Programme de colle 8

Pelletier Sylvain

PSI, LMSC

Cours:

Chapitre 3 Suites et séries de fonctions

I Convergence d'une suite de fonctions *I.1 Mode de convergence d'une suite de fonctions ✯Convergence simple ✯Convergence uniforme ✯La convergence uniforme entraîne la convergence simple ✯Norme de la convergence uniforme ✯Convergence uniforme sur tout segment I.2 Régularité de la limite d'une suite de fonctions ✯Continuité de la limite d'une suite de fonctions ✯Théorème de la double limite ✯Intégration sur un segment ✯Dérivation d'une limite ✯Dérivations successives*

II Convergence d'une série de fonctions *II.1 Mode de convergence d'une série de fonctions ✯Convergence simple et uniforme ✯Convergence normale ✯La convergence normale entraîne la convergence uniforme ✯Extension à la convergence sur tout segment II.2 Régularité de la somme d'une série de fonctions ✯Continuité de la somme d'une série de fonctions ✯Théorème de la double limite ✯Intégration sur un segment ✯Dérivation terme à terme ✯Dérivations successives*

Rappels sur les formules de Taylor et les développements limités : Formule de Taylor pour les polynômes et DLs usuels.

Rappels d'analyse : formule de Taylor avec reste intégrale, accroissements finis. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

Techniques:

- Montrer la convergence uniforme d'une suite de fonction (f_n) sur I :
  - en étudiant $f_n - f$ sur I et en calculant $\|f_n - f\|_\infty$,
  - ou en majorant $|f_n(x) - f(x)|$ indépendamment de x par une suite qui tends vers 0.
- Montrer qu'une suite de fonctions ne converge par uniformément sur I, en minorant $\|f_n - f\|_\infty$ par une suite de réels positifs qui ne tends pas vers 0.
- Convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions. convergence normale et uniforme sur tout segment. Exemple de :

$$\sum \frac{(-1)^n x^n}{n} \qquad \sum \frac{1}{n^2+x} \qquad \sum \frac{e^{-nx}}{n^2} \qquad \sum (x(1-x))^n$$

- La convergence normale entraîne la convergence uniforme. Démonstration.
- Montrer la convergence normale d'une série de fonctions :
  - par calcul de $\|f_n\|_\infty$, puis preuve de la convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$
  - ou en majorant $|f_n(x)|$ indépendamment de x par le terme général d'une série convergente.
- Montrer qu'une série ne converge par uniformément en utilisant le théorème de la double limite.
- Montrer qu'une série ne converge par normalement en minorant $\|f_n\|_\infty$ par une quantité de la forme $|f_n(x_n)|$ terme général d'une série divergente.
- Convergence normale et intégration sur un segment.
- Continuité et convergence uniforme d'une série de fonctions. Extension au cas de la convergence sur tout segment.
- Dérivation et convergence uniforme d'une série de fonctions. Extension au cas de la convergence sur tout segment et aux dérivées successives.
- Étude de la fonction $\zeta : x \longmapsto \sum \frac{1}{n^x}$: existence, continuité, dérivabilité, dérivées successives. Montrez la non convergence uniforme sur $]1, +\infty[$ par utilisation du théorème de la double limite.
- Formule de Taylor pour les polynômes.
- Formule de Taylor-Young. Retrouver les DLs usuels.
- Manipulation des DL : DL en un point a, DL d'une somme, DL d'un produit, DL d'une composée (exemple de $\ln(\cos(x))$), DL d'un quotient. Exemples :

$$x \longmapsto \ln(2+x) \qquad x \longmapsto \sqrt{1+x^2\sin(x)} \qquad x \longmapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$$

- Application des DLs pour calculer des limites. Exemple de :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$$

- Application des DLs pour étudier des fonctions au voisinage d'un point ou de l'infini.
  Exemple de $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ au voisinage de 0.
  Exemple de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$.
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral pour obtenir des inégalités.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Théorème des accroissements finis.
- Application du théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ à la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.
- Notion de Rayon de convergence pour une série entière.