Programme de colle 9

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Cours:

✯La convergence normale entraîne la convergence uniforme ✯Extension à la convergence sur tout segment II.2 Régularité de la somme d'une série de fonctions ✯Continuité de la somme d'une série de fonctions ✯Théorème de la double limite ✯Intégration sur un segment ✯Dérivation terme à terme ✯Dérivations successives

Rappels sur les formules de Taylor et les développements limités : Formule de Taylor pour les polynômes et DLs usuels. Rappels d'analyse : formule de Taylor avec reste intégral, accroissements finis. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

Chapitre 4 Séries entières

I Lemme d'Abel et rayon de convergence *I.1 Définitions I.2 Lemme d'Abel I.3 Calculs de rayon de convergence ✯Invariance ✯Comparaison des coefficients ✯Dérivation et primitivation terme à terme ✯Règle de d'Alembert ✯Somme de deux séries ✯Produit de Cauchy de deux séries entières*

II Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle *✯Convergence normale sur tout segment de l'intervalle de convergence ✯Continuité ✯Primitivation d'une série entière ✯Dérivation d'une série entière*

III Développement en série entière section.4.3*III.1 Fonctions développables en série entière* subsection.4.3.1

Techniques:

- Tout exercice sur des séries de fonctions. En particulier : dérivée une série de fonctions pour retrouver la dérivée d'une fonction usuelle (exemple des exercices de td).
- Formule de Taylor-Young. Retrouver les DLs usuels.
- Manipulation des DL : DL en un point a, DL d'une somme, DL d'un produit, DL d'une composée (exemple de $\ln(\cos(x))$, DL d'un quotient.
- Formule de Taylor pour les polynômes.
- Formule de Taylor-Young. Retrouver les DLs usuels.
- Manipulation des DL : DL en un point a, DL d'une somme, DL d'un produit, DL d'une composée (exemple de $\ln(\cos(x))$, DL d'un quotient. Exemples :

$$x \longmapsto \ln(2+x) \qquad x \longmapsto \sqrt{1+x^2\sin(x)} \qquad x \longmapsto \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$$

- Application des DLs pour calculer des limites. Exemple de :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$$

- Application des DLs pour étudier des fonctions au voisinage d'un point ou de l'infini.
  Exemple de $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ au voisinage de 0.
  Exemple de $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$.
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral pour obtenir des inégalités.
  Exemple pour comparer :

$$\cos(x) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

- Théorème de la limite de la dérivée.
- Application du théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ à la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.
- Théorème des accroissements finis.
- Notion de Rayon de convergence pour une série entière.

- Techniques pour estimer le rayon de convergence. Les résultats de la forme : « si on trouve $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z^n$ converge alors $|z| \leqslant R$ », doivent être connus et compris.
- Invariance du rayon de convergence. En particulier, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon.
- Utilisation de la comparaison des coefficients.
- Règle de d'Alembert pour les séries entières. Cas des séries lacunaires.
- Dérivation et primitivation termes à termes d'une série entière. Dérivation successives.