Programme de colle 20

Pelletier Sylvain — PSI, LMSC

Cours:

Application de la réduction à l'analyse (pour les systèmes d'équation différentielle et pour les suites récurrentes linéaires).

Chapitre 8 Interversion de symboles

I Rappels *I.1 Limite de la dérivée I.2 Continuité de la limite / somme d'une suite de fonctions I.3 Interversion limite et intégrale I.4 Interversion dérivation / limite ou somme*

II Convergence dominée pour une suite de fonctions

III Intégration terme à terme sur un intervalle

IV Continuité sous le signe intégrale ✯*Version avec des hypothèses plus faibles*

V Dérivation sous le signe intégrale ✯*Version avec des hypothèses plus faibles* ✯*Généralisation aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$*

Chapitre 9 Espaces vectoriels normés

I Normes et distances *I.1 Définition* ✯*Cas d'un produit scalaire associé I.2 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$* ✯*Autres normes usuelles I.3 Propriétés I.4 Distance I.5 Boules et sphères I.6 Partie convexe I.7 Partie bornée, suite bornée et fonction bornée*

Techniques:

- Application de la réduction pour traiter des suites récurrentes linéaires. Exemples de :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

- Application de la réduction à l'analyse :
  - Application aux systèmes différentiels : réduction de la matrice et changement d'inconnue pour se ramener à un système diagonal ou triangulaire.
    Exemple de :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 3z \\ y' = 2y \\ z' = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

- Les rappels sur les inversions de symboles :
  - théorème de la limite de la dérivée,
  - continuité et limite uniforme d'une suite / série de fonctions
  - intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite / série de fonctions.
  - dérivation d'une suite / série de fonctions (si convergence uniforme de la suite / série des dérivées).
- Convergence dominée pour une suite de fonctions : l'énoncé doit être parfaitement connu.
  Application à $\lim\limits_{n\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
- Intégration terme à terme sur un intervalle : l'énoncé doit être parfaitement connu.
  Application à $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$
- Continuité sous le signe intégrale : l'énoncé doit être parfaitement connu.
  Application à la transformée de Fourrier. $\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} dt$.
- Théorème de convergence dominé à paramètre continu.
- Dérivation sous le signe intégrale : l'énoncé doit être parfaitement connu.
  Application à la dérivation de : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)^n}$
  Application aux dérivées successives de : $\int_0^1 \sin(tx) dt$

- Tout exercice d'interversion de symboles, en particulier, dérivation sous le signe intégrale et lien avec une équation différentielle. (voir les exercices de TDs).
- Montrer qu'une application est une norme.
- Démontrer l'inégalité triangulaire renversée.
- Définition d'une norme. Norme usuelle sur $\mathbb{R}^n$ Montrer que les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont des normes. Dessin des boules unités pour les normes usuelles de $\mathbb{R}^2$.
- Définition d'une partie convexe.
- Définition d'une partie bornée, d'une application bornée, d'une suite bornée.