Programme de colle 18

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Chapitre 6 Intégration sur un intervalle

I Fonctions continues par morceaux *I.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment I.2 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle*

II Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment *II.1 Fonctions en escalier et intégrale d'une fonction en escalier II.2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux II.3 Lien avec les primitives*

III Intégrales généralisées *III.1 Intégrales généralisées sur* $[a,+\infty[$ *III.2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque III.3 Intégrale généralisée de référence III.4 Propriété III.5 Manipulation ✯Changement de variables ✯Intégration par parties*

IV Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables *IV.1 Définitions IV.2 Manipulation et propriété ✯Intégrabilité en une borne*

Rappels sur les espaces euclidiens et pré-hilbertiens

Chapitre 7 Espaces euclidiens

I Hyperplan et produit scalaire *✯Projeté et distance à un hyperplan*

II Isométries vectorielles *II.1 Définition et caractérisation II.2 Propriétés II.3 Groupe orthogonal*

III Matrices orthogonales *III.1 Définition et caractérisation III.2 Propriétés ✯Groupe spécial orthogonal*

IV Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3 *IV.1 Orientation ✯Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3 IV.2 Produit mixte IV.3 Produit vectoriel dans* $\mathbb{R}^3$ *IV.4 Interprétation géométrique*

V Isométries vectorielles du plan euclidien *V.1 Matrice de* $O_2(\mathbb{R})$ *V.2 Interprétation géométrique*

VI Isométries vectorielles de l'espace euclidien *VI.1 Matrice de* $O_3(E)$ *VI.2 Intreprétation géométrique*

VII Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles *VII.1 Définition ✯Caractérisation des projecteurs orthogonaux VII.2 Matrices symétriques VII.3 Théorème spectral VII.4 Endomorphisme autoadjoint positif*

Techniques:

- Démontrer qu'une application est un produit scalaire. Exemple de :
  - $\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$
  - dans $\mathbb{R}^3$:
  $$\Big\langle (x,y,z),(x',y',z')\Big\rangle = xx'+yy'+zz'+\frac{1}{2}\left(xy'+x'y+xz'+x'z+yz'+y'z\right)$$
  - $\varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
  - $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. (fait dans la partie rappel sur l'algèbre linéaire, à relire).
- Fonctions de carré intégrable et produit scalaire sur les fonctions de carré intégrable. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Voir les exercices de TDs.
- Utilisation de l'inégalité de cauchy-schwarz. Voir les exercices de TDs.
- Montrer qu'une famille est orthonormale. Exemple de :
$$f_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f_k : x \mapsto \cos(kx) \qquad g_k : x \mapsto \sin(kx) \text{ pour } k \in [\![1,n]\!]$$
- Procédé d'orthonormalisation. Exemple base (P_0,P_1,P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ orthonormée pour $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.
- Calcul de projeté orthogonal et applications.
  Exemples :
  - projeté de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$

- $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \left(x - a\cos x - b\sin x\right)^2 dx$
- projeté de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

- Projection et distance à un hyperplan.
- Isométries vectorielles du plan : définition et propriété. Matrices orthogonales.
- Orientation de l'espace. Produit mixte et produit vectoriel. Expression du produit vectoriel dans une BON.
- Détermination des matrices de $O_2(\mathbb{R})$.
- Détermination des endomorphismes de l'espace euclidien.
- Étant donné une matrice de $\mathbb{R}^3$, déterminer géométriquement l'endomorphisme associé. Lecture de la fiche associée. Aucun exercice fait en TD pour l'instant.
- Endomorphisme symétrique et théorème spectral.
- Caractérisation des endomorphismes de $\mathscr{S}^+$ et de $\mathscr{S}^{++}$ par les valeurs propres.