxed{(Q_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est donc une base orthonormale de } \mathbb{R}[X] \text{ pour le produit scalaire } \langle \cdot, \cdot \rangle.}$

20. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$.
Donc, d'après la caractérisation par la distance du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$ et T_n est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après le théorème de Pythagore,

$$\|P\|^2 = \|T_n\|^2 + \|P - T_n\|^2,$$

donc

$$\begin{aligned}
d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P - T_n\|^2 &= \|P\|^2 - \|T_n\|^2 \\
&= \|P\|^2 - \left\| \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle Q_k \right\|^2 \quad \text{(caractérisation du projeté orthogonal dans une base orthonormée)} \\
&= \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle^2 \quad \text{(car } (Q_k) \text{ est une famille orthonormale)} \\
&= \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2, \quad \text{où } c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle.
\end{aligned}$$

21. **Méthode standard :** On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2 = \|P\|^2 - d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 \leqslant \|P\|^2$.
De plus, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc elle converge (croissante et majorée par $\|P\|^2$).
Par suite, la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leqslant \|P\|^2$.
Méthode plus précise : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Posons $n = \deg(P)$.

Alors, pour tout $k > n$, $\langle P, Q_k \rangle = \sqrt{\dfrac{2k+1}{2}} \langle P, L_k \rangle = 0$ (d'après la question 18)
D'où $\sum (c_k(P)^2$ converge (car $(c_k(P))^2$ est nul au-delà d'un certain rang) et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 = \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle^2 = \|P\|^2$$

car $(Q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie IV - Fonction génératrice

Les racines du trinôme $X^2 - 2X - 1$ sont

$$r_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{2-\sqrt{8}}{2},$$

donc $r = r_1$ et on a $r > 2$.

22. Soit $x \in [-1, 1]$.
Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|L_n(x)| \leqslant r^n$ (HR_n)
Initialisation (deux rangs) : $L_0(x) = 1$ et $r^0 = 1$, donc on a bien HR_0.
$|L_1(x)| = |x|$ et $r^1 = r$, donc, comme $r > 2$ et $|x| \in [0, 1]$, on a bien $|L_1(x)| \leqslant r^1$. On a bien HR_1.
Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ et supposons HR_n et HR_{n-1} vérifiée pour tout $k \leqslant n$.
Alors,

$$\begin{aligned}
|L_{n+1}(x)| &= \left| \frac{(2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)}{n+1} \right| \quad \text{(d'après la relation admise)} \\
&\leqslant \frac{(2n+1)|x| \cdot |L_n(x)| + n|L_{n-1}(x)|}{n+1} \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \frac{(2n+1)r^n + nr^{n-1}}{n+1} \quad \text{(car } |x| \leqslant 1 \text{ et d'après } HR_n \text{ et } HR_{n-1}\text{)} \\
&= \frac{2n+1}{n+1} r^n + \frac{n}{n+1} r^{n-1} \leqslant 2r^n + r^{n-1} \\
&= r^{n-1}(2r+1) = r^{n-1} r^2 \quad \text{(car } r^2 - 2r - 1 = 0\text{)} \\
&= r^{n+1}. \quad \text{On a bien } HR_{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|L_n(x)| \leqslant r^n$ (et ce pour tout $x \in [-1, 1]$).

23. Soit $x \in [-1, 1]$.
Pour tout $t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$,

$$|L_n(x)t^n| \leqslant r^n t^n = (rt)^n.$$

Or, $rt \in [0, 1[$, donc la série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} (rt)^n$ converge, donc, par comparaison, $\sum_{n \geqslant 0} |L_n(x)t^n|$ converge, donc $\sum_{n \geqslant 0} L_n(x)t^n$ converge absolument, donc t est dans le disque ouvert de convergence.
Par suite, $\left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$ est inclus dans le disque ouvert de convergence, donc $R(x) \geqslant \dfrac{1}{r}$.

24. $S_x : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence, donc en particulier sur $\left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$.
De plus, pour tout $t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$,

$$S'_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1},$$

donc

$$\begin{aligned}
(1-2tx+t^2)S_x'(t)+(t-x)S_x(t) &= (1-2tx+t^2)\sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1}+(t-x)\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty} 2nxL_n(x)t^n+\sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty} xL_n(x)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^n-\sum_{n=1}^{+\infty} 2nxL_n(x)t^n+\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)L_{n-1}(x)t^n+\sum_{n=1}^{+\infty} L_{n-1}(x)t^n-\sum_{n=0}^{+\infty} xL_n(x)t^n \\
&= \left(L_1(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^n\right)-\sum_{n=1}^{+\infty} 2nxL_n(x)t^n+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)L_{n-1}(x)t^n-0\right) \\
&\quad +\sum_{n=1}^{+\infty} L_{n-1}(x)t^n-\left(xL_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty} xL_n(x)t^n\right) \\
&= L_1(x)-xL_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)L_{n+1}(x)-2nxL_n(x)+(n-1)L_{n-1}(x)+L_{n-1}(x)-xL_n(x)\right)t^n \\
&= x-x+\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left((n+1)L_{n+1}(x)-(2n+1)xL_n(x)+nL_{n-1}(x)\right)}_{=0 \text{ d'après la relation vérifiée par } L_n}t^n \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc S_x vérifie bien l'équation différentielle : $(1-2tx+t^2)y'+(t-x)y=0$.

25. • Pour tout $x\in[-1,1]$, pour tout $t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$,

$$|2xt|\leqslant 2\frac{1}{r}\times 1=\frac{2}{r}\underset{\text{car } r>2}{<}1\leqslant 1+t^2,$$

donc $1-2tx+t^2>0$.
Par suite,

$$(1-2tx+t^2)y'+(t-x)y=0\Leftrightarrow y'+\frac{t-x}{1-2tx+t^2}y=0.$$

Une primitive de $t\mapsto\frac{t-x}{1-2tx+t^2}$ est $t\mapsto\frac{1}{2}\ln(1-2tx+t^2)$ (car $1-2tx+t^2>0$).
Les solutions de l'équation homogène $(1-2tx+t^2)y'+(t-x)y=0$ sont donc de la forme :

$$t\mapsto C\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2tx+t^2)\right)=\frac{C}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

• S_x est une solution de $(1-2tx+t^2)y'+(t-x)y=0$ sur $\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$, donc il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[,\quad S_x(t)=\frac{C}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

Enfin, $S_x(0)=L_0=1$, donc $\frac{C}{\sqrt{1}}=1\Leftrightarrow C=1$.
On a donc bien,

$$\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)t^n=\frac{1}{\sqrt{t^2-2xt+1}}.$$

26. En prenant $t=0\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$ dans l'égalité obtenue en 25, on obtient

$$\forall x\in[-1,1],\quad L_0(x)=1,$$

donc L_0-1 a une infinité de racines (tous les éléments de $[-1,1]$), donc $L_0-1=0$, donc $L_0=1$.
En dérivant la relation obtenue en 25, on obtient :

$$\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}nL_n(x)t^{n-1}=-\frac{2(t-x)}{2(t^2-2xt+1)\sqrt{t^2-2xt+1}}.$$

En prenant $t = 0 \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$, on obtient

$$L_1(x) = -\frac{-2x}{2} = x,$$

donc le polynôme $L_1 - X$ a une infinité de racines (les éléments de $[-1,1]$), donc $L_1 - X = 0$, donc $L_1 = X$.
En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\forall x \in [-1,1],\ \forall t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)L_n(x)t^{n-2} = \ldots \quad \text{(calcul inutile, on veut juste l'idée)}$$

En prenant $t = 0 \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$, on va obtenir

$$2L_2(x) = 3x^2 - 1 \text{(vu ce que l'on a obtenu en question **??**)},$$

donc le polynôme $2L_2 - 3X^2 + 1$ a une infinité de racines (les éléments de $[-1,1]$), donc $2L_2 - 3X^2 + 1 = 0$, donc $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

Partie V - Expression intégrale des polynômes de Legendre

27. Soit $t \in]-1,1[$.
Pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} |v_n(u)| &= |t|^n |\cos\theta + i\sin\theta\cos u|^n = |t|^n \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2 u}^n \\ &\leqslant |t|^n \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}^n = |t|^n \times 1^n = |t|^n, \end{aligned}$$

donc $\|v_n\|_\infty^{[-\pi,\pi]} \leqslant |t|^n$.
Or, $\sum_{n\geqslant 0} |t|^n$ converge (géométrique de raison $|t| \in [0,1[$), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 0} \|v_n\|_\infty^{[-\pi,\pi]}$ converge.
La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge donc bien normalement sur $[-\pi,\pi]$.

28. Pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (t\cos\theta + it\sin\theta\cos u)^n = \frac{1}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u}$$

(série géométrique de raison $t\cos\theta + it\sin\theta\cos u$ de module $|t| < 1$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $[-\pi,\pi]$ par opérations sur les fonctions usuelles.
La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-\pi,\pi]$.
On peut donc intervertir série et intégrale et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} v_n(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u}.$$

29. $\int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Posons le changement de variable affine $v = \pi - u$. on a $dv = -du$ et

$$\int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = \int_\pi^0 \frac{\cos(\pi - v)}{1 + a^2\cos^2(\pi - v)}(-dv) = \int_0^\pi \frac{-\cos v}{1 + a^2\cos^2 v}dv = -\int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du,$$

donc $2\int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = 0$, donc $\int_0^\pi \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}du = 0$.

30. $\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + a^2\cos^2 u}$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur $[0, \pi/2]$.
Posons le changement de variable $u = \arctan(v) \Leftrightarrow v = \tan(u)$.

Ce changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissant sur $[0,\pi/2[$, donc il réalise une bijection de $[0,\pi/2[$ sur $[0,+\infty[$. De plus, $du = \dfrac{1}{1+v^2}dv$.

Enfin, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+a^2\cos^2 u}$ converge, donc, en effectuant ce changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+a^2\cos^2 u} &= \int_0^{+\infty} \frac{\dfrac{dv}{1+v^2}}{1+a^2\cos^2(\arctan v)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\dfrac{dv}{1+v^2}}{1+a^2\dfrac{1}{1+v^2}} \quad (\text{car } \cos(\arctan(v)) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2+a^2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2}\frac{1}{1+\dfrac{v^2}{1+a^2}}dv \\
&= \frac{1}{1+a^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\dfrac{v}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}dv = \frac{1}{1+a^2}\left[\sqrt{1+a^2}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.
\end{aligned}$$

31. Pour tout $t \in]-1,1[$, pour tout $\theta \in [0,\pi]$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1-t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} &= \frac{1}{1-t\cos\theta}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1-i\left(\dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)\cos u} \quad (\text{car } |t\cos\theta| < 1, \text{ donc } 1-t\cos\theta > 0) \\
&= \frac{1}{1-t\cos\theta}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+i\left(\dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)\cos u}{1+\left(\dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)^2\cos^2 u}du \\
&= \frac{1}{1-t\cos\theta}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\left(\dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)^2\cos^2 u}du + i\frac{1}{1-t\cos\theta}\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos u}{1+\left(\dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)^2\cos^2 u}du \quad (*).
\end{aligned}$$

D'après la question 29, pour tout $a>0$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du = 0$, donc, comme $u \mapsto \dfrac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}$ est paire,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du = 0.$$

• D'après la question 30, pour tout $a>0$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2\cos^2 u}du = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, donc, comme $u \mapsto \dfrac{1}{1+a^2\cos^2 u}$ est paire,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du = \pi\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Enfin, $u \mapsto \dfrac{1}{1+a^2\cos^2 u}$ est π-périodique, donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du &= \int_{-\pi}^{0} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du + \int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du = 2\pi\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.
\end{aligned}$$

car si f est T-périodique, alors pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_b^{b+T} f(t)dt$.

Alors, en posant $a = \dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta} > 0$ (car $|t\cos\theta| < 1$), et en réinjectant dans $(*)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1-t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} &= \frac{1}{1-t\cos\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1+a^2\cos^2 u}du + i\frac{1}{1-t\cos\theta}\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}du}_{=0} \\
&= \frac{1}{1-t\cos\theta}2\pi\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)^2}} \\
&= 2\pi\frac{1}{\sqrt{(1-t\cos\theta)^2+t^2\sin^2\theta}} \\
&= 2\pi\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}}.
\end{aligned}$$

32. Soit $\theta \in [0,\pi]$.
$x = \cos(\theta) \in [-1,1]$, donc, pour tout $t \in \left]-\dfrac{1}{r},\dfrac{1}{r}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L(\cos\theta)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}}$ d'après la question 25.
D'après les questions 28 et 31, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{1-t\cos\theta-it\sin\theta\cos u} = \frac{1}{\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}}.$$

• D'où, par unicité du développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}}$ sur $\left]-\dfrac{1}{r},\dfrac{1}{r}\right[\subset]-1,1[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(\cos\theta) = w_n(\theta).$$

33. Par suite, pour tout $x \in [-1,1]$, en posant $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos\theta = x$, on a, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{t^2-2xt+1}} &= \frac{1}{\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n \quad \text{(d'après les question 31 et 28)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} L(\cos\theta)t^n \quad \text{(d'après la question 32)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n \quad \text{(par définition de } \theta\text{)}.
\end{aligned}$$

34. D'après la question précédente, on a $R(x) \geqslant 1$.
Supposons $R(x) > 1$.
Le rayon de convergence de $z \in \mathbb{C} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n$ est $R(x) > 1$.
Le rayon de convergence de $z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 - 2xz + 1$ est $+\infty$ (c'est un polynôme, que l'on voit comme une série entière).
Par produit de Cauchy de séries entières, $z \mapsto (z^2-2tz+1)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n\right)^2$ est une série entière de rayon de convergence $\geqslant R(x)$, donc il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ (comme somme et produit de nombres réels dans le produit de Cauchy) telle que,

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < R(x), \quad (z^2-2xz+1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

En particulier, pour tout $t \in]-R(x),R(x)[$, $(t^2-2xt+1)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n\right)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$.

Or, pour tout $t \in]-1,1[$, $(t^2-2xt+1)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n\right)^2 = 1$ d'après la question précédente.

Or 1 est son propre développement en série entière, de rayon de convergence $+\infty$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$ de $t \mapsto (t^2-2xt+1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n\right)^2$, on a

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ b_n = 0.$$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R(x)$, $(z^2-2xz+1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n\right)^2 = 1$.
Or, en posant $x = \cos\theta$ (possible car $x \in [-1,1]$), $z^2-2xz+1=0$ a pour solutions :

$$z_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = e^{i\theta} \text{ et } z_2 = e^{-i\theta} \quad (\text{car } \Delta = 4\cos^2(\theta)-4 = (2i\sin\theta)).$$

Par suite, pour $z = e^{i\theta}$, on a $|z| < R(x)$ (car on a supposé $R(x) > 1$) et $\underbrace{(z^2-2xz+1)}_{=0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n\right)^2 = 0$.
C'est exclu, donc, par l'absurde, $R(x) \leqslant 1$.
On a donc $R(x) \leqslant 1$ et $R(x) \geqslant 1$, donc $R(x) = 1$.

Partie VI - Application à l'approximation d'intégrales

35. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$ "si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe n réels $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ tels que $\forall i \in [\![1,n]\!], h(\alpha_i) = 0$, alors il existe un réel c tel que $f^{(n-1)}(c) = 0$" (HR_n)
Initialisation Pour $n = 2$, f est supposée continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[\alpha_1, \alpha_2]$. En appliquant le théorème de Rolle, on obtient l'existence de $c \in]\alpha_1, \alpha_2[\subset \mathbb{R}$ tel que $f^{(1)}(c) = 0$. On a donc bien HR_2.
Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ et supposons HR_n vérifée.
Soit alors une fonction f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ $n+1$ réels en lesquels f s'annulle.
Alors, en appliquant le théorème de Rolle à f sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, on obtient l'existence de n réels distincts $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ en lesquels f' s'annulle, avec f' fonction de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.
En appliquant HR_n à f', on obtient l'existence d'un $c \in \mathbb{R}$ tel que $(f')^{(n-1)}(c) = 0$, et donc $f^{(n)}(c) = 0$. On a bien HR_{n+1}.
Conclusion : La propriété est donc établie par récurrence.
Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n \geqslant 2$, donc on a HR_{2n}, qui n'est autre que la propriété à démontrer.
36. Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si $\sum_{i=1}^{n} a_i\ell_i = 0$, alors, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\sum_{i=1}^{n} a_i\ell_i(P) = 0$.
Soit, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $P_j = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(X - x_i) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\ell_i(P_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{P_j(x_i)}_{=0 \text{ si } i\neq j} = a_jP_j(x_j),$$

donc, comme $\sum_{i=1}^{n} a_i\ell_i(P) = 0$, on a $a_jP_j(x_j) = 0$, donc $a_j = 0$ car $P_j(x_j) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\underbrace{(x_j - x_i)}_{\neq 0} \neq 0$ (car les x_i sont deux à deux distincts).
Ceci étant valable pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a bien la liberté.
37. La famille $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est donc libre.
De plus, elle est formée de n éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension n, donc c'est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.
Par suite, pour toute application linéaire ψ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique n-uplet $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \sum_{k=1}^{n} \beta_k\ell_k$.
38. $\varphi : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)dt$ est une application linéaire (par linéarité de l'intégrale) de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$.

Donc, d'après la question précédente, il existe un unique n-uplet $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ de réels tel que $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ell_k$, ie

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} P(t)dt = \varphi(P) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ell_k(P) = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n).$$

39. • Pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, il existe un unique couple (Q,R) avec $\deg(R) < \deg(L_n) = n$ tel que $P = QL_n + R$.
De plus, comme $QL_n = P - R$ où $\deg(L_n) = n$ et $\deg(P-R) \leqslant 2n-1$, on a $\deg(Q) \leqslant n-1$, donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Alors, en reprenant le n-uplet $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ trouvé à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P(t)dt &= \int_{-1}^{1} Q(t)L_n(t)dt + \int_{-1}^{1} R(t)dt \\
&= \langle Q, L_n\rangle + \int_{-1}^{1} R(t)dt \quad \text{(par définition du produit scalaire introduit en partie III)} \\
&= 0 + \int_{-1}^{1} R(t)dt \quad \text{(d'après la question 18 avec } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]) \\
&= \alpha_1 R(x_1) + \cdots + \alpha_n R(x_n) \quad (\text{car } R \in \mathbb{R}_{n-1}[X])
\end{aligned}$$

et, comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(x_i) = Q(x_i)\underbrace{L_n(x_i)}_{=0} + R(x_i) = R(x_i)$, on a bien

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \alpha_1 R(x_1) + \cdots + \alpha_n R(x_n) = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n).$$

40. Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \mapsto (P(x_1,\dots,P(x_n),P'(x_1),\dots,P'(x_n))$.
C'est une application linéaire (dit dans l'énoncé).
Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(x_i) = P'(x_i) = 0$, donc x_i est une racine au moins double de P.
Comptées avec multiplicité, P admet donc au moins $2n$ racines, donc, comme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a $P = 0$.
φ est donc injective.
D'après le théorème du rang, on a alors

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] - \dim \ker \varphi = 2n = \dim \mathbb{R}^{2n}$$

et $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}^{2n}$, donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^{2n}$ et φ est donc surjective.
φ est injective et surjective, donc bijective.
Par suite, pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\begin{aligned}
\left(\forall i \in [\![1,n]\!], \begin{cases} P(x_i) = f(x_i) \\ P'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}.\right) &\Leftrightarrow \varphi(P) = (f(x_1),\dots,f(x_n),f'(x_1),\dots,f'(x_n)) \\
&\Leftrightarrow P = \varphi^{-1}(f(x_1),\dots,f(x_n),f'(x_1),\dots,f'(x_n)),
\end{aligned}$$

ce qui assure l'existence et l'unicité de H_n.

41. Soit $x \in [-1,1]$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x \neq x_i$.
Soit $g : t \in [-1,1] \mapsto f(t) - H_n(t) - \dfrac{A_n(t)^2}{(2n)!} \times \underbrace{\dfrac{(2n)!}{A_n(x)^2}(f(x) - H_n(x))}_{=K}$.
g est bien définie car $A_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(x - x_i)}_{\neq 0} \neq 0$.
On renumérote $(x_1,\dots,x_n,x)$ en $(y_1,\dots,y_{n+1})$ de telle sorte que $y_1 < \cdots < y_{n+1}$.
Alors, comme

- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $g(x_i) = \underbrace{f(x_i) - H_n(x_i)}_{=0} - \dfrac{\overbrace{A_n(x_i)^2}^{=0}}{(2n)!} \times K = 0$
- et $g(x) = f(x) - H_n(x) - \dfrac{A_n(x)^2}{(2n)!} \times \dfrac{(2n)!}{A_n(x)^2}(f(x) - H_n(x)) = 0$,

on a $g(y_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$.
g est de classe $\mathscr{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$, donc, comme $n \geqslant 1$, g est continue et dérivable sur $[-1,1]$, donc sur $[y_i, y_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
D'après le théorème de Rolle, appliqué sur chaque intervalle, il existe n réels $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tels que

$$y_1 < \beta_1 < y_2 < \ldots < \beta_n < y_{n+1} \text{ et } g'(\beta_i) \text{ pour tout } i \in [\![1,n]\!].$$

Par construction, la famille $\beta_1, \ldots, \beta_n, x_1, \ldots, x_n)$ est formée de $2n$ éléments de $[-1,1]$ deux à deux distincts.
De plus, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

- $g'(\beta_i) = 0$
- et $g'(x_i) = \underbrace{f'(x_i) - H_n'(x_i)}_{=0} - \dfrac{2A_n'(x_i)\overbrace{A_n(x_i)}^{=0}}{(2n)!}K = 0,$

donc g' s'annule (au moins) $2n$ fois sur $[-1,1]$ et, comme

- f' est de classe $\mathscr{C}^{2n-1}$ sur $[-1,1]$ (car f est de classe $\mathscr{C}^{2n}$)
- et H_n' A_n et A_n' sont de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ (ce sont des fonctions polynomiales),

g' est de classe $\mathscr{C}^{2n-1}$ sur $[-1,1]$.
D'où, d'après la question 35, adaptée sans difficulté à une fonction de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, il existe $c \in [-1,1]$ tel que $(g')^{(2n-1)}(c) = 0 \Leftrightarrow g^{(2n)}(c) = 0$.
Or, $g^{(2n)} = f^{(2n)} - H_n^{(2n)} - \dfrac{(A_n^2)^{(2n)}}{(2n)!}K$, où

- $H_n^{(2n)} = 0$ car $H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$
- et $(A_n^2)^{(2n)} \in \mathbb{R}_0[X]$ (car $\deg(A_n^2) = 2n$), et une récurrence similaire à celle de la question 2, poussée jusqu'à $k = 2n$, donne $A_n^{(2n)} = (2n)!$,

donc $g^{(2n)}(c) = f^{(2n)}(c) - K$, et donc

$$K = f^{(2n)}(c) \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{A_n(x)^2}(f(x) - H_n(x)) = f^{(2n)}(c) \Leftrightarrow f(x) = H_n(x) + \frac{A_n(x)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c).$$

42. Pour tout $y \in [-1,1]$,
    - si $y \neq x_i$, alors c existe d'après la question précédente
    - si $y = x_i$, alors $f(y) - H_n(y) = 0$ et $A_n(y) = 0$, donc c quelconque dans $[1,1]$ convient.
43. • $f^{(2n)}$ est continue sur le segment $[-1,1]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes sur $[-1,1]$, donc $M_{2n}(f) = \max\limits_{t \in [-1,1]} |f^{(2n)}(t)|$ existe.
    Reprenons H_n comme à la question 40. Alors

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1} f(t)dt - (\alpha_i f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n))\right| &= \left|\int_{-1}^{1} f(t)dt - \int_{-1}^{1} H_n(t)dt\right| \quad \text{(d'après la question 39 avec } H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]) \\ &= \left|\int_{-1}^{1} f(t) - H_n(t)dt\right|\end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [-1,1]$, il existe $c_t \in [-1,1]$ tel que

$$|f(t) - H_n(t)| = \left|\frac{A_n(t)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c_t)\right| \leqslant \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} \times M_{2n}(f),$$

donc, par positivité de l'intégrale (avec $-1 \leqslant 1$),

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1} f(t)dt - (\alpha_i f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n))\right| &= \left|\int_{-1}^{1} f(t) - H_n(t)dt\right| \\ &\leqslant \int_{-1}^{1} \frac{A_n(t)^2}{(2n)!}M_{2n}(f)dt = \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!}\int_{-1}^{1} A_n(t)^2 dt.\end{aligned}$$

44. Par définition de A_n,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} A_n(t)^2 dt &= \frac{1}{a_n^2}\langle L_n, L_n\rangle = \frac{1}{a_n^2}\frac{2}{2n+1} \quad \text{(admis en question 9)} \\
&= 2^{2n}\frac{(n!)^4}{((2n)!)^2}\frac{2}{2n+1} \sim 2^{2n}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}\sqrt{2\pi n}^4}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}\sqrt{2\pi 2n}^2}\frac{1}{n} \quad \left(\text{Stirling : } n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right) \\
&= 2^{2n}\frac{4\pi^2 n^2}{2^{4n}4\pi n}\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4^n}.
\end{aligned}$$

Devoir surveillé Informatique vendredi 28 mars

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Calculatrice interdite durée 3h
Thèmes: Programmation en Python

Sujet et correction de DS fourni par Damien RIVOLLIER (lycée Fabert). Durée prévue de 2h.

Exercice 1 L'objectif de ce sujet est d'étudier, d'une part, certains aspects liés à la sécurité de l'accès par mot de passe à un espace client d'une entreprise, et d'autre part, la dynamique de certaines applications, appelées *Conway-maps*, en lien avec ce problème.

On rappelle qu'en Python, si a et b sont deux entiers naturels avec $b \neq 0$, `a//b` renvoie le quotient de la division euclidienne de `a` par `b`, c'est-à-dire $\lfloor a/b \rfloor$. On notera également a mod b le reste de la division euclidienne de a par b, qui est un entier appartenant à l'intervalle d'entiers $[\![0,b[\![= \{0,\dots,b-1\}$. En Python, on utilisera la commande `a%b` pour calculer a mod b.

I Bases de données

On considère une entreprise qui vend des produits par Internet. On suppose que cette entreprise stocke des informations sous la forme d'une base de données, contenant notamment deux tables, appelées respectivement *client* (chaque enregistrement de cette table représentant un client) et *vente* (chaque enregistrement de cette table représentant une vente). La table *client* comporte, entre autres, comme attributs :

- *Idclient*, clé primaire, qui est un entier, représentant l'identifiant du client,
- *Mdp*, qui est une chaîne de caractères, représentant le mot de passe du client permettant d'accéder à son espace client,
- *Mail*, qui est une chaîne de caractères, correspondant à l'adresse mail du client,
- *Adresse*, chaîne de caractère, représentant l'adresse postale du client,
- *Pays*, dont le domaine est l'ensemble $\{FR;BE;LU;CH\}$, qui représente le pays où vit le client (*FR* pour France, *BE* pour Belgique, *LU* pour Luxembourg, et *CH* pour Suisse.

Quant à la table *vente*, elle contient, entre autres, les attributs :

- *Idvente*, clé primaire, qui est un entier, représentant l'identifiant de l'achat effectué,
- *Client*, qui représente l'identifiant du client ayant effectué l'achat,
- *Idproduit*, qui est un entier, et qui représente la référence du produit acheté,
- *Annee*, qui est un entier, qui représente l'année d'achat du produit,
- *Prix*, qui est un flottant, et qui représente le montant en euros correspondant à l'achat du produit considéré.

Q.1 ☞1✓ Pour des raisons de calcul des frais de livraison, l'entreprise souhaite avoir la liste des clients habitants en Suisse. Écrire une requête SQL permettant de connaître les identifiants des clients concernés.

Q.2 ☞1✓ Pour gérer ses stocks et commandes aux fournisseurs, l'entreprise souhaite connaître, pour chaque produit, le nombre de fois où il a été vendu. Écrire une requête SQL permettant d'avoir accès à cette information.

Q.3 L'entreprise souhaite contacter, afin de les récompenser, ses meilleurs clients de l'année, la "qualité" d'un client se mesurant à la somme totale qu'il a dépensée sur le site lors de l'année 2023.

(a) ☞1✓ Écrire une requête SQL permettant d'avoir les adresses mail des 10 meilleurs clients en 2023.

(b) ☞1✓ Écrire une requête SQL permettant d'avoir les adresses mail des clients classés entre la 11ème et la 50ème place en 2023.

(c) ☞1✓ Écrire une requête SQL permettant d'avoir les adresses mail des clients ayant dépensé plus de 100euros sur le site Internet au cours de l'année 2023.

Q.4 ☞2✓ Parfois, quand plusieurs personnes d'un même foyer souhaitent effectuer des achats, il arrive qu'ils renseignent la même adresse mail. L'entreprise souhaite connaître ces doublons. Écrire une requête SQL permettant d'obtenir les couples d'identifiants de clients différents ayant pourtant la même adresse mail dans la base de données.

II Conversion de données

L'identifiant, ou *login* d'un client, est, la plupart du temps, une chaîne de caractères. Or comme dans le I., il arrive qu'on souhaite que les identifiants clients soient stockés sous forme d'entiers. Pour cela, on souhaite pouvoir convertir de façon bijective une chaîne de caractères en un entier et réciproquement. Pour cela, il existe (entre autres, il existe d'autres codages permettant de gérer davantage de caractères...) le code ASCII : le principe est d'associer à un caractère d'une liste prédéfinie regroupant les caractères les plus courants, un unique entier entre 0 et 127. Pour connaître le code correspondant à un caractère `c`, en Python, on utilisera la commande `ord(c)`. Par exemple, `ord('R')` renvoie l'entier 82. Réciproquement, étant donné un entier `n` entre 0 et 127, pour connaître le caractère correspondant, on utilise la commande `chr(n)`. Par exemple, `chr(105)` renvoie '*i*'. Notons $\varphi : C \mapsto [\![0,128[\![$ l'application qui à un caractère, associe son code ASCII.

Q.5 ☞1.5✓ Écrire une fonction Python `chaineversentier` d'argument une chaîne de caractères `s` constituée des caractères $c_0,\dots,c_{n-1}$ associe l'entier $\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(c_j)\,128^j$.

Q.6 ☞1.5✓ Écrire une fonction Python `entierverschaine` d'argument un entier, qui réalise l'opération réciproque à celle de la question précédente, et renvoie donc une chaîne de caractères.

Dans la suite de ce sujet, nous allons parfois devoir manipuler des listes Python où tous les éléments valent soit 0 soit 1.

Q.7 ☞1✓ Écrire une fonction Python d'argument une liste $B = [b_0,\dots,b_{N-1}]$ pour un certain entier naturel non nul N et où $b_0,\dots,b_{N-1}$ valent 0 ou 1, renvoie l'entier $\sum_{j=0}^{N-1} b_j 2^j$.

Q.8 ☞1.5✓ Écrire une fonction Python `transforme(L,N)` d'arguments une liste $L = [b_0,\dots,b_{n-1}] \in \{0,1\}^n$ et un entier naturel non nul N, et qui renvoie la liste $R = [r_0,\dots,r_{m-1}]$ où $m = \lfloor n/N \rfloor$ et où les r_k sont fabriqués à partir de regroupements de "paquets" de N bits consécutifs de la suite `L`; plus précisément, on aura $r_0 = \sum_{j=0}^{N-1} b_j 2^j$, fabriqué à partir des bits $b_0,\dots,b_{N-1}$, on aura également $r_1 = \sum_{j=0}^{N-1} b_{N+j} 2^j$ fabriqué à partir des N bits suivants $b_N,\dots,b_{2N-1}$, et plus généralement, pour k entre 0 et $m-1$, on aura $r_k = \sum_{j=0}^{N-1} b_{Nk+j} 2^j$.

III Une fonction de hachage cryptographique

Q.9 ☞0.5✓ Expliquez les problèmes de sécurité que pourrait poser le stockage de l'attribut *Mdp* dans la table *client* de la base de données du I.

Pour pallier à ce problème, on souhaite disposer d'une fonction ψ, appelée *fonction de hachage cryptographique*, définie sur l'ensemble des chaînes de caractères, et à valeurs dans $[\![0,2^{128}[\![$. Ainsi, au lieu de stocker un mot de passe s sous forme d'une chaîne de caractères, on stockera plutôt dans la base de données la valeur $\psi(s)$.

Q.10 ☞0.5✓ Expliquez les propriétés attendues pour que la fonction ψ soit efficace du point de vue de la sécurité du stockage des mots de passe des différents clients.

On considère la fonction $H : \mathbb{N} \to [\![0,2^{128}[\![$ définie par le fait que si $z \in \mathbb{N}$ se décompose sous forme $z = x + 2^{64}y$ avec $x \in [\![0,2^{64}[\![$, alors $H(z) = \sum_{j=0}^{127} \left(f^j(x) \bmod 2\right) 2^j$, où $f : p \mapsto \lfloor (2y+3)p/2 \rfloor \bmod 2^{128}$, et où les puissances de f sont à comprendre pour la loi de composition entre les applications. Avec les notations du II., un candidat pour la fonction ψ sera la fonction $H \circ$ `chaineversentier` .

Q.11 ☞1.5✓ Écrire une fonction `encrypte(s)` prenant en argument une chaîne de caractères `s` et qui renvoie l'entier $H($`chaineversentier(s)`$)$.

Dans la suite du problème, nous allons étudier certaines propriétés de fonctions, appelées *Conway-maps*, ressemblant à la fonction f, qui laissent à penser que la fonction ψ sera une bonne fonction de hachage cryptographique.

IV Propriété d'équipartition de la dynamique issue d'une Conway-map

Soient m et N des entiers naturels non nuls. On considère des entiers naturels $r_0,\dots,r_{m-1}$ appartenant à $[\![0,2^N[\![$. On dit que la liste $L = [r_0,\dots,r_{m-1}]$ est *équirépartie modulo* 2^N si pour tout j entre 0 et 2^N-1, en notant $c_j =$

card $\{k \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $r_k = j\}$, on a

$$\frac{c_j - \frac{m}{2^N}}{\sqrt{\frac{m}{2^N}\left(1 - \frac{1}{2^N}\right)}} \in [-2.58, 2.58].$$

Q.12 ☞1.5✓ Écrire une fonction Python d'arguments un entier naturel N et une liste L d'éléments appartenant à $[\![0, 2^N[\![$, et qui renvoie, sous forme d'un booléen, si la suite L est équirépartie modulo 2^N.

Soit c un nombre entier impair supérieur ou égal à 3. On considère l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad k \mapsto \lfloor ck/2 \rfloor$.

13. ☞1✓ Montrer que si $z \geqslant 3, \quad \frac{cz}{2} - 1 \geqslant \frac{7}{6}z$. En déduire que si z est un entier supérieur ou égal à 2, la suite $(g^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ (où les puissances concernent la composition) diverge vers $+\infty$.

Pour éviter cette divergence, on manipule désormais la fonction $f : \mathbb{N} \to [\![0, 2^{128}[\![, \quad p \mapsto \lfloor cp/2 \rfloor \bmod 2^{128}$. Pour x un entier naturel supérieur ou égal à 2, on s'intéresse à la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = f^k(x) \bmod 2 \in \{0, 1\}.$$

14. ☞1.5✓ Écrire une fonction `test(N,n,c,x)` d'arguments deux entiers naturels non nuls N et n, c un nombre entier impair supérieur ou égal à 3 et x un entier naturel supérieur ou égal à 2, qui fabrique la suite de n bits $(b_k)_{k=0,\ldots,n-1}$, qui la rassemble par paquets de N bits comme décrit au II.4 en une liste d'entiers de $[\![0, 2^N[\![$, et qui regarde si cette liste est équirépartie modulo 2^N.

V Programmation dynamique au service d'une conjecture de Conway

Soit E un ensemble, et $f : E \to E$ une application. Pour tout $x \in E$, on s'intéresse à ce qu'on appelle *l'orbite de x par f*, qui est la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ (où là encore, les puissances sont pour la composition). On s'intéresse, pour $x \in E$, à la propriété $\pi(x)$: "$\exists (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad i < j$ et $f^i(x) = f^j(x)$".

15. Donner un exemple d'ensemble E et d'application $f : E \to E$ telle que pour tout x dans E, $\pi(x)$ soit fausse.
16. Justifier que si E est un ensemble fini, alors pour tout x dans E, $\pi(x)$ est vraie.
17. Soit $x \in E$ tel que $\pi(x)$ soit vraie. Justifier qu'on peut définir $T_1(x) = \min\left\{j \in \mathbb{N}^* \mid \exists i < j, \quad f^i(x) = f^j(x)\right\}$ appelé *temps de première redondance*, puis $T_0(x) = \min\left\{i \in \mathbb{N} \mid f^i(x) = f^{T_1(x)}(x)\right\}$. Démontrer enfin que la suite $\left(f^i(x)\right)_{i \geqslant T_0(x)}$ est $T_1(x) - T_0(x)$ périodique.
18. (a) Dans cette question seulement, on suppose que $E = [\![0, 8[\![$ et que $f : E \to E$ est définie par

$$f(0) = 0, f(1) = 5, f(2) = 7, f(3) = 2, f(4) = 5, f(5) = 2, f(6) = 3, f(7) = 3.$$

Calculer l'orbite de 1 par f, et en déduire $T_0(1), T_1(1)$.

(b) On revient au cas général. Écrire une fonction Python d'arguments la fonction f et un élément x tel que $\pi(x)$ soit vraie, et qui renvoie le tuple $(T_0(x), T_1(x))$. Pour cela, on pourra créer et mettre à jour un dictionnaire dont les clés seront les différentes valeurs atteintes au fur et à mesure du calcul des termes successifs de la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, et les valeurs seront, pour chaque clé c, la plus petite valeur de i pour laquelle $f^i(x)$ est égale à c. Que se passerait-il si $\pi(x)$ était fausse ?

19. (a) On reprend l'exemple où $E = [\![0, 8[\![$ et que $f : E \to E$ est définie par

$$f(0) = 0, f(1) = 5, f(2) = 7, f(3) = 2, f(4) = 5, f(5) = 2, f(6) = 3, f(7) = 3.$$

En faisant le moins de calculs possibles, calculer, pour tout x de E, les valeurs de $f^{T_1(x)}(x)$ et de $T_1(x) - T_0(x)$.

(b) Écrire une fonction Python d'argument une fonction f et une partie finie $F \subset E$, et qui renvoie un dictionnaire `D` dont les clés sont les éléments de F, et pour tout $c \in F$, la valeur `D[c]` sera le tuple $(f^{T_1(c)}(c), T_1(c) - T_0(c))$. On veillera à ne pas refaire inutilement plusieurs fois le même calcul...

20. Soit b un entier supérieur ou égal à 2. On considère $c_0, \ldots, c_{b-1}$ des entiers naturels n'ayant aucun autre diviseur commun avec b que 1, et $d_0, \ldots, d_{b-1}$ des entiers naturels. On appelle *Conway-map* l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad p \mapsto \lfloor c_j p/b \rfloor + d_j$ si $p \bmod b = j$. Une conjecture de Conway est que si $c_0 \times \ldots \times c_{b-1} < b^b$, alors $\forall k \in \mathbb{N} \quad \pi(k)$ est vraie.

(a) Écrire une fonction Python d'arguments les listes $c = [c_0, \ldots, c_{b-1}]$ et $d = [d_0, \ldots, d_{b-1}]$ et un entier naturel M, qui vérifie que l'hypothèse $c_0 \times \ldots \times c_{b-1} < b^b$ est vérifiée, et qui grâce à la fonction écrite à la question 5.b., vérifie que $\pi(0), \ldots, \pi(M-1)$ sont vraies.

(b) Soit $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad p \mapsto \begin{cases} p/2 \text{ si } p \text{ est pair} \\ (3p+1)/2 \text{ sinon} \end{cases}$. Vérifier que S est une Conway-map, et donner les listes c et d correspondantes. La *conjecture de Syracuse* affirme que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exists i \in \mathbb{N} \,|\, S^i(k) = 1$. Si la conjecture de Syracuse est vraie, quel sera le dictionnaire répondu par la fonction écrite au 5.b. avec comme arguments la fonction S et l'ensemble $F = [\![0, M[\![$ pour M quelconque ?

Correction :

1.

```
SELECT Idclient FROM client WHERE Pays='CH'
```

2.

```
SELECT Idproduit,COUNT(*) FROM vente GROUP BY Idproduit
```

3. (a)

```
SELECT Mail,SUM(Prix) AS Montant FROM client JOIN vente ON Idclient=Client
GROUP BY Idclient WHERE Annee=2023 ORDER BY Montant DESC LIMIT 10
```

(b)

```
SELECT Mail,SUM(Prix) AS Montant FROM client JOIN vente ON Idclient=Client
GROUP BY Idclient WHERE Annee=2023 ORDER BY Montant DESC LIMIT 40 OFFSET 10
```

(c)

```
SELECT Mail,SUM(Prix) AS Montant FROM client JOIN vente ON Idclient=Client
GROUP BY Idclient WHERE Annee=2023 HAVING Montant > 100
```

4.

```
SELECT c1.Idclient,c2.Idclient
FROM client AS c1 JOIN client AS c2 ON c1.Mail=c2.Mail
WHERE c1.Idclient<c2.Idclient
```

5.

```
def chaineversentier(s):
    n=len(s)
    som=0
    for j in range(n):
        som+=ord(s[j])*128**j
    return som
```

6.

```
def entierverschaine(n):
    s=''
    x=n
    while x>0:
        s+=chr(x%128)
        x=(x-x%128)//128
    return s
```

7.

```
def bintoentier(B):
    s=0
    N=len(B)
    for j in range(N):
        s+=B[j]*2**j
    return s
```

8.

```python
def transforme(L,N):
    n=len(L)
    m=n//N
    R=[]
    for k in range(m):
        s=0
        for j in range(N):
            s+=L[N*k+j]*2**j
        R.append(s)
    return R
```

9. Ceci pose le problème suivant : toute personne ayant accès (personnel de l'entreprise ou pirate informatique) à la base de données peut, comme il connaîtra l'identifiant et le mot de passe de chaque client, se faire passer pour lui et faire des achats "à sa place" sur le site.
10. La fonction psi doit être facilement calculable. Idéalement, il faudrait que psi soit injective ; mais comme psi a pour ensemble d'arrivée un ensemble fini, on ne pourra pas éviter des collisions. Il faudra alors qu'elle soit le plus possible localement injective, c'est-à-dire que des mots de passe proches devront donner des entiers distincts. Enfin, pour des questions de sécurité, il faudra qu'il soit difficile, connaissant une valeur de l'ensemble d'arrivée, de calculer le ou les antécédents de cet entier par la fonction psi.
11.

```python
def H(z):
    x=z%(2**64)
    y=(z-x)//(2**64)
    s=0
    q=x
    for j in range(128):
        s+=(q%2)*2**j
        q=((2*y+3)*q//2)%(2**(128))
    return s

def encrypte(s):
    z=chaineversentier(s)
    return H(z)
```

12.

```python
def equirepartie(L,N):
    m=len(L)
    c=2**N*[0]
    for r in L:
        c[r]+=1
    for j in range(2**N):
        test=(c[j]-m/2**N)/((m/2**N*(1-1/2**N))**0.5)
        if test<-2.58 or test>2.58:
            return False
    return True
```

13. Comme $c \geqslant 3$, on a $\frac{cz}{2} - 1 \geqslant \frac{3z}{2}$.
Et $\frac{3z}{2} - 1 - \frac{7}{6}z = \frac{z}{3} - 1 \geqslant 0$ car $z \geqslant 3$. Ainsi cz/2-1>=7/6z$\frac{cz}{2} - 1 \geqslant \frac{7}{6}z$.
De plus, si $z = 2$ $\frac{cz}{2}$ est un entier valant c, qui est plus grand que $\frac{7z}{6} = \frac{7}{3}$.
Ainsi, pour tout $z \geqslant 2$, la partie entière de $\frac{cz}{2}$ est supérieure ou égale à $\frac{7z}{6}$. Ainsi par récurrence, pour tout entier naturel n, on aura

$$g^n(z) \geqslant \left(\frac{7}{6}\right)^n z,$$

qui tend vers l'infini. Par minoration, $g^n(z)$ diverge vers $+\infty$.
14.

```python
def test(N,n,c,x):
    y=x
    B=[]
    for j in range(n):
```

```
        B.append(y%2)
        y=(c*y//2)%(2**(128))
    R=transforme(B,N)
    return equirepartie(R,N)
```

On remarque que `test(N,n,c,x)` répond la plupart du temps `True` quand n est grand devant 2^N, ce qui est cohérent avec le fait que la suite $(b_k)_k$ est très "imprévisible". On pourrait utiliser cette suite pour fabriquer un générateur pseudo-aléatoire...

15. On prend $E = N$ l'ensemble des entiers naturels, et
$f : n \mapsto n+1$. Quel que soit le point de départ, on a pour tout i, $f^i(n) = n+i$, et les $f^i(n)$ sont deux à deux distincts.
16. Si E est fini, comme les $f^i(x)$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, il y a forcément un moment où on tombe sur une valeur déjà rencontrée auparavant. Donc $\pi(x)$ est toujours vraie.
17. $T_1(x)$ et $T_0(x)$ sont bien définies, comme minimum de parties non vides de $\mathbb{N}$. Quant à la $T_1 - T_0$ périodicité, on démontre par récurrence que pour tout i supérieur ou égal à T_0, $f^(i+T_1-T_0)(x) = f^i(x)$
18. Les valeurs atteintes à partir de 1 sont $1,5,2,7,3,2,7,3,2,7,3,2\ldots$ Ainsi, $T_0(1) = 2$, $T_1(1) = 5$.
19.

```
def redondance(f,x):
    d={}
    i=0
    y=x
    while y not in d:
        d[y]=i
        y=f(y)
        i+=1
    return (d[y],i)
```

Si $\pi(x)$ est fausse, alors on ne sortira jamais de la boucle, et le dictionnaire `d` va grossir indéfiniment...

```
def f(x):
    if x==0:
        return 0
    elif x==1:
        return 5
    elif x==2:
        return 7
    elif x==3:
        return 2
    elif x==4:
        return 5
    elif x==5:
        return 2
    elif x==6:
        return 3
    else:
        return 3
```

On a bien redondance $(f,1) = (2,5)$

20. pour 0 : (0,1)
pour 1 : (2,3)
pour 2 : (2,3)
pour 3 : (3,3)
pour 4 : (2,3)
pour 5 : (2,3)
pour 6 : (3,3)
pour 7 : (7,3)

21.

```
def q5b(f,F):
    D={}
    for x in F:
        y=x
        i=0
        traj={}
        while y not in D and y not in traj:
```

```
            traj[y]=i
            i+=1
            y=f(y)
        if y in traj:
            for z in traj:
                if traj[z]<=traj[y]:
                    D[z]=(y,i-traj[y])
                else:
                    D[z]=(z,i-traj[y])
        else:
            for z in traj:
                D[z]=D[y]
    return D
```

22.
```
def conway(c,d,M):
    b=len(c)
    p=1
    for x in c:
        p=p*x
    if p<b**b:
        def f(k):
            j=k%b
            return c[j]*k//b+d[j]
        L=[i for i in range(M)]
        D=q5b(f,L)
        return D
        #on retourne le dictionnaire, et on sort de la fonction si on parvient à sorti
```

23. La fonction S est une Conway-map avec $b = 2$, $c_0 = 1$, $d_0 = 0$, $c_1 = 3$ et $d_1 = 1$ puisque partie entière de $(3k/2)+1 = (3k+1)/2$ si k est impair.
On a bien $c_0c_1 = 3 < 2^2 = 4$. Si la conjecture de Syracuse est vraie, alors `D[0]=(0,1)`, `D[1]=(1,2)` et pour tout `k` supérieur ou égal à 2, `D[k]=(2,2)` puisque la première valeur de redondance sera 2 et qu'à partir de ce rang, la suite sera 2-périodique ; d'ailleurs, la réciproque est vraie.

Sujet et correction de DS posté sur la base données de documents de l'UPS (anonyme).

Exercice 2

Introduction

On s'intéresse à la combinatoire des partages d'entiers et des tableaux standards, objets apparaissant dans de nombreux problèmes de combinatoire algébrique, notamment en théorie des représentations du groupe symétrique. On commence par une étude élémentaire des partages, puis on définit les tableaux standards et on présente une façon de les compter à l'aide de la programmation dynamique.

VI Partage d'un entier

Définition VI.1 Étant donné un entier $n \geqslant 1$, un partage de cet entier est une suite finie d'entiers décroissante $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \lambda_k \geqslant 1$ et vérifiant

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n.$$

Dans la suite, les λ_i sont appelés parts, l'entier k est appelé longueur du partage $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$.
On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des partages de n et p_n le cardinal de cet ensemble.

Pour pouvoir utiliser les dictionnaires, on utilisera des tuples d'entiers pour représenter un partage. Par exemple, `(3,2,2)` est un partage de l'entier 7.

Q1. ☞0.5✓ Parmi les tuples suivants, préciser ceux qui correspondent à des partages d'entiers et ce qui ne le sont pas. Parmi le ou les partages, préciser la valeur de la plus grande part.

(a) $t_1 = (3,2,0)$
(b) $t_2 = (5,2,1,1)$
(c) $t_3 = (3,1,1,2)$
(d) $t_4 = (2,2)$.

Q2. ☞1.5✓ Écrire une fonction `est_partage(t)` prenant en argument un tuple d'entiers tous strictement positifs et qui renvoie `True` si `t` représente un partage et `False` sinon.

Q3. Il n'existe pas de relation de récurrence directe pour $(p_n)_{n\geqslant 1}$.
Une manière d'obtenir une récurrence est de découper $\mathscr{P}_n$ en fonction de la valeur de la plus grande part. Dans la suite, on note $\mathscr{P}_{n,\ell}$ l'ensemble des partages de n dont la plus grande part est égale à ℓ et $p_{n,\ell}$ son cardinal.
Par convention, on pose $p_{0,0} = 1, p_{n,\ell} = 0$ si $\ell > n$ ou si $n \neq 0$ et $\ell = 0$ ou si $\ell < 0$. On pourra utiliser dans la suite que 0 est le cardinal de l'ensemble vide.

(a) ☞0.5✓ Expliciter pour tout $n \geqslant 1$ les valeurs de $p_{n,n}$ et $p_{n,1}$.
(b) ☞1.5✓ On fixe $n \geqslant \ell \geqslant 1$. Justifier par un argument ensembliste la relation de récurrence :

$$p_{n,\ell} = \sum_{i=1}^{\ell} p_{n-\ell,i}.$$

(c) ☞1.5✓ En déduire une fonction `calculs(n)` prenant en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie la liste de listes $[[p_{0,0}], [p_{1,0}, p_{1,1}], \cdots, [p_{n,0}, \cdots, p_{n,n}]]$.
(d) ☞1✓ Expliciter la complexité de la fonction `calculs` en nombre d'additions.
Indication : on pourra simplement compter le nombre d'additions effectuées dans la relation de récurrence, sans se soucier si on ajoute un 0 ou non.
(e) ☞1.5✓ En déduire une fonction `nb_partages(n)` prenant en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le nombre p_n.

Q4. ☞2✓ On cherche maintenant à générer tous les partages d'un ensemble de la forme $\mathscr{P}_{n,\ell}$. Pour cela, on considère le début de code suivant :

```
dico = {(1,1): [(1,)] , (2,1): [(1,1)], (2,2) : [(2,)]}
def liste_partage(n,l) :
    if (n,l) in dico :
        ...
    else :
        ...
```

En vous inspirant de ce qui a été fait pour la suite des $(p_{n,\ell})$ et à l'aide du dictionnaire `dico`, compléter la fonction `liste_partages(n,ℓ)` prenant en argument deux entiers $n \geqslant \ell \geqslant 1$ et qui renvoie la liste des partages de l'entier n dont la plus grande part est égale à ℓ. On veillera à stocker dans `dico` les éléments calculés.

Q5. ☞3✓ Proposer une autre relation de récurrence permettant de calculer p_n plus rapidement.
Justifier brièvement la relation donnée ainsi que l'efficacité accrue de l'algorithme reposant sur cette relation.

Q6. ☞1✓ Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, on a $p_n \leqslant 2^{n-1}$.

Q7. ☞1 +3✓ Pour tout $\ell \geqslant 1$, on pose $f_\ell(t) = \sum_{n\geqslant \ell} p_{n,\ell} t^n$.
Justifier que la fonction est bien définie pour t assez proche de 0, puis donner une expression de f_ℓ comme un produit de fractions rationnelles usuelles.

Correction :

VII Partage d'un d'entier

1. t_1, t_3 ne sont pas des partages. t_2 est un partage de 9 avec comme plus grande part 5. t_4 est un partage de 4 avec comme plus grande part 2.
2. On a par exemple

```
def est_partage(t):
    n = len(t)
    for i in range(n-1):
        if t[i+1] > t[i]:
            return False
    return True
```

3. On a $p_{n,n} = 1, p_{n,1} = 1$.

4. On a : $\mathscr{P}_{n,\ell} = \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathscr{P}_{n-\ell,i}$ Ceci provient du fait que la deuxième plus grande part a une valeur inférieure à ℓ. De plus, ces ensembles sont disjoints deux à deux car on partitionne par rapport à la valeur de la deuxième part. Ainsi, en passant au cardinal, on retrouve l'égalité annoncée :

$$p_{n,\ell} = \sum_{i=1}^{\ell} p_{n-\ell,i}.$$

5. Voici le programme demandé :

```
def calculs(n):
    L = [[1]]
    for i in range(1,n+1):
        M = [0]*(i+1)
        M[-1] = 1
        for j in range(1,i):
            for k in range(1,j+1):
                if k <= i-j :
                    M[j] += L[i-j][k]
        L.append(M)
    return L
```

6. Le nombre d'additions est de l'ordre de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1^j} 1$. Ce qui donne $\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2}$. On a donc $O(n^3)$ additions.
7. Voici le programme demandé :

```
def nb_partages(n):
    L = calculs(n)
    S = 0
    for i in range(n+1):
        S += L[n][i]
    return S
```

8. Voici le programme demandé :

```
dico = { (0,0) : [()] , (1,1) : [(1,)] , (2,1):[(1,1)] , (2,2) : [(2,)]}

def liste_partages(n,l):
    if (n,l) in dico:
        return dico[(n,l)]
    if l == n :
        dico[(n,n)] = [(n,)]
    else :
        L = []
        for i in range(1,min(l,n-l)+1):
            for x in liste_partages(n-l,i) :
                L.append((l,)+x)
        dico[(n,l)] = L
    return dico[(n,l)]
```

9. On considère une autre suite à deux indices $(q_{n,k})$ où $q_{n,k}$ correspond au nombre de partages de n ayant exactement k parts. En remarquant que tout partage ayant exactement k parts contient au moins une part égale à 1 ou uniquement des parts supérieurs à 2, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$q_{n,k} = q_{n-1,k-1} + q_{n-k,k}$$

Par de la programmation dynamique usuelle et sachant que calculer un nouveau terme nécessite deux additions, on obtient une complexité en $O(n^2)$ pour caluler p_n.

10. Démontrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1, p_n \leqslant 2^{n-1}$.
    - Pour $n = 1$, on a $p_1 = 1 \leqslant 2^0$. L'inégalité est donc vraie au rang 1.
    - Hérédité : soit $n \geqslant 1$. Supposons que $p_n \leqslant 2^{n-1}$. Montrons que $p_{n+1} \leqslant 2^n$.
      Notons A l'ensemble des partages de $n+1$ contenant au moins une part égale à 1.
      On a :

$$A \cup \overline{A} = \mathscr{P}_{n+1}.$$

De plus, A est en bjiection avec $\mathscr{P}_n$: il suffit de considérer l'application consistant à enlever une part égale à 1 aux éléments de A. De même, l'application consistant à enlever 1 à la plus petite part des éléments de $\overline{A}$ est injective. Donc le cardinal de $\overline{A}$ est inférieur à p_n. Ainsi, on a

$$p_{n+1} \leqslant 2p_n \leqslant 2^n.$$

La propriété est bien héréditaire.

- Conclusion : l'inégalité est vérifiée pour tout $n \geqslant 1$.

11. Pour $|t| < \frac{1}{2}$ et $n \geqslant 1$,

$$|p_{n,l}t^n| \leqslant 2|\frac{t}{2}|^n$$

ce dernier terme est celui d'une série absolument convergente. Ainsi, $f(t)$ est bien définie pour t assez proche de 0. Considérons : $t^\ell \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{1-t^i}$. En développant, puis en regroupant par puissance de t on retrouve $f(t)$.