

# Programme de colle 24

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

## Cours:

### Chapitre 10 Calcul différentiel

I Équations différentielles linéaires scalaires *★Écriture sous la forme d'un système d'ordre 1* I.1 Structure de l'ensemble des solutions I.2 Cas des coefficients constants *★Équation homogène ★Cas d'un second membre* I.3 Exemples

II Dérivabilité des fonctions vectorielles II.1 Interprétation d'une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  comme courbe paramétrée *★Définitions ★Tangente aux points réguliers* II.2 Dérivabilité en un point *★Rappel sur les limites des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$*  II.3 Dérivabilité sur un intervalle II.4 Dérivabilité et composition *★Cas d'une application linéaire ★Cas d'une application bilinéaire / multilinéaire ★Composée à droite par une fonction réelle* II.5 Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$

III Fonctions de plusieurs variables *★Représentation d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$*  III.1 Fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  *★Dérivées selon un vecteur ★Fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  ★Cas des fonctions vectorielles* III.2 Propriétés III.3 Développement limité à l'ordre 1 et différentielle III.4 Règle de la chaîne *★Cas général ★Applications aux fonctions constantes sur un ouvert convexe ★Applications aux changements de variables ★Cas particulier des coordonnées en polaire*

IV Applications géométriques IV.1 Gradient IV.2 Ligne de niveau *★Rappel de géométrie* IV.3 Surface de niveau *★Rappels de géométrie ★Courbe tracée sur une surface*

V Fonction de classe  $\mathcal{C}^2$

VI Extremums d'une fonction de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$

## Techniques:

- Tout exercice sur les espaces vectoriels normés.
- Structure de l'ensemble de solutions d'un système d'équations différentielles linéaires, en particulier théorème de Cauchy (avec l'unicité) et la dimension de  $\mathcal{S}_H$ . Application au cas de système à coefficients non constant lorsqu'une indication est donné.

Exemple traités en cours :

$$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{3}{t^2}y = -1 + \frac{3}{t^2}$$

Exemple traités en TD :

$$\begin{aligned}u'(t) &= -tu(t) + v(t) + 1 \\v'(t) &= (1 - t^2)u(t) + tv(t) + 1\end{aligned}$$

- Définition de la dérivabilité d'une fonction de  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Lien avec la dérivabilité des fonctions coordonnées.
- Dérivation et composition (cas des applications linéaires, bilinéaires et multilinéaires). En particulier, exemple avec le déterminant. Traité en TD : dérivation de :  $\langle f, \det(g, h)k \rangle$ .
- Définition et calcul de dérivées partielles, du gradient en un point. Notion de développement limité d'ordre 1 en un point. Définition de la différentielle en un point.
- Règle de la chaîne. Dérivation de fonction de la forme :

$$t \mapsto f(x_1(t), x_2(t)) \quad (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v)) \quad (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

- Fonction constante sur un ouvert convexe.
- Étude de courbes et de surface de niveau. On attend :
  - Écrire la courbe sous la forme d'une surface de niveau :  $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ .
  - L'équation de la tangente en un point régulier.Pour l'instant un seul exercice traité en TD :  $z^3 = xy$
- Fonction constante sur un ouvert convexe et dérivées partielles.
- Recherche d'extremums de fonctions de deux variables.