Programme de colle 3

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

Rappels sur le calcul des probabilités, les variables aléatoires réelles et les couples de variables aléatoires.

Chapitre 1 Espaces probabilisés

I Un peu de théorie des ensembles *I.1 Rappel sur la notion de famille I.2 Rappel sur les symboles union et intersection I.3 Ensembles dénombrables ✯Retour sur le symbole somme I.4 Tribus*

II Probabilités *II.1 Définition II.2 Propriétés des probabilités II.3 Construction d'une probabilité sur un univers dénombrable*

III Conditionnement et indépendance *III.1 Probabilité conditionnelle III.2 Formule des probabilités composées III.3 Formule des probabilités totales III.4 Formule de Bayes III.5 Indépendance ✯Cas de deux événements ✯Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements*

Rappels et compléments sur les séries numériques. Série géométrique, série téléscopique, critère de comparaison des séries à termes positifs,

Techniques:

- Revoir les exercices présentés dans les diapositives « rappels de probabilités » :
  - Loi avec paramètres : dé tel que $p(X = i)$ est proportionnel à i.
  - Loi de la première blanche dans un tirage sans remise.
  - Un dé et 6 urnes : si $D = i$ on tire avec remise dans urne i qui contient i B et $6-i$ N.
  - $X \sim \mathscr{U}(n)$ et $Y \sim \mathscr{U}(n)$ indépendantes. Loi de $X+Y$?
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  - Lois usuelles.
  - Loi du maximum / minimum de variables aléatoires (lien avec la fonction de répartition)
  - Théorème de transfert.
  - On a N jetons numérotés de 1 à N, on tire n jetons simultanément. On note $X_i = 1$ si on tire le jeton i, 0 sinon et Y la somme des valeurs des jetons tirés. Lien entre Y et les (X_i) ? Loi de X_i. Espérance de Y.
  - On lance n boules dans 3 boîtes. X_i = nbr de boules dans la boîte i. Loi de X_1 et $cov(X_1, X_2)$.
  - Variance d'une somme de VARs. Applications : calcul de la variance de la loi binomiale, de la loi hypergéométrique (ie nombre de blanche dans un tirage sans remise).
  - X_i une suite de VAR avec $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ indépendante. On considère la suite $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$. Loi de Y_i. Espérance et variance de $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$
  - Coefficient de corrélation linéaire. Démonstration de $\rho(X,Y) \in [-1,1]$.
- Montrer qu'un ensemble est dénombrable en le découpant en une suite d'ensemble fini. Application à un produit cartésien d'ensemble dénombrable ou à $\mathbb{Z}$.
- Définition d'une tribu. (seule la définition peut être demandée)
- Définition d'une probabilité.
- Propriétés d'une probabilité en particulier continuité croissante / décroissante et sous-additivité.
- Probabilité définie sur $\mathbb{N}$ à partir des probabilités des singletons : calcul d'un paramètre en utilisant $\sum_n p(\{n\}) = 1$. Calcul de la probabilité d'un événement.
  Exemple de : $p(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, calcul de $p(2\mathbb{N})$ de $p(\{k | k \geqslant 10\})$.
- Montrer que la probabilité conditionnelle est une probabilité.
- Tout exercice de calculs de probabilités sur un univers fini ou infini.
- Revoir les exercices et résultats présentés dans les transparents « rappels sur les séries numériques » :
  - les séries géométriques
  - les séries télescopiques.
    Exemples traités en cours :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

- les comparaisons pour les séries à termes positifs.
  Exemples traités en cours :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}(\cos^2 n)} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$$