Programme de colle 12

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Fonctions DSE. Séries entières et équations différentielles.

Rappels sur l'algèbre linéaire : Espaces vectoriels. Produit de SEV. Somme et somme directe de sous-espace vectoriel. Espaces vectoriels supplémentaires. Famille finie de vecteurs.

Formule de changement de base. Matrices semblables. Calcul matriciel. Utilisation de Newton pour calculer A^n.

Trace (d'une matrice, d'un endomorphisme). Image et noyau d'une application linéaire. Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'une matrice. Projecteurs et symétries. Résolution d'équations linéaires. Sous-espace stable. Caractérisation avec les matrices. Produit matriciel par blocs.

Hyperplans.

Série génératrice d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Techniques:

- Fonction DSE et équation différentielle.
  Plusieurs techniques ont été vues en TD :
  - Montrer que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en vérifiant que f et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sont solution du même problème de Cauchy. Exemple de $x \mapsto (1+x)^\alpha$
  - Montrer que f est DSE, puis trouver les coefficients de ce DSE à partir d'une équation différentielle. Exemple de $x \longmapsto e^{x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$, $x \longmapsto (\arcsin x)^2$
  - Chercher une solution DSE d'une équation différentielle. Exemple de $x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$.

  L'utilisation de l'unicité de la solution du problème de Cauchy et de l'unicité du développement en série entière sont à connaître.
  Voir la fiche sur ce sujet.
- Définitions de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, sous-espaces vetoriels, somme et produit de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Famille libre, génératrice. Théorie de la dimension. Image et noyau d'une application linéaire. Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'une matrice. Polynôme appliqué à une matrice, à un endomorphisme. Polynôme annulateur.
- Propriété de la trace. Démonstration à connaître :

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, \; Tr(AB) = Tr(BA)$$

  $(A,B) \longmapsto Tr(A^T B)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, propriétés de la famille $\mathscr{F} = \Big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\Big)$
- Calcul algébrique :

$$\ker(f) \subset \ker(f^2) \qquad \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$$

- Relation sur le rang : $Rg(u \circ v) \leqslant \min(Rg(u), Rg(v))$ (pas de démonstration).
- Propriétés des projecteurs et des symétries. Montrer que la relation $p \circ p = p$ implique que $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$ et que p est un projecteur.
- Changement de base pour les matrices : formules de changement de base. Matrices semblables.
- Calcul matriciel. Formule du produit de deux matrices.
- Calcul algébrique matriciel. Utilisation de $I_n - A^n = (I_n - A) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$. Utilisation de Newton pour le calcul de A^n.

  Deux cas à connaître :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

- Calcul d'inverse par polynôme annulateur.

- Résolution d'équations linéaires.
  Exemple pour trouver les suites vérifiant : (R) : $\quad u_{n+2}+3u_{n+1}+2u_n=n^2+2n+5$
- Sous-espace stable.
  Montrer que si $u\in\mathscr{L}(E)$ et $P\in\mathbb{K}[X]$, alors $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\ker(P(u))$ sont stables par u.
  Montrer que si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors $\operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v.
- Montrer qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. La démonstration doit être connue.
- Fonctions génératrices. En particulier, lien avec les calculs d'espérance et de variance. Fonction génératrice de la somme de deux variables indépendantes.
- Retrouver les résultats connus sur l'espérance et la variances des variables usuelles par leur fonction génératrice.
  Exemple des lois $\mathscr{U}\left(\llbracket 1,n\rrbracket\right)$, $\mathscr{B}(p)$, $\mathscr{B}(n,p)$, $\mathscr{G}(p)$, $\mathscr{P}(\lambda)$.