Table des matières

Suites récurrentes réelles $u_{n+1} = f(u_n)$ 5

Études de suites implicites 15

Les pièges dans les dénombrements 21

Étude des tirages sans remise 25

Égalités obtenues par dénombrements 29

Rang de la i-ième boule dans un tirage sans remise 33

Exercices de première année à savoir faire 37

Couples et vecteurs de VARs, rappels et compléments 45

Simulation de variables aléatoires et de tirages 55

Rappels de dénombrements 65

Rappels probabilités 77

Rappels VARs 105

1 Espaces probabilisés 129

I Un peu de théorie des ensembles 129

I.1 Rappel sur la notion de famille 129

I.2 Rappel sur les symboles union et intersection 131

I.3 Ensembles dénombrables 132

I.4 Tribus 139

II Probabilités 141

II.1 Définition 141

II.2 Propriétés des probabilités 142

II.3 Construction d'une probabilité sur un univers dénombrable 150

III Conditionnement et indépendance 151
III.1 Probabilité conditionnelle 151
III.2 Formule des probabilités composées 152
III.3 Formule des probabilités totales 153
III.4 Formule de Bayes 154
III.5 Indépendance 154
Exercices 157
Les séries numériques à connaître pour le calcul des probabilités 171
Étude de la série harmonique 173
Fiche trigonométrie 179
Fonctions usuelles 187
Rappels et compléments sur les séries numériques 199

2 Variables aléatoires discrètes 211
I Variables aléatoires 211
I.1 Généralités 211
I.2 Loi de probabilités 212
I.3 Système complet d'évènements associé 213
I.4 Fonction de répartition 215
II Espérance 216
II.1 Définition 216
II.2 Expression à partir de la fonction de répartition 217
II.3 Théorème de transfert 218
II.4 Linéarité, positivité et croissance 220
III Variance 220
III.1 Définitions 220
III.2 Propriétés 222
III.3 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Thebychev 222
IV Lois usuelles 224
IV.1 Loi géométrique 224
IV.2 Loi de Poisson 226
V Couples et suites de variables aléatoires 228
V.1 Généralités 228
V.2 Variables aléatoires discrètes indépendantes 229
V.3 Espérance 232
V.4 Covariance 234
VI Résultats asymptotiques 237
VI.1 Convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson 237
VI.2 Loi faible des grands nombres 239
Exercices 241

3 **Suites et séries de fonctions** 289

I **Convergence d'une suite de fonctions** **289**

I.1 Mode de convergence d'une suite de fonctions 289

I.2 Régularité de la limite d'une suite de fonctions 299

II **Convergence d'une série de fonctions** **304**

II.1 Mode de convergence d'une série de fonctions 304

II.2 Régularité de la somme d'une série de fonctions 310

Exercices **317**

Suites récurrentes réelles $u_{n+1} = f(u_n)$

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Tous les résultats donnés sur cette fiche sont à redémontrer au cas par cas. Le programme officiel parle simplement *d'exemples d'étude de suites définies par* $u_{n+1} = f(u_n)$.

Il s'agit donc ici simplement d'étudier des exemples « *en parallèle* » pour extraire une méthode générale.

Dans cette fiche, on définit le plan général d'étude des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in D \text{ donné}, \\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

où $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle. On parle de suites itérées ou de suites récurrentes.

Plusieurs remarques :

- tout d'abord se pose la question de la **définition** de la suite : il est possible que pour un n_0 donné on ait u_{n_0} qui existe mais qui ne soit pas un élément de D et donc $f(u_{n_0}) = u_{n_0+1}$ n'existe pas. On résout cette question généralement par récurrence en montrant que la suite ne « *sort* » pas de l'ensemble D.
  On utilise une proposition du type $\mathscr{P}(n)$: u_n existe et $u_n \in \mathscr{D}$.
- Les suites géométrique, arithmétique et arithmético-géométrique sont des exemples, mais hormis dans ces cas simples, **on n'a pas l'expression explicite** de u_n en fonction de n.
  De ce fait, on utilise très souvent le théorème sur **les suites monotones bornées** ou éventuellement le théorème d'encadrement.
- On utilise aussi la **récurrence**, puisque la suite est définie par récurrence.

Attention : le comportement de la suite n'est pas directement lié au comportement de la fonction : par exemple, ce n'est pas parce que la fonction f est croissante que la suite (u_n) va être croissante.
De même, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ne signifie en rien que $\lim\limits_{n\infty} u_n = +\infty$.

⋆ Représentation graphique

La première étape de l'étude consiste à représenter les termes de la suite.

Il faut toujours faire cette étude graphique même (surtout) si cela n'est pas demandé.

Pour cela, il faut représenter la courbe $\mathscr{C} : y = f(x)$ et la droite $\Delta : y = x$. Les points d'intersection sont les solutions de l'équation $x = f(x)$.

Ensuite, en partant de u_0 sur l'axe des abscisses,

- on le projette sur la courbe $\mathscr{C}$ (verticalement) de manière à calculer u_1. On est donc sur le point (u_0, u_1).
- On projette ce nouveau point sur Δ de manière à se mettre sur le point (u_1, u_1).
- On projette de nouveau sur la courbe $\mathscr{C}$ de manière à calculer u_2.
- Puis on retourne sur Δ pour obtenir le point (u_2, u_2).
- On réitère ce procédé (courbe $\mathscr{C}$ puis Δ).

On peut ainsi deviner la convergence et la monotonie de la suite. Il ne reste plus qu'à le démontrer.

! On commence verticalement jusqu'à la courbe de la fonction.

Les figures 1, 2 , 3 et 4 montrent le type de graphique obtenu.

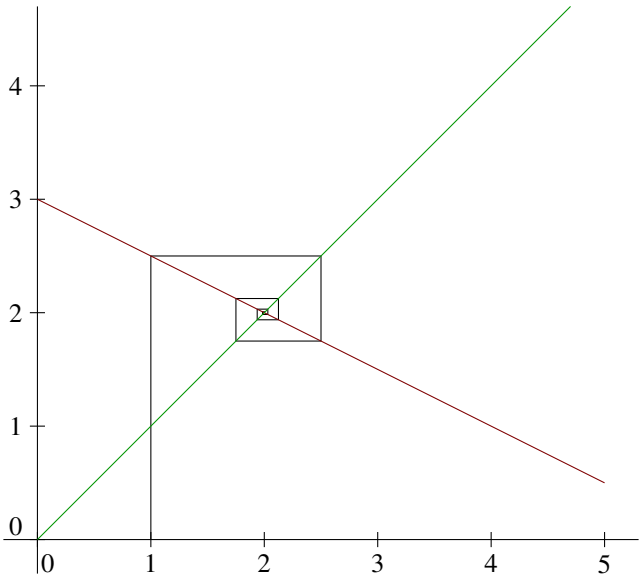


FIGURE 1 – Exemple de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + 3$.

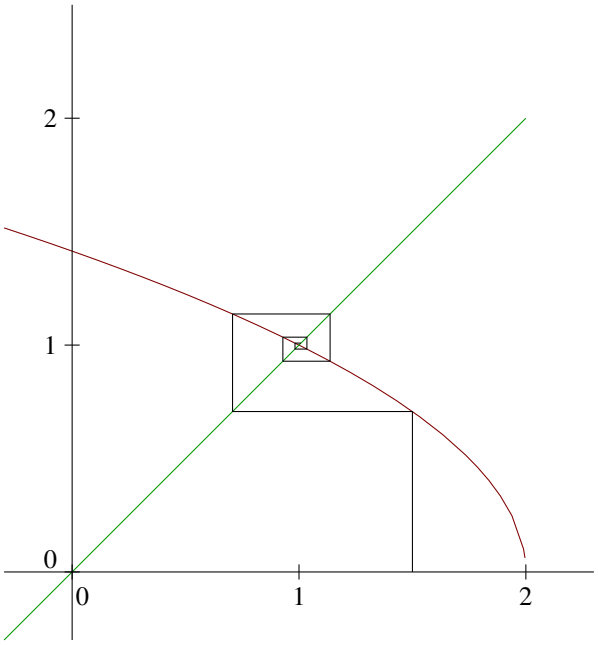


FIGURE 2 – Exemple de la suite définie par $u_0 = 1.5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

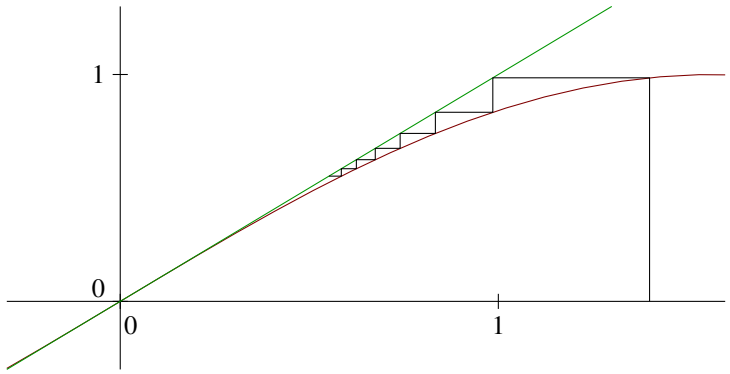


FIGURE 3 – Exemple de la suite définie par $u_0 = 1.5$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

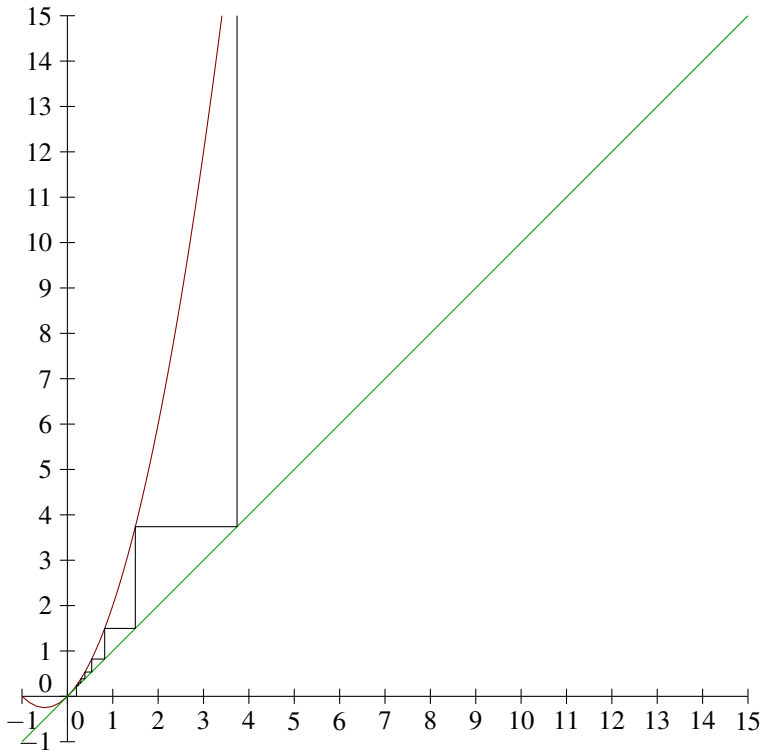


FIGURE 4 – Exemple de la suite définie par $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$

✯ Intervalle stable

La première étape consiste souvent à démontrer que la suite est bien définie. Pour cela, il s'agit de démontrer que la suite u_n ne « *sort pas* » de l'ensemble D. On utilise souvent un raisonnement par récurrence avec $\mathscr{P}(n) : u_n \in \mathscr{D}$. Pour l'hérédité, on est souvent amené à montrer que $u_n \in D \Rightarrow f(u_n) \in D$.

D'une manière générale, il est important de déterminer graphiquement les intervalles I, tels que : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$. (on dit alors que l'intervalle I est **stable** par f).

Pour déterminer un intervalle stable intéressante, il faut étudier le tableau de variation de la fonction f.

■ **Exemple .1** Pour la suite $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$ et $u_0 = 1.5$, il s'agit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 2$. En essayant de procéder par récurrence, on voit que cela est impossible en utilisant un énoncé du type : $u_n \leqslant 2$. En étudiant les variations de la fonction f on voit que l'intervalle $[0,2]$ est stable par f. On regarde donc plus attentivement le graphique et on voit qu'en fait $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$.

Démontrons cette propriété par récurrence. L'initialisation est évidente. Pour l'hérédité, supposons n fixé tel que $u_n \in [0,2]$, on voit alors clairement que $0 \leqslant \sqrt{2-u_n} \leqslant 2$. D'où la proposition et l'existence de la suite.

■

Il est important de déterminer un ensemble D le plus petit possible, tel que tous les termes de la suite vérifient $u_n \in D$ à partir d'un certain rang. Cela permettra, par exemple, d'utiliser la propriété des suites monotones et bornées pour prouver la convergence.

■ **Exemple .2** Dans l'exemple précédent, on voit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left[0, \sqrt{2}\right]$$

■

✯ Limite éventuelle, point fixe

Définition .1 On dit que l est un **point fixe** de f si $f(l) = l$.

Proposition .1 Si la fonction f est continue sur D, et si u_n converge vers une limite $l \in D$, alors u_n converge vers un point fixe.

Autrement dit la limite d'une suite itérée est toujours un point fixe.

Démonstration. En effet, si u_n converge vers l, alors $f(u_n)$ converge vers $f(l)$ par continuité, donc $l = f(l)$ et l est un point fixe. ■

À démontrer (en adaptant) à chaque utilisation. Ne pas oublier l'argument de continuité.

Il est donc important d'étudier les points fixes de la fonction f. Ce sont les intersections de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\Delta :\ y = x$. Éventuellement, on pourra étudier les variations de la fonction $g(x) = f(x) - x$ pour résoudre l'équation $(E) :\qquad f(x) = x$.

R Si f n'a pas de point fixe, la suite (u_n) ne peut pas converger. En particulier si la suite (u_n) est croissante, on obtient directement $\lim\limits_{n\infty} u_n = +\infty$.

! Ce n'est pas parce que la fonction a un point fixe que la suite converge vers ce point fixe.

■ **Exemple .3** Pour la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, et $u_{n+1} = e^{u_n}$. On voit facilement sur l'étude graphique que la suite est croissante et tends vers $+\infty$.

On étudie alors $g(x) = e^x - x$, ce qui permet de montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x > x$.

En particulier, l'équation $e^x = x$ n'a donc pas de solution, *i.e.* f n'a pas de points fixes. La suite (u_n) ne converge donc pas.

Cette même inégalité montre que la suite est croissante, puisque $u_{n+1} = e^{u_n} \geqslant 1 + u_n$.

Comme la suite est croissante et ne converge pas donc $\lim_{n\infty} u_n = +\infty$. ■

■ **Exemple .4** Pour la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. L'étude graphique montre que la suite est décroissante et converge vers 0.

On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Puis en étudiant $g(x) = \ln(1 + x) - x$, on obtient facilement : $\forall x > 0,\ 0 < \ln(1 + x) < x$, avec égalité si $x = 0$.

Ainsi :

- l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution : 0. Donc si (u_n) converge elle converge vers 0,
- Puisque $u_n \geqslant 0$, on peut remplacer x par u_n dans l'inégalité (ne pas oublier de vérifier ce point), ce qui donne $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc la suite est décroissante,
- La suite est minorée vers 0,
- En conclusion, elle converge vers 0.

■

R Ne pas oublier la relation $f(l) = l$ qui est souvent utile. En particulier si la fonction f est croissante, on a : Si $x \leqslant l$ alors $f(x) \leqslant l$, donc $]-\infty, l]$ est un intervalle stable par f.

✯ Monotonie

Il y a plusieurs techniques pour démontrer la monotonie :

directement en montrant par exemple que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$. Pour cela, on peut étudier le signe de $g(x) = f(x) - x$, que l'on a déjà étudié pour déterminer les points fixes (voir les exemples ci-dessus).
Attention aux intervalles : Si l'on a $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant x$, on ne peut remplacer x par u_n que si on a déjà démontré $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$!.

par récurrence en utilisant par exemple une proposition du type $P(n) :\ u_n \geqslant u_{n+1}$. C'est particulièrement utile si f est croissante. En effet, l'hérédité s'écrira par exemple : $u_n \geqslant u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$, *i.e.* $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$.
Attention : utiliser $\mathscr{P}(n) : (u_n)$ est croissante n'a pas de sens !

■ **Exemple .5** Pour la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$, et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
Déjà, on peut montrer rapidement que comme $[0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, on a par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0,1]$.
On peut ensuite montrer en étudiant la fonction définie par $g(x) = \sin(x) - x$ que $\forall x \in [0,1],\ \sin(x) \leqslant x$, avec égalité uniquement en 0.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi, la suite est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Le seul point fixe étant 0, on obtient donc que $\lim_{n\infty} u_n = 0$. ■

Dans cet exemple, c'est plus simple de faire un raisonnement direct. Si on procède par récurrence, on est obligé de faire la démonstration directe pour l'initialisation.

■ **Exemple .6** Pour la suite définie par $u_0 = 0$ et la relation : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$,
On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$.
On démontre donc par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
Déjà $u_2 = \sqrt{2} > u_1$, d'où l'initialisation. Pour l'hérédité, fixons $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_{n+1} \geqslant u_n$, on a alors $f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$, et donc $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$.
Ainsi, la suite est croissante. Comme la suite est croissante et majorée par 2, elle converge vers $l \in [0,2]$.
En regardant $f(l) = l$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$. ■

Dans cet exemple, c'est plus simple de raisonner par récurrence.

✯ Étude des suites extraites u_{2n} et u_{2n+1}

Dans certains cas (en particulier si f est décroissante), la suite n'est pas monotone, mais les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} le sont. On est donc amené à étudier ces deux suites.
Si elles convergent vers la même limite, alors la suite (u_n) converge, sinon la suite (u_n) ne converge pas.

On ne fait cela que si on constate sur l'étude graphique une convergence comme dans la figure 1.

■ **Exemple .7** Étudions par exemple la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.
Étude graphique voir la figure 2, on voit une monotonie différente pour les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
Intervalle : On a déjà vu $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$, et même $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, \sqrt{2}$.
Point fixe éventuel : En regardant l'équation $f(l) = l$, on peut aussi facilement voir qu'il n'y a qu'un point fixe qui est 1.
Monotonie : Il s'agit ensuite de démontrer que la suite extraite (u_{2n}) est décroissante. On doit donc comparer $u_{2n+2} = \sqrt{2 - \sqrt{2 - u_{2n}}}$ et u_{2n}. Si on procède directement, cela semble difficile. On choisit donc la récurrence : on utilise la proposition $P(n) :\ u_{2n+2} \leqslant u_{2n}$.
Au rang 0, elle s'écrit $\sqrt{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant \frac{3}{2}$. C'est un simple calcul :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant \frac{3}{2} &\iff 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{9}{4} && \text{car les deux termes sont positifs} \\
&\iff -\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ce qui est vrai.}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'initialisation $P(0)$ est vraie.
Pour l'hérédité : on suppose $u_{2n+2} \leqslant u_{2n}$ pour un n fixé, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} \geqslant f(u_{2n}) = u_{2n+1} && \text{car } f \text{ est décroissante,} \\
f(u_{2n+3}) = u_{2n+4} \leqslant f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité.
En conclusion la suite des rangs pairs (u_{2n})est décroissante.

En procédant de même, on obtient : la suite (u_{2n+1}) est croissante.

Convergence : On a alors que (u_{2n}) est une suite décroissante minorée, qui converge donc vers une limite l. Tandis que la suite des termes impairs (u_{2n+1}) convergent vers l'.

Il reste à démontrer que $l = l' = 1$.

Des relations :

$$u_{2n+2} = \sqrt{2-\sqrt{2-u_{2n}}} = f \circ f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2n+3} = \sqrt{2-\sqrt{2-u_{2n+1}}} = f \circ f(u_{2n+1}),$$

on déduit par continuité que les réels l et l' sont solutions de l'équation :

$$(E): \qquad l = \sqrt{2-\sqrt{2-l}} = f \circ f(l)$$

(ceux sont des points fixes de $f \circ f$).

Il reste à résoudre cette équation sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
(E) &\iff l^2 = 2-\sqrt{2-l} && \text{car } l \geqslant 0 \\
&\iff \sqrt{2-l} = 2-l^2 \\
&\iff 2-l = (2-l^2)^2 \text{ car } 2-l^2 \geqslant 0 \\
&\iff 2-l = 4-4l^2+l^4 \iff 2+l-4l^2+l^4 = 0.
\end{aligned}$$

L'équation admet deux racines évidentes 1 (d'une manière générale, un point fixe de f est toujours point fixe de $f \circ f$) et -2. On a alors après quelques calculs :

$$\begin{aligned}
(E) &\iff (l+2)(l-1)(l^2-l-1) = 0 \\
&\iff (l+2)(l-1)\left(l-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(l-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Il y a donc 4 solutions possibles : 1, -2, $\left(l-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, et $\left(l-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Seule 1 est dans l'intervalle $\left[0, \sqrt{2}\right]$.

R Il faut utiliser : $l \in \left[0, \sqrt{2}\right]$, et non $l \in [0,2]$. D'où l'intérêt de diminuer le plus possible l'intervalle stable.

Ainsi, la limite de la suite (u_{2n}) et de la suite (u_{2n+1}) est 1.

Au final, les deux suites extraites convergent vers 1 et donc la suite (u_n) converge vers 1. ■

Voici un résumés des techniques à retenir de cet exemple :

- si f est décroissante, on peut regarder les suites extraites de rangs pairs u_{2n} et impairs u_{2n+1}.
- On peut prouver facilement la monotonie de ces suites extraites par récurrence, car comme f est impaire, les inégalités se « *renversent deux fois* ».
- Une fois prouvé la convergence de ces deux suites extraites, il reste à prouver qu'elles convergent vers la même limite, sinon bien sûr u_n ne converge pas.
- Si ces suites extraites convergent, elles convergent vers les points fixe de $f \circ f$. On est donc amené à étudier les solutions de cette équation.
- Les points fixes de f sont solution ce cette équation, qui peut en avoir d'autres.

✯ Python

En informatique, l'itération est très facile : on initialise une variable à la première valeur et on utilise l'instruction `x=f(x)` dans une boucle `for`.

■ **Exemple .8** Voici un exemple de code :

```
def iter(f, n, u0):
    """
    entrée: f = fonction R -> R
            n = entier = rang du terme calculé
            u0 = réel = premier terme
    sortie: u = réel = n-ième terme de la suite définie par u0 et u_{n+1} = f (u_n).
```

```
    """
    u = u0
    for i in range(n):
        u = f(u)
    return(u)
```

Il faut bien sûr adapter à chaque fois. ■

✯ Cas des fonctions contractantes

Un cas important est celui d'une fonction où il existe $0 < k < 1$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

(on dit que la fonction f est **contractante**.)

On suppose que la fonction f admet un point fixe c. On a alors : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - c| \leqslant k^n |u_0 - c|.$$

En particulier, la suite u_n converge vers le point fixe c.

La démonstration se fait par récurrence, on pose donc $P(n)$: $|u_n - u| \leqslant k^n |u_0 - u|$. Pour $n = 0$, la proposition $P(0)$ est évidente. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie, on a alors :

$$|f(u_n) - f(c)| = |u_{n+1} - c| < k|u_n - c| \leqslant k^{n+1}|u_0 - c| \text{ d'après HR.}$$

D'où la proposition.

La conclusion provient de $0 < k < 1$ donc $k^n \to 0$

Ici encore tout est à adapter à l'exercice.

Enfin, on démontre souvent qu'une fonction est contractante en utilisant le **théorème des accroissements finis,** et une majoration de la dérivée du type : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant k$.

En effet, on écrit alors pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$, ainsi :

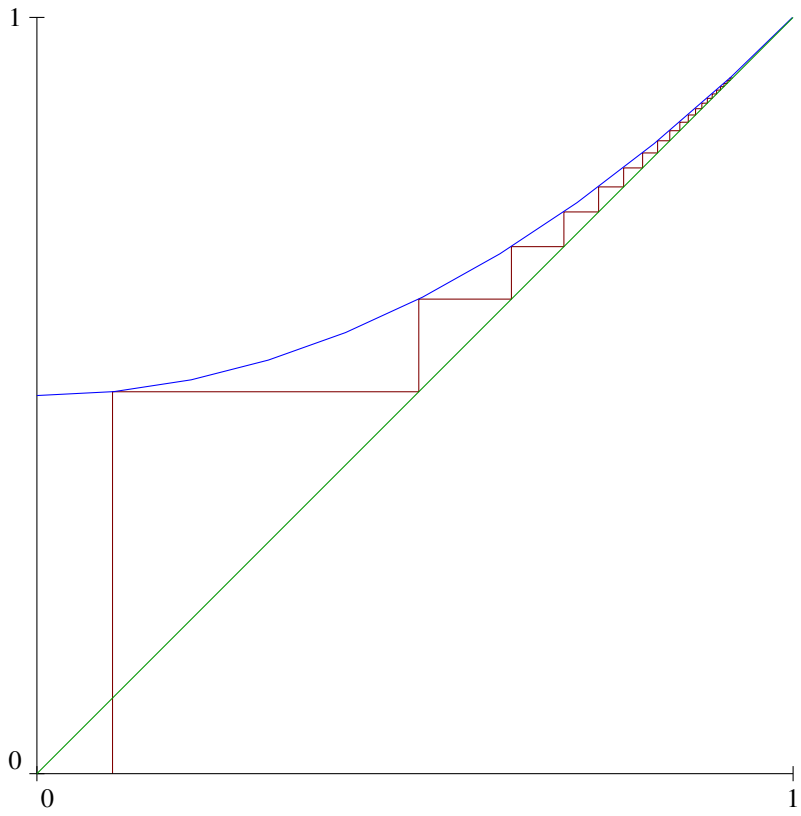
$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \leqslant k|x-y|.$$

Exercice 1 Étudier les suites suivantes :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1). \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 \in [-1,0] \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1). \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{1+3u_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}. \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 1 - u_n^2 \end{cases}$$

Correction : Pour les deux premiers, l'étude graphique donne :



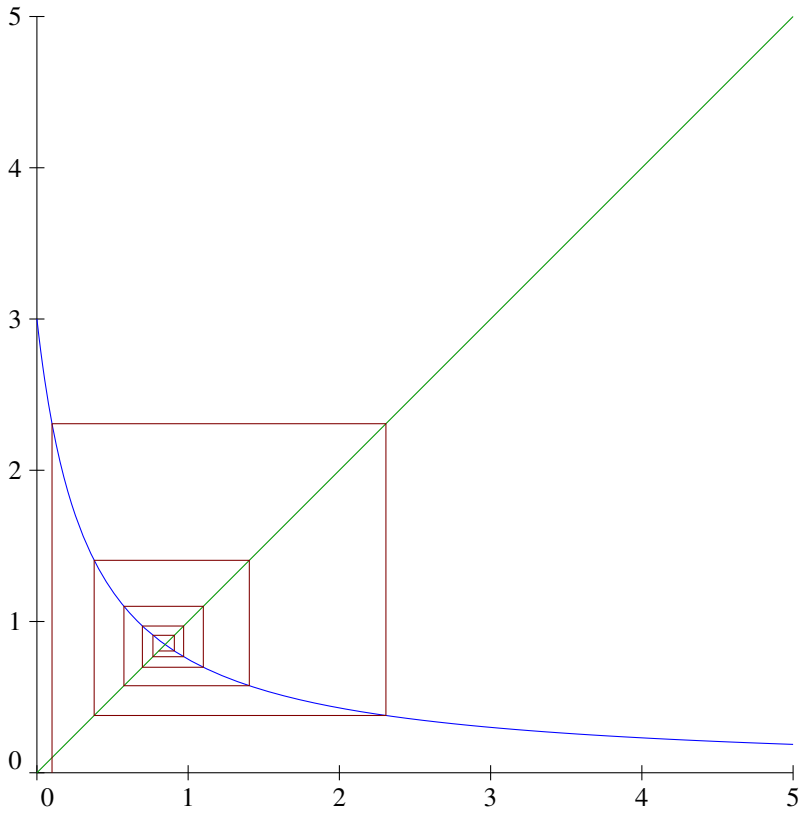
La suite semble croissante et tendre vers 1. On voit facilement, que $[0,1]$ est stable. Ensuite on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n =& \frac{1}{2}\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right)\\ =& \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Ainsi, la suite est croissante et majorée par 1. Elle converge vers une limite $l \in [0,1]$, telle que $l = \frac{1}{2}(l^2+1)$. Cela donne $l = 1$.

Si $u_0 \in [-1,0]$, on a $u_1 \in [0,1]$ et on est ramené au cas précédent.

Pour la deuxième l'étude graphique donne :



On voit facilement, que $\mathbb{R}^+$ est stable par f.

On cherche alors le point fixe :

$$x = \frac{3}{1+3x} \iff 3x^2 + x - 3 = 0$$

On résout l'équation :

$$\Delta = 1 + 36 = 37$$

L'unique point fixe positif est donc : $\alpha = \frac{-1+\sqrt{37}}{2}$.

On a facilement :

$$\forall x \geqslant 0,\ (x \geqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \alpha) \quad \text{et} \quad (x \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \alpha)$$

ainsi, si par exemple $u_0 \leqslant \alpha$, on a $u_1 \geqslant \alpha$, puis $u_2 \leqslant \alpha$, puis $u_3 \geqslant \alpha$, etc.

On calcule ensuite le signe pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} - u_n = f \circ f(u_n) - u_n$$

On calcule $f \circ f(x)$ pour $x \geqslant 0$:

$$f \circ f(x) = \frac{3}{1+3\frac{3}{1+3x}} = 3\frac{1+3x}{1+3x+9} = 3\frac{1+3x}{10+3x}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) - x &= 3\frac{1+3x}{10+3x} - x \\ &= \frac{3+9x-10x-3x^2}{10+3x} \\ &= \frac{3-x-3x^2}{10+3x} \end{aligned}$$

On retrouve de nouveau le tableau de signe :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f \circ f(x) - x$		$+$	0	$-$	

En prenant par exemple $u_0 \in [0, \alpha]$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \in [0, \alpha] \qquad \text{et} \qquad u_{2n+1} \in [\alpha, +\infty[$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} - u_{2n} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad u_{2n+3} - u_{2n+1} \leqslant 0$$

La suite des rangs pairs (u_{2n}) est donc croissante et majorée par α, tandis que la suite des rangs impairs (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par α.

Les deux suites convergent vers un point fixe de $f \circ f$, qui est donc solution de $\frac{3-x-3x^2}{10+3x}$ et donc les deux suites convergent vers α.

On en déduit :

$$\lim_{n\infty} u_n = \frac{-1+\sqrt{37}}{2}$$

Exercice 2 Étudier la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+2} - 3$ en fonction du premier terme u_0

Correction :

1. Si $u_0 < -2$, la suite n'est pas défine sur $\mathbb{N}$.
2. Posons $D = [-2;+\infty[$ et

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\sqrt{x+2} - 3 \end{array} \right.$$

   La fonction f est continue sur l'intervalle $[-2;+\infty[$ et dérivable sur $]-2;+\infty[$.
   Nous avons :

$$\forall x > -2,\ f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x+2}} > 0$$

   Elle est donc strictement croissante sur $[-2;+\infty[$. Elle y est continue et a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. (faire un tableau de variation).
   Finalement, f réalise une bijection de $[-2;+\infty[$ dans $[-3;+\infty[$. D n'est pas stable par f. Essayons de partitionner D de manière à faire apparaître des sous-domaines stables. (Dessin du graphique de f, attention, point de tangence, intuitions des comportements).
3. Résolvons $f(x) \geqslant x$ sur $[-2;+\infty[$. Nous avons pour $x \geqslant -2$:

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant x &\iff 2\sqrt{x+2} \geqslant x+3 \\ &\iff 4(x+2) \geqslant (x+3)^2 && \text{car } x \geqslant -2 \text{ donc } x+3 \geqslant 0 \\ &\iff x^2+2x+1 \leqslant 0 \\ &\iff (x+1)^2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

4. Décomposons D en $[-2;-1[\cup \{-1\} \cup]-1;+\infty[$.
   (a) Si $u_0 \in]-1;+\infty[$. $]-1;+\infty[$ est stable par f (cf. variations et valeurs de f). $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît strictement. Elle est majorée par -1. Elle converge vers un réel $\ell \geqslant -1$. f est continue sur $[-1;+\infty[$. Par conséquent, ℓ est un point fixe de f. Ainsi, $\ell = -1$.
   (b) Si $u_0 = -1$, f est constante à -1.
   (c) Si $u_0 \in [-2;-1[$, et *si on suppose que la suite existe,* on montre par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît. Mais comme la suite existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait à valeurs dans $[-2;u_0]$ et convergerait vers un réel $\ell \in [-2;u_0] \subset [-2;-1[$. f est continue sur $[-2;u_0]$. Elle l'est en particulier en ℓ, donc ℓ serait un point fixe de f. Le seul point fixe de f est -1. Cela est incompatible avec $\ell \in [-2;u_0]$. Pour $u_0 \in [-2;-1[$, la suite n'est pas définie sur $\mathbb{N}$: il existe un rang N_0 où $u_{N_0} < -2$ et donc u_{N_0+1} n'existe pas.

Études de suites implicites

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Le but de cette fiche est de dégager quelques méthodes pour l'étude des suites implicites.

Une suite implicite est une suite définie par une équation. Pour tout entier n, on a une équation qui dépend de n :

$$(E_n) \qquad \text{résoudre} \qquad f_n(x) = 0 \text{ sur l'intervalle } I_n,$$

Dans l'équation (E_n), la fonction f_n ou l'ensemble I_n (ou les deux) dépendent de n.
La suite (u_n) est alors définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est la solution de (E_n) sur I_n.

Bien entendu, il est clair qu'on ne peut pas déduire de la fonction f_n le comportement de la suite (u_n) : ce n'est pas parce que la fonction f_n est croissante que la suite (u_n) sera croissante, etc.

Dans le cas général, il n'existe pas d'expression de u_n en fonction de n. Il est donc inutile d'en chercher. D'où l'utilité du théorème sur les suites monotones et bornées

Il faut écrire en gros sur le brouillon la relation qui définit u_n, *i.e.* l'équation (E_n). Ne pas hésiter à l'écrire en remplaçant n par $n+1$, $n-1$, etc. Cette relation donne la réponse à beaucoup de questions.

Il n'y a évidemment aucun résultat à connaître pour l'étude de ce type de suites. Il s'agit simplement ici d'étudier « en parallèle » deux exemples pour extraire des méthodes.

⋆ Existence de la suite

La première question de ce type d'exercices consiste souvent à montrer que la suite est bien définie, *i.e.* que l'équation (E_n) admet une unique solution sur I_n.

Pour cela, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction **strictement** monotone. On calcule donc le tableau de variations de la fonction f_n et on montre qu'elle s'annule une et une seule fois dans l'intervalle I_n

■ **Exemple .9** On considère l'équation $(E_n) : x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. Montrer que (E_n) admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^+$.

On considère $n \geqslant 3$ et la fonction $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto x^n + x^2 + 2x - 1$. Cette fonction est continue et **strictement** croissante sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions continues strictement croissantes (on peut aussi dériver).

En calculant rapidement les limites, on obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0	x_n	$+\infty$
Variations de $f_n(x)$	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

Le tableau de variation montre que la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$, donc que l'équation (E_n) admet une unique solution pour tout $n \geqslant 3$. ■

■ **Exemple .10** Soit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, la fonction $f_n(x) = nx + \ln(x)$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On note x_n cette solution.

Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et **strictement** croissante comme somme de fonctions strictement croissantes.

On a de plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = -\infty$.

D'où le tableau de variations :

x	0		x_n		$+\infty$
Variations de $f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau de variation montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$. ■

Ce tableau de variations est important : il donne la réponse aux questions suivantes. Il faut le compléter au fur et à mesure que l'on obtient des informations sur la suite.

✯ Estimation plus précise de la suite

La seconde étape est souvent de préciser l'intervalle dans lequel la suite (u_n) évolue. En effet, puisqu'on ne sait rien sur la suite, on va utiliser le théorème sur la convergence des suites monotones. On commence donc par regarder si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a,b]$.

> On utilise le tableau de variations, il suffit de calculer $f_n(a)$ et $f_n(b)$ et de les placer dans le tableau.

■ **Exemple .11** Pour la suite définie par : $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$ et $x_n \in \mathbb{R}^+$. Montrons que $\forall n \geqslant 3$, $x_n \in [0,1]$.

Soit $n \geqslant 3$. Il s'agit de montrer que $x_n \leqslant 1$, or cela équivaut à $f_n(1) > 0$, puisque la fonction f_n est strictement croissante. Il suffit donc de constater que $f_n(1) = 3$. On complète donc le tableau de variations :

x	0		x_n		1		$+\infty$
Variations de $f_n(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

On obtient $\forall n \geqslant 3$, $f_n(1) > 0 = f_n(x_n)$ donc puisque f_n est strictement croissante on a au final $\forall n \geqslant 3$, $x_n \leqslant 1$, et donc $x_n \in [0,1]$. ■

■ **Exemple .12** Pour la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $nx_n + \ln(x_n) = 0$ et $x_n > 0$, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]0,1]$.

Il suffit de vérifier que $f_n(1) = n \geqslant 0$, donc comme f_n est strictement croissante, cela implique que $x_n \in]0,1]$.

On complète donc le tableau de variations :

x	0		x_n		1		$+\infty$
Variations de $f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ce qui montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]0,1]$. ■

✯ Étude graphique et numériques

Pour l'étude graphique, il s'agit de tracer la fonction f_n et de déterminer u_n comme l'intersection (dans l'intervalle I_n) de la courbe représentative de f_n et de l'axe horizontal. On utilise pour cela les fonctions du module `pylab` qui permettent de tracer des courbes.

Par exemple pour la suite définie par : $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$ et $x_n \in \mathbb{R}^+$, cela donne :

```python
from pylab import *
x = linspace(0,1,100) # 100 valeurs régulièrement espacées entre 0 et 1
for n in range(3,15) :
    y = x**n + x**2 +2*x -1
    plot(x,y)
show()
```

Pour l'étude numérique, il s'agit essentiellement de reprogrammer la dichotomie (dont le principe doit être bien compris) en l'appliquant directement à la fonction f. L'entrée est alors l'entier n et la sortie est la valeur approchée de u_n.

Toujours pour le même exemple :

```python
def resoudEn(n, eps):
    """
    entrée: n = entier
            eps = une précision
    sortie: un = valeur approchée de la solution de En à eps près.
    on calcule un par dichotomie
    """

    a = 0
    fa = a**n + a**2 + 2*a -1 # valeur de f(a)
    b = 1
    fb = b**n + b**2 + 2*b -1 # valeur de f(b)

    while (b-a>eps) :
        c = (a+b) / 2
        fc = c**n + c**2 + 2*c -1
        if fa*fc >0 :
            a = c
            fa = fc
        else :
            b = c
            fb = fc
    return(c)
```

On calcule alors les valeurs de u_n, et on en déduit le comportement de la suite u_n.

⋆ Monotonie

Pour montrer que la suite est monotone, il s'agit essentiellement de comparer u_n et u_{n+1}.

> Comme la fonction f_n est strictement monotone, cela revient à déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$. On applique donc la même méthode que pour comparer la suite (u_n) et un réel.

■ **Exemple .13** Pour la suite définie par : $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$ et $x_n \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la monotonie de la suite.

On calcule $f_n(x_{n+1})$ pour un entier $n \geqslant 3$ quelconque :

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1.$$

Puisqu'on ne connaît pas l'expression explicite de x_{n+1}, il est impossible de calculer directement cette valeur. Par contre, on sait que x_{n+1} est la solution de E_{n+1}, ce qui s'écrit :

$$x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1 = 0 \qquad i.e. \qquad x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1 = -x_{n+1}^{n+1}$$

En injectant cette relation, on obtient :

$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) &= x_{n+1}^n + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1 \\ &= x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = x_{n+1}^n(1 - x_{n+1}). \end{aligned}$$

Or, on a vu $x_{n+1} \in [0,1]$, ce qui donne $f_n(x_{n+1}) \geqslant 0$. On complète alors le tableau de variation :

x	0		x_n		x_{n+1}		1		$+\infty$
Variations de $f_n(x)$	-1	↗	0	↗	$\oplus$	↗	3	↗	$+\infty$

On a donc : $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_n(x_n)$ et comme la fonction f_n est strictement croissante, cela donne $x_{n+1} \geqslant x_n$. Comme n est quelconque, on en déduit : $\forall n \geqslant 3$, $x_{n+1} \geqslant x_n$ et donc la suite (x_n) est croissante. ■

■ **Exemple .14** Pour la suite définie par $nx_n + \ln(x_n) = 0$ et $x_n > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, comme f_n est strictement croissante, on a :

$$x_n \geqslant x_{n+1} \Longleftrightarrow f_n(x_n) = 0 \geqslant f_n(x_{n+1}).$$

On calcule donc $f_n(x_{n+1})$.

$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) =& nx_{n+1} + \ln(x_{n+1}) \\ =& nx_{n+1} - (n+1)x_{n+1} \quad \text{car} \quad (n+1)x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = 0 \\ =& -x_{n+1} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant x_{n+1}$ et la suite (x_n) est décroissante. ■

Comme on ne connaît pas l'expression de la suite (u_n), on ne peut pas calculer $f_n(u_{n+1})$, mais on peut avoir le signe en utilisant la relation (E_{n+1}).

✯ Convergence de la suite

Classiquement ici on utilise le théorème sur la convergence des suites monotones. On obtient l'existence d'une limite l et un encadrement (large) en passant à la limite.

R Il arrive parfois que l'on fasse un raisonnement par l'absurde : on suppose que la suite converge, si on aboutit à une contradiction c'est que la suite tend vers $\pm\infty$.

■ **Exemple .15** Pour la suite définie par $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$ et $x_n \in [0,1]$.
La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite $l \in [0,1]$. ■

■ **Exemple .16** Pour la suite définie par $nx_n + \ln(x_n) = 0$ et $x_n \in]0,1]$.
La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $l \in [0,1]$. ■

✯ Passage à la limite dans la relation (E_n)

Une fois que l'on a démontré que la suite converge, on peut passer à la limite dans la relation (E_n). Cela donne une relation vérifiée par l et donc la limite.

Attention à ce passage à la limite : souvent la limite de certains termes n'est pas claire.

■ **Exemple .17** Pour la suite définie par $x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$, qui converge vers $l \in [0,1]$.
Les termes $x_n^2 + 2x_n - 1$ tend clairement vers $l^2 + 2l - 1$. Par contre, x_n^n est une forme indéterminée : si x_n tend vers 1, la limite de x_n^n n'est pas claire. Pour contre-exemple, on peut regarder les limites de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \qquad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Il faut donc une estimation plus précise.
Dans cet exemple, on peut par exemple faire :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} > 0 \qquad \text{donc} \qquad \forall n \geqslant 3\ x_n \leqslant \frac{1}{2},$$

ce qui donne

$$\forall n \geqslant 3,\ x_n^n \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{et en particulier} \qquad x_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut donc passer à la limite dans la relation (E_n), ce qui donne la relation vérifiée par l : $l^2 + 2l - 1 = 0$.
On finit classiquement par déterminer les deux solutions de cette équation : $l = -1 + \sqrt{2}$ et $l = -1 - \sqrt{2}$. Enfin, comme on a $l \geqslant 0$ on en déduit que $l = -1 + \sqrt{2}$.
Au final, on a obtenu le résultat suivant $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1 + \sqrt{2}$. ■

■ **Exemple .18** Pour la suite définie par $nx_n + \ln(x_n) = 0$ et qui converge vers $l \in [0,1]$.
Les limites des termes $\ln(x_n)$ et nx_n ne sont pas évidentes si $l = 0$. On procède donc par l'absurde. Supposons par l'absurde que la limite l soit strictement positive.

On a dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(x_n) = \ln(l)$, puisque la fonction ln est continue en $l > 0$. Donc en passant à la limite dans l'égalité : $nx_n + \ln(x_n) = 0$, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = -\ln(l)$. Or si $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l > 0$, on a par les opérations élémentaires sur les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = +\infty$. D'où la contradiction.

Ainsi, $l = 0$. Au final, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

■

✯ **Calcul d'équivalent, ou de développement asymptotique de la suite** (u_n)

Pour avoir une idée de la vitesse de convergence de la suite, il n'y a qu'une méthode :

Écrire la relation (E_n) et l'utiliser.

Les pièges dans les dénombrements

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Dans cette fiche, on résume quelques points techniques sur les dénombrements et la théorie des probabilités.

✯ Le piège du *au moins* : compter deux fois le même élément

Considérons un jeu de 32 cartes. On demande combien de paires de cartes on peut réaliser contenant au moins un roi.

Le piège consiste à raisonner en disant :

- il y a 4 choix pour le roi,
- puis 31 choix pour la deuxième carte (tout sauf la première),
- donc 4×31 paires possibles.

L'erreur est ici que certaines paires sont comptées en double : celles constituées de deux rois. Par exemple, la paire $\{RP, RC\}$, est comptée une fois en choisissant d'abord le RP, puis le RC, une autre fois dans le sens inverse.

Lorsqu'on dénombre et que l'on raisonne par choix successifs, il est donc important de ne pas compter un élément deux fois.

Il y a deux bonnes manières de procéder pour éviter ce piège :

- **Découper l'ensemble considéré en deux ensembles disjoints** : Ici, il s'agit des ensembles A :*paires constituées exactement d'un roi* de cardinal 4×28, et B : *paires constituées exactement de deux rois* de cardinal $\binom{4}{2}$. Le résultat est alors $4 \times 28 + \binom{4}{2}$.
- **Procéder par complémentaire** : En considérant le complémentaire de l'ensemble cherché : $\overline{A}$:*paires constituées d'aucun roi*. Cet ensemble est de cardinal $\binom{28}{2}$. Le résultat est donc $\binom{32}{2} - \binom{28}{2}$.

■ **Exemple .19** Dans un jeu de 52 cartes, on tire des mains de 5 cartes. Combien y a-t-il de tirages constitués exactement de 1 roi et 1 cœur ? En comptant que le roi de cœur compte à la fois pour un cœur et pour un roi, c'est-à-dire qu'un tirage du type $\{RC, DP, 7T, 8P, 9T\}$ est considéré dans l'ensemble.

La bonne manière de procéder est de compter :

- tout d'abord les mains ne contenant pas le roi de cœur, soit $3 \times 12 \times \binom{36}{3}$,
- puis celle contenant le roi de cœur, soit $\binom{36}{4}$.
- Le résultat est la somme des deux.

■

✯ Lemme des bergers et applications aux dénombrements

Le lemme des bergers vient du fait que pour compter un troupeau de moutons on peut compter les têtes, ou bien compter les pattes et diviser par quatre.

La plupart du temps c'est cette version qui est utilisée :

Proposition .2 Soient E et F deux ensembles finis. On supose qu'il existe $f : E \to F$, surjective, telle que

$$\exists \lambda \in \mathbb{N},\ \forall y \in F,\ \mathrm{Card}\left(\left\{x \in E \middle| f(x) = y\right\}\right) = \lambda,$$

i.e. tous les éléments $y \in F$ ont exactement λ antécédents dans E.

Alors on a :

$$\mathrm{Card}(E) = \lambda\,\mathrm{Card}(F).$$

Dans l'exemple du troupeau de moutons, la fonction f est celle qui aux pattes (ensemble E) associe la tête (ensemble F). On a bien quatre pattes pour la même tête, donc la préimage d'une tête est de cardinal 4, et l'application est bien surjective, car à chaque tête correspond forcément 4 pattes. Ainsi, $\mathrm{Card}(E)$ le nombre de pattes est égal à $4\,\mathrm{Card}(F)$, c'est-à-dire 4 fois le nombre de têtes.

Démonstration. Pour $y \in F$, on rappelle que $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des antécédents de y :

$$f^{-1}(\{y\}) = \left\{x \in E \middle| f(x) = y\right\}$$

On voit que les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ forment un système complet de E :

$$E = \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\}) \text{ ie } E = \bigcup_{y\in F} \left\{x \in E \middle| f(x) = y\right\}, \text{ union disjointe.}$$

En effet,
- une inclusion est évidente : $\forall y \in F$, $f^{-1}(\{y\}) \subset E$.
- pour l'autre inclusion : si $x \in E$, alors $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$.
- pour montrer que la réunion est disjointe, on considère $y \neq y'$, et on suppose par l'absurde que $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) \neq \emptyset$. On a alors un élément $x \in f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\})$, qui vérifie $f(x) = y$ et $f(x) = y'$ en contradiction avec $y \neq y'$.

De l'égalité d'ensemble :

$$E = \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\}), \text{ union disjointe.}$$

on en déduit l'égalité des cardinaux :

$$\text{Card}(E) = \sum_{y\in F} \text{Card}\left(A_y\right).$$

Puis comme par hypothèse $\text{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \lambda$, on obtient : $\text{Card}(E) = \lambda\,\text{Card}(F)$. ■

La première application de ce lemme consiste à regarder l'application qui, à un arrangement de p éléments parmi n, associe une combinaison de p éléments parmi n, c'est-à-dire aux p éléments sans ordre :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \{\text{arrangements}\} & \to & \{\text{permutations}\} \\ (x_1,\ldots,x_p) & \mapsto & \{x_1,\ldots,x_p\} \end{array} \right.$$

Il est clair qu'à une permutation correspond $p!$ arrangements. On retrouve donc le résultat : $A_n^p = p!C_n^p$.

Le lemme des bergers permet ainsi de compter avec ordre puis d'enlever l'ordre pour obtenir le résultat. Dans ce contexte, on divise les cardinaux par le nombre d'antécédents.

■ **Exemple .20** Par exemple, supposons que l'on veuille compter le nombre de mains de 4 cartes d'un jeu de 32 cartes contenant une carte de chaque couleur (cœur, pique, trèfle, carreau).

Une méthode pour faire ce calcul consiste à supposer (temporairement) qu'on garde l'ordre des cartes, on obtient alors :
- Pour la première carte, 32 choix,
- puis 24 choix pour la deuxième carte,
- puis 16 choix pour la troisième,
- et 8 pour la dernière.

On a ici compté le nombre d'arrangements de 4 éléments vérifiant la propriété, le nombre de mains (donc sans ordre) est obtenu en divisant ce nombre par 4!, puisque l'application qui à un arrangements associe une combinaison est surjective, et vérifie que chaque combinaison est l'image de 4 arrangements.

Ainsi, on a le cardinal :

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{32\times 24\times 16\times 8}{4!} = \frac{(8\times 4)\times(8\times 3)\times(8\times 2)\times 8}{4!} = 8^4$$

■

On peut aussi faire ce calcul en utilisant un choix successif :
- Le choix de la hauteur de la carte de cœur, 8 choix,
- idem pour pique,
- idem pour trèfle,
- idem pour carreau.

On obtient bien le cardinal 8^4.

■ **Exemple .21** Autre exemple, on se demande comment ranger n boules dans 3 boîtes, de tel sorte que la boîte i contient k_i boules. Avec $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Une manière de procéder consiste à regarder l'application :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \{\text{permutations}\} & \to & \{\text{solutions du problème}\} \\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & \left\{\{x_1,\ldots,x_{k_1}\},\ \{x_{k_1+1},x_{k_1+2},\ldots,x_{k_1+k_2}\},\ \{x_{k_2+1},x_{k_1+2},\ldots,x_n\}\right\} \end{array} \right.$$

Autrement dit, à une permutation, on associe la solution obtenue en mettant dans la première boîte les k_1 premières, puis dans la deuxième les k_2 boules suivantes, et les dernières dans la boîte 3. Cette application est surjective, et une solution donnée est l'image de $k_1!k_2!k_3!$ permutations, qui correspondent aux différentes manières de ranger les k_1 premières boules, les k_2 suivantes et les dernières. Ainsi, l'ensemble cherché a pour cardinal $\dfrac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$.

■

On peut retrouver ce résultat en disant :
- on a $\binom{n}{k_1}$ choix pour la première boîte,
- puis $\binom{n-k_1}{k_2}$ choix pour la deuxième boîte,
- enfin aucun choix pour la dernière.

La nombre obtenu est alors :

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2!)} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$$

⋆ Ordre arbitraire

Considérons un lancer de deux dés indiscernables. L'univers est alors $[\![1,6]\!]^2$.

Ce résultat peut sembler étonnant puisqu'on a précisé que les dés sont indiscernables. On impose alors un *ordre* dans les dés en disant : celui-ci est le premier et celui-là est le second, comme si les dés étaient de couleurs différentes, alors qu'il est impossible de modéliser un événement comme *le premier dé vaut 1, et le deuxième 3*.

Que se passerait-il si l'on ne considérait pas cet ordre ? L'univers serait alors les parties à 1 ou 2 éléments de $[\![1,6]\!]$. Une partie à 1 élément comme $\{1\}$ correspondrait à l'événement *les deux dés valent 1*, soit la seule valeur lisible est 1, tandis qu'une partie à deux éléments comme $\{1,3\}$ correspondrait à l'événement *l'un des dés vaut 1, l'autre 3*, et donc deux valeurs seraient visibles : 1 et 3. Cette modélisation enlève tout ordre dans les dés.

En fait ces deux modélisations sont possibles. La seule différence, est que la probabilité sur l'ensemble $[\![1,6]\!]^2$ est clairement la probabilité uniforme, tandis que la probabilité sur l'ensemble des parties à 1 ou 2 éléments sera telle qu'un singleton aura pour probabilité $\frac{1}{36}$, tandis que les 15 parties à deux éléments auront pour probabilité $\frac{2}{36}$. Ainsi, il est plus simple d'imposer un ordre artificiel, en disant que le premier dé est simplement celui que l'on lit en premier. Cet ordre est différent à chaque lancer, mais il permet d'obtenir une probabilité uniforme.

⋆ Imposer un ordre dans un arrangement revient alors à une combinaison

Si l'on dénombre les n-liste $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'éléments de E telles que $a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_n$, alors cela revient à choisir les éléments $\left\{a_1, a_2, \ldots, a_n\right\}$ en « tas » (*i.e.* sans ordre), puis de les ordonner par ordre croissant.

Il y a ainsi autant de n-listes strictement croissante que de n-combinaison.

Étude des tirages sans remise

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

On considère une urne contenant N boules dont Np blanches et $N(1-p)$ sont noires ($p \in]0,1[$). On note de plus $q = 1-p$.
On tire n boules de l'urne successivement et sans remise de l'urne.
On note Y le nombre de blanches obtenues dans ces n tirages et X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si on obtient une blanche au tirage i. On a la relation $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Les tirages sans remise sont intéressants parce qu'ils font appels aux dénombrements pour le calcul des probabilités.
La variable Y suit une loi dite hypergéométrique. Cette loi n'est pas au programme de PCSI / PC mais son étude est possible avec le programme. Les résultats de cette fiche ne sont donc pas à connaître comme du cours, mais il faut savoir les retrouver.

✯ Loi du nombre de blanches

La variable Y contient le nombre de blanches, notons que $n-Y$ contient le nombre de noires. On fait n tirages donc $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Plus précisément, en regardant le nombre de blanches et de noirs tirées, on a les relations :

$\forall w \in \Omega,\ 0 \leqslant Y(\omega) \leqslant n$	c'est le nombre de B dans n tirages
$n - Y(\omega) \leqslant Nq$	le nombre de N tirées est inférieur au nombre de N dans l'urne
$Y(\omega) \leqslant Np$	le nombre de B tirées est inférieur au nombre de B dans l'urne

Ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{rlcl} \text{d'une part :} & 0 \leqslant Y(\omega) & \text{et} & n - Nq \leqslant Y(\omega) \\ \text{d'autre part :} & Y(\omega) \leqslant n & \text{et} & Y(\omega) \leqslant Np \end{array}$$

En regardant quelles sont les conditions les plus contraignantes, on obtient la relation :

L'univers image est :

$$Y(\Omega) = [\![\max(0, n-Nq), \min(n, Np)]\!].$$

R Cette dernière expression de l'univers image n'est pas demandée. En générale, on se contente de $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$, on ajoute ainsi des valeurs à l'univers image qui sont de probabilité nulle.

Pour déterminer la loi de Y, on considère $k \in [\![0,n]\!]$ et on procède par dénombrement. On considère que l'on tire n boules simultanément (en tas) parmi les N boules. Cela signifie donc que l'on oublie l'ordre des tirages puisque ce qui nous intéresse est le nombre de blanches que l'on a obtenu.
On a $\text{Card}(\Omega) = \binom{N}{n}$ et on munit cet univers de la probabilité uniforme.
Un tirage tel que $Y = k$ est déterminé par les choix successifs de :
- les k blanches, choisies comme une partie à k éléments des Np blanches
- les $n-k$ noires,choisies comme une partie à $n-k$ éléments des Nq noires.

Ainsi, $\text{Card}(Y = k) = \binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}$

Au final, on a obtenu la loi de Y

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ p(Y=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

R On retrouve bien que si $n-k > Nq$ ou si $k > Np$, la probabilité est 0.

⋆ Formule de Van Der Monde

La loi de Y donne une formule intéressante :

Formule de Van der Monde :

$$\binom{N}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}$$

Cette formule s'obtient en écrivant $\sum_{k=0}^{n} p(Y=k) = 1$.

En remplaçant Np par N_1 et Nq par N_2, on peut noter cette formule sous la forme :

$$\forall (N_1, N_2) \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![0, N_1+N_2]\!], \binom{N_1+N_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$$

⋆ Étude du tirage i

On revient maintenant à l'étude des tirages avec ordre. On cherche la probabilité d'avoir une blanche au tirage i, c'est à dire la loi de X_i.

Comme X_i est une VAR de Bernoulli, on doit donc calculer $p(X_i = 1)$, c'est-à-dire la probabilité d'avoir une blanche au tirage i.

On procède par dénombrements.

Modélisation 1 : on suppose que l'on tire (virtuellement) toutes les boules. Un tirage est alors entièrement déterminé par la place des Np blanches dans les N places.

On a donc pour univers les parties à Np éléments des N places, ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \binom{N}{Np}$.

Un tirage tel que $X_i = 1$ (ie blanche au tirage i) est déterminé par la place des $Np-1$ blanches dans les $N-1$ places (puisque l'on sait que l'on met une blanche dans la place i).

On obtient :

$$\begin{aligned} p(X_i = 1) &= \frac{\binom{N-1}{Np-1}}{\binom{N}{Np}} \\ &= \frac{(N-1)!}{N!}\frac{Np!}{(Np-1)!} \\ &= \frac{1}{N}Np = p. \end{aligned}$$

Modélisation 2 : on considère que les boules ont des numéros (les B et les N sont distinguables). On a donc pour univers une liste sans répétition des N boules de longueur n, ainsi $\text{Card}(\Omega) = A_N^n$.

Un tirage tel que $X_i = 1$ (ie blanche au tirage i) est déterminé par :

- le choix de la B au tirage i : Np choix.
- une $n-1$ liste sans répétition des $N-1$ autres éléments : A_{N-1}^{n-1}

On obtient de même :

$$\begin{aligned} p(X_i = 1) &= \frac{Np \times A_{N-1}^{n-1}}{A_N^n} \\ &= Np \times \frac{(N-1)!}{N!} \\ &= p \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu le résultat suivant :

Pour tout tirage i, la loi de X_i est :

$$p(X_i = 1) = p$$

Autrement dit $X_i \sim \mathscr{B}(p)$.

R Ce résultat peut sembler surprenant : il y a autant de chance d'avoir une blanche au tirage i et au tirage 1. Mathématiquement, cela s'explique par la probabilité uniforme : il y a autant de tirage avec la blanche au tirage 1 qu'au tirage i.

Notez comment on choisit l'univers : de manière à ce que son cardinal soit connu tout en permettant de bien représenter les évènements considérés.

Exercice 1 Refaire le calcul avec les univers suivants :

- Les boules ont des numéros mais on ne fait que i tirages,
- Les boules ont des numéros et on fait tous les N tirages.

✯ Espérance de Y

Classiquement, on en déduit l'espérance de Y :

Pour une variable Y donnant le nombre de B dans un tirages de n boules parmi N boules avec Np blanches, on a :

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np.$$

R C'est le même résultat (et la même démonstration) que pour un tirage avec remise.

✯ Étude des tirages (i, j)

On souhaite calculer : $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$, ie blanche au tirages i et j.
On procède de même : par probabilité uniforme sur un univers bien choisi.
Modélisation 1 : Un tirage est déterminé par la place des blanches.
Un tirage tel que $X_i = 1 \cap X_j = 1$ est déterminé par la place des $Np-2$ boules dans les $N-2$ tirages restants puisqu'on place une blanche en i et j.

$$\begin{aligned} p(X_i = 1 \cap X_j = 1) &= \frac{\binom{N-2}{Np-2}}{\binom{N}{Np}} \\ &= \frac{(N-2)!}{N!} \frac{(Np)!}{(Np-2)!} \\ &= p\frac{Np-1}{N-1} \end{aligned}$$

Modélisation 2 : Les boules sont numérotées.
Un tirage tel que $X_i = 1 \cap X_j = 1$ est déterminé par :

- Le choix de la boule blanche en i : Np choix.
- Le choix de la boule blanche en j : $Np-1$ choix.
- Une $n-2$ liste sans répétition des $N-2$ autres éléments ! A_{N-2}^{n-2}.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(X_i = 1 \cap X_j = 1) &= \frac{Np \times (Np-1) \times A_{N-2}^{n-2}}{A_N^n} \\ &= p\frac{Np-1}{N-1} \end{aligned}$$

R Il y a donc autant de tirages avec des blanches aux tirages i et j que de tirages avec des blanches aux tirage 1 et 2. Ainsi, $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ ne dépends ni de i ni de j. De plus de manière évidente : $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{Np}{N}\frac{(Np-1)}{N-1} = p\frac{Np-1}{N-1}$.

Au final :

Pour tout couple de tirages (i, j), avec $i \neq j$, on a :

$$p(X_i = 1 \cap X_j = 1) = p\frac{Np-1}{N-1}$$

✯ Covariance de (X_i, X_j) et variance de Y

On en déduit classiquement :

$$\begin{aligned} cov(X_i, X_j) &= E(X_iX_j) - E(X_j)E(X_j) \\ &= p\frac{Np-1}{N-1} - p^2 \end{aligned}$$

Puis, avec la formule sur la variance d'une somme :

$$\begin{aligned}V(Y) =& V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)\\ =& npq + 2\frac{n(n-1)}{2}\left(p\frac{Np-1}{N-1} - p^2\right)\\ =& npq\frac{N-n}{N-1}\end{aligned}$$

R Comme souvent, la formule de la covariance d'une somme se simplifie : le terme $cov(X_i, X_j)$ ne dépends ni de i, ni de j. Ainsi, c'est le nombre de termes multiplié par le terme.

Pour une variable Y donnant le nombre de B dans un tirages de n boules parmi N boules avec Np blanches, on a :

$$V(Y) = npq\frac{N-n}{N-1}$$

Égalités obtenues par dénombrements

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Dans cette fiche, on étudie comment les dénombrements permettent d'obtenir des relations d'égalité entre entiers.

Le principe est d'interpréter les quantités comme des cardinaux d'ensemble et ainsi de démontrer des relations en utilisant les opérations sur les cardinaux.

En général, on découpe un ensemble E dont on connaît le cardinal en une union disjointe :

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \qquad \text{union disjointe.}$$

On calcule alors le cardinal des ensembles E_i, et on obtient une relation du type :

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i).$$

✯ Coefficients binomiaux

On rappelle que le coefficient binomial $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ désigne le nombre de parties (de « tas ») à k éléments de $[\![1,n]\!]$. D'une manière générale, c'est le nombre de parties à à k éléments d'un ensemble à n éléments.

On retrouve alors les relations bien connues :

$\binom{n}{0} = 1$ car **il n'y a que l'ensemble vide** qui ne contient aucun élément

$\binom{n}{1} = n$ car **on compte les singletons**, *i.e.* les éléments

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ car il y a **autant de parties que de complémentaires** de parties

Partition des l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$

Considérons toujours un ensemble E de cardinal n, on note $P(E)$ l'ensemble de ses parties (on sait alors que $\mathrm{Card}(P(E)) = 2^n$). On note de plus, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k éléments. Par définition des coefficients binomiaux, on a : $\mathrm{Card}(P_k(E)) = \binom{n}{k}$. D'autre part, on a clairement :

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k(E) \qquad \text{union disjointe}$$

En effet, si on considère une partie X de E et que l'on note k son cardinal, alors $X \in P_k(E)$ et $k \in [\![0,n]\!]$. De plus, la relation $X \in P_k(E)$ donne $\mathrm{Card}(X) = k$ et donc l'entier k est unique (ce qui assure que l'union est disjointe).

On en déduit la relation bien connue :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

R Il faut vérifier que $k \in [\![0,n]\!]$. L'unicité de k assure que l'union est disjointe.
Rigoureusement il y a trois points à vérifier : les deux inclusions réciproques et l'unicité.

Relation de Pascal

Pour démontrer la relation de Pascal, on procède de même :

- On considère l'ensemble E des parties de $p+1$ éléments de $[\![1,n+1]\!]$. On sait alors que $\mathrm{Card}(E) = \binom{n+1}{p+1}$.
- On découpe E en deux parties disjointes :
  - l'ensemble des parties contenant $n+1$ notée E_1,
  - l'ensemble des parties ne contenant pas $n+1$ notée E_2.

- On a clairement : $E = E_1 \cup E_2$, union disjointe. Ainsi, $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2)$. On cherche le cardinal de E_1 et E_2.
- On a $\text{Card}(E_2) = \binom{n}{p+1}$ puisque l'on construit les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$ ne contenant pas $n+1$, donc les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n]\!]$.
- Une partie de E_1 est une partie de $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$ contenant $n+1$, elle est donc entièrement déterminé par la donnée d'une partie de p éléments de $[\![1, n]\!]$ auquel on ajoute l'élément $n+1$.

  Ainsi, $\text{Card}(E_1) = \binom{n}{p}$.

Ce qui donne la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

✯ Nombre de surjections

Un exercice classique consiste à dénombrer le nombre noté S_n^p de surjection d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments, avec $p \geqslant n$.

On peut alors obtenir la formule : $n^p = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p$ ainsi :

- On note Ω l'ensemble des applications de E dans F. Le cours assure alors que $\text{Card}(\Omega) = n^p$.
- On note alors pour $k \in [\![1, n]\!]$:

  $$\Omega_i = \left\{ f \in F^E \,\middle|\, \text{Card}(f(E)) = i \right\}$$

  Ω_i est donc l'ensemble des applications de E dans F dont l'ensemble image a i éléments (qui ont exactement i images / tel que i éléments de F exactement ont des antécédents).
- On a alors :

  $$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \qquad \text{union disjointe}$$

  En effet :
  - Clairement pour tout i, $\Omega_i \subset \Omega$. Par suite $\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \subset \Omega$.
  - Si $f \in \Omega$, alors en notant $i = \text{Card}(f(E))$, alors on a $f \in \Omega_i$ et $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi : $f \in \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$. Par suite : $\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \supset \Omega$.
  - Considérons i et j tels que $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$. On peut alors considérer $f \in \Omega_i \cap \Omega_j$, on a alors $\text{Card}(f(E)) = i = j$ en particulier, $i = j$.
    Donc $i \neq j \implies \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ et l'union est disjointe.
- Cherchons le cardinal de Ω_i. Un élément f de Ω_i est construit par choix successif :
  - Le choix de $f(E)$: c'est une partie à i éléments de F, ainsi on a : $\binom{n}{i}$ choix.
  - le choix d'une surjection de f dans $f(E)$. On a par définition S_i^p choix.

  On en déduit que $\text{Card}(\Omega_i) = \binom{n}{i} S_i^p$
- Au final, de la relation : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$, on obtient bien : $n^p = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p$

R Dans la démonstration précédente, un point souvent oublié et important est $i \in [\![1, n]\!]$. Même si on ne rentre pas dans le détail de la démonstration, il faut penser à indiquer dans quel intervalle varie l'indice.

Exercice 1 Calculer : S_p^p, S_1^p et S_2^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

✯ Formule de Van der Monde

Considérons N_1 et N_2 deux entiers, et $n \leqslant N_1 + N_2$, on a alors :

$$\binom{N_1 + N_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}$$

Ce que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\binom{N_1+N_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{n-k}\binom{N_2}{k}$$

ou encore :

$$\binom{N_1+N_2}{n} = \sum_{(k,l),\ k+l=n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{l}$$

R Il faut bien comprendre les deux formes. Dans les deux premières les sommes peuvent aller de 0 à n, mais aussi de 0 à N_1, voir de $n-N_2$ à n selon les cas.

La dernière forme consiste à prendre une somme double dont on ne garde qu'une partie (une ligne dans le tableau).

Pour démontrer cette relation, on procède par dénombrement. On note E l'ensemble des parties à n éléments de $[\![1,N_1+N_2]\!]$. Par définition, on sait que $\text{Card}(E) = \binom{N_1+N_2}{n}$.

On note aussi pour $k \in [\![0,n]\!]$, E_k l'ensemble des éléments X de E vérifiant $\text{Card}\,(X \cap [\![1,N_1]\!]) = k$. Ainsi, E_k est l'ensemble des parties à n éléments de $[\![1,N_1+N_2]\!]$ dont k éléments sont inférieur ou égal à N_1.

On a clairement :

$$E = \bigcup_{k=0}^{n} E_k \qquad \text{union disjointe.}$$

En effet, Soit X un élément de E, X est alors une partie de $[\![1,N_1+N_2]\!]$ à n éléments. Le nombre d'éléments de X inférieurs ou égaux à N_1 est un entier $k = \text{Card}\,(X \cap [\![1,N_1]\!])$, donc $X \in E_k$. L'entier k est alors unique et $k \in [\![0,n]\!]$.

De plus, un élément de E_k peut être construit par choix successifs :

- On choisit k éléments dans $[\![1,N_1]\!]$, soit $\binom{N_1}{k}$ choix,
- on choisit $n-k$ éléments dans $[\![N_1+1,N_2]\!]$, soit $\binom{N_2}{n-k}$ choix.

Au final : $\text{Card}(E_k) = \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$ et on déduit de $E = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$, la relation :

$$\binom{N_1+N_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$$

Exercice 2 Retrouver cette formule en utilisant les polynômes. Pour cela, considérer le terme de degré n dans la relation :

$$(1+X)^{N_1+N_2} = (1+X)^{N_1}(1+X)^{N_2}$$

Rang de la i-ième boule dans un tirage sans remise

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Soit une urne, qui contient N boules, dont r sont blanches, les autres étant noires. On tire dans cette urne sans remise.

Pour $i \in [\![1,r]\!]$, on note X_i le rang de la i-ième boule blanche. Ainsi, X_1 est le rang de la première boule blanche et X_r celui de la dernière. On note aussi B_k l'événement *obtenir une boule blanche au tirage* k, et N_k le contraire.

On cherche la loi de X_i pour $i \in [\![1,r]\!]$ fixé.

On va présenter plusieurs cas particuliers et plusieurs méthodes pour la cas général, ce qui va permettre de balayer plusieurs techniques en calcul des probabilités :

- la **formule des probabilités composées**, puisqu'on a une expérience en n étape, les conditions de l'expérience n dépendant de tous résultats aux tirages précédents.
- Les **dénombrements** : on fait des tirages sans remise donc un calcul par probabilité uniforme permet de s'affranchir de la dépendance au temps.
- Un **raisonnement semblable aux allumettes de Banach** : la i-ième boule arrive en position k mélange de l'information globale sur les tirages 1 à $k-1$ et une information sur le tirages k uniquement.

Univers image

On voit que $X_i(\Omega) = [\![i, N-r+i]\!]$, puisque :

- au mieux on ne tire que des blanches, et donc la i-ième arrive en position i,
- au pire on tire d'abord les $(N-r)$ noires, puis les i blanches, la i-ième arrive alors en position $N-r+i$,
- toutes les valeurs entières entre les deux sont possibles.

✯ Exemple : calcul de $p(X_i = i)$

Commençons par calculer $p(X_i = i)$, cet événement n'arrive que si on ne tire que des blanches dans les i premiers tirages. On a donc :a

$$(X_i = i) = (B_1 \cap B_2 \cap \dots B_i).$$

Et donc :

$$p(X_i = i) = p(B_1 \cap B_2 \cap \dots B_i).$$

En utilisant la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{aligned} p(X_i = i) =& p(B_1 \cap B_2 \cap \dots B_i). \\ =& p(B_1) p_{B_1}(B_2) p_{B_1 \cap B_2}(B_3) \dots p_{B_1 \cap B_2 \cap \dots B_{i-1}}(B_i) \end{aligned}$$

En effet, $B_1 \cap B_2 \cap \dots B_{i-1}$ est un événement possible.

Au tirage k, il y a $N+1-k$ boules dans l'urne. De plus, si on n'a tiré que des boules blanches avant, alors il y a donc $r+1-k$ boules blanches. On a donc :

$$\begin{aligned} p(X_i = i) =& p(B_1) p_{B_1}(B_2) p_{B_1 \cap B_2}(B_3) \dots p_{B_1 \cap B_2 \cap \dots B_{i-1}}(B_i) \\ =& \frac{r}{N} \frac{r-1}{N-1} \frac{r-2}{N-2} \dots \frac{r-i+1}{N+1-i} \\ =& \frac{r!}{(r-i)!} \frac{(N-i)!}{N!} \end{aligned}$$

✯ Exemple : loi de X_1

Autre exemple : le cas $i = 1$, *i.e.* on regarde le rang de la première boule blanche.

On a $X_1(\Omega) = [\![1, N-r+1]\!]$, soit donc $k \in [\![1, N-r+1]\!]$.

L'événement $X_1 = k$ signifie :

- les $k-1$ premiers tirages n'ont donné que des noires,
- puis on a eu la première blanche au k-ième tirage.

Cela s'écrit donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}p(X_1=k)=&p(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k)\\=&p(N_1)p_{N_1}(N_2)p_{N_1\cap N_2}(N_3)\dots p_{N_1\cap N_2\dots N_{k-2}}(N_{k-1})p_{N_1\cap N_2\dots N_{k-1}}(B_k),\end{aligned}$$

En effet, l'événement $N_1\cap N_2\dots N_{k-1}$ est possible.

Cela donne :

$$\begin{aligned}p(X_1=k)=&\frac{N-r}{N}\frac{N-r-1}{N-1}\dots\frac{N-r-k+2}{N+2-k}\frac{r}{N+1-k}\\=&r\times\frac{(N-r)!}{(N-r-k+1)!}\frac{(N-k)!}{N!}\\=&\frac{r!}{(r-1)!}\frac{(N-r)!}{N!}\frac{(N-k)!}{(N-r-k+1)!}\\=&\frac{1}{\binom{N}{r}}\binom{N-k}{r-1}=\frac{\binom{N-k}{r-1}}{\binom{N}{r}}\end{aligned}$$

✯ Méthode par dénombrements, boules discernables

Supposons que les boules sont (virtuellement) discernables. L'univers Ω est alors l'ensemble des permutations d'un ensemble à N éléments soit $\mathrm{Card}(\Omega)=N!$. On le munit de la probabilité uniforme, puisqu'aucun tirage ne semble plus probable qu'un autre.

Soit $k\in[\![i,N-r+i]\!]$, on va compter le nombre de tirages qui vérifient $X_i=k$.

Pour un tel tirage, il y a $i-1$ boules blanches dans les $k-1$ premières places, puis une boule blanche au tirage k, puis $r-i$ boules blanches dans les $N-k$ derniers tirages.

R Il est très utile de faire une « ligne des temps » représentant ce qui se passe à chaque tirage. On a ici une information à un tirage précis (ici B_k) et pour un ensemble de tirage ($i-1$ boules blanches dans les $k-1$ premières places).

Un tel tirage est déterminé par les choix successifs de :

- la place des $i-1$ boules blanches dans les $k-1$ premiers tirages, les boules noires sont alors aussi placées, soit $\binom{k-1}{i-1}$ choix,
- la place des $r-i$ boules blanches dans les $N-k$ derniers tirages, les boules noires sont alors aussi placées, soit $\binom{N-k}{r-i}$ choix,
- la position des r boules blanches parmi les places choisies (puisqu'elles sont supposées discernables), soit $r!$ choix,
- la position des $N-r$ boules noires (idem), soit $(N-r)!$ choix.

Cela donne :

$$\mathrm{Card}(X_i=k)=\binom{k-1}{i-1}\binom{N-k}{r-i}r!(N-r)!$$

D'où la probabilité :

$$\begin{aligned}p(X_i=k)=&\binom{k-1}{i-1}\binom{N-k}{r-i}\frac{r!(N-r)!}{N!}\\=&\frac{\binom{k-1}{i-1}\binom{N-k}{r-i}}{\binom{N}{r}}\end{aligned}$$

On a obtenu ainsi la loi de X_i :

$$\forall k\in X_i(\Omega),\ p(X_i=k)=\frac{\binom{k-1}{i-1}\binom{N-k}{r-i}}{\binom{N}{r}}$$

Exercice 1 Refaire ce calcul en changeant l'univers : puisqu'on s'intéresse à $p(X_i=k)$, on peut considérer que l'on ne fait que k tirages.

L'univers est alors un arrangement de longueur k des N boules que l'on suppose discernable.

Correction : On considère donc l'univers comme les arrangements de longueur k des N boules discernables. Ainsi :

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{N!}{(N-k)!}$$

Un tirage tel que : $X_i = k$ est donc un arrangement de longueur k tel que : il y a $i-1$ boules blanches dans les $k-1$ premières places, puis une boule blanche au tirage k.

On peut donc procéder par choix successifs :

- la place des $i-1$ boules blanches dans les $k-1$ premiers tirages, les boules noires sont alors aussi placées, soit $\binom{k-1}{i-1}$ choix, à noter que l'on a choisi i places pour les blanches puisque l'on sait qu'il y a une blanche au tirage k.
- On a ensuite i boules blanches à placer dans les places choisies. On crée donc un arrangement de longueur i des r boules blanches : $\frac{r!}{(r-i)!}$
- Ensuite, on a $k-i$ boules noires à placer dans les places choisies. On crée donc un arrangement de longueur $k-i$ des $N-r$ boules noires : $\frac{(N-r)!}{(N-r-k+i)!}$

Au final :

$$\text{Card}(X_i = k) = \binom{k-1}{i-1} \frac{r!}{(r-i)!} \frac{(N-r)!}{(N-r-k+i)!}$$

et donc on retrouve :

$$\begin{aligned} p(X_i = k) &= \frac{(N-k)!}{N!} \binom{k-1}{i-1} \frac{r!}{(r-i)!} \frac{(N-r)!}{(N-r-k+i)!} \\ &= \frac{r!(N-r)!}{N!} \binom{k-1}{i-1} \frac{(N-k)!}{(r-i)!(N-r-k+i)!} \\ &= \frac{\binom{k-1}{i-1}\binom{N-k}{r-i}}{\binom{N}{r}} \end{aligned}$$

✯ Méthode par dénombrements, boules indiscernables

On reprend le raisonnement précédent, mais on ne suppose plus les boules discernables. Un tirage est alors déterminé par la position des blanches, donc par un choix de r éléments dans $[\![1,N]\!]$, ainsi $\text{Card}(\Omega) = \binom{N}{r}$.

Soit $k \in [\![i, N-r+i]\!]$, on va compter le nombre de tirages qui vérifie $X_i = k$.

En reprenant le raisonnement précédent, on obtient qu'un tel tirage est déterminé par les choix successifs de :

- la place des $i-1$ boules blanches dans les $k-1$ premiers tirages, les boules noires sont alors aussi placées, soit $\binom{k-1}{i-1}$ choix,
- la place des $r-i$ boules blanches dans les $N-k$ derniers tirages, les boules noires sont alors aussi placées, soit $\binom{N-k}{r-i}$ choix,

Soit :

$$\text{Card}(X_i = k) = \binom{k-1}{i-1}\binom{N-k}{r-i}$$

D'où la probabilité :

$$p(X_i = k) = \frac{\binom{k-1}{i-1}\binom{N-k}{r-i}}{\binom{N}{r}}.$$

✯ Méthode par la loi hypergéométrique

Puisqu'on tire dans une urne sans remise, on a l'idée de poser, pour $j \in [\![1,N]\!]$, la var Y_j qui correspond au nombre de boules blanches dans les j premiers tirages.

On a vu alors que :

$$\forall k \in [\![1, j]\!],\ p(Y_j = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{j-k}}{\binom{N}{j}}$$

R Revoir la fiche sur les tirages sans remise pour ce point, Y_j suit une loi dite hypergéométrique qui n'est pas au programme. Pour le retrouver rapidement : choix des blanches parmi les blanches $\binom{r}{k}$, choix des noires parmi les noires $\binom{N-r}{j-k}$ divisé par le nombre de tirages $\binom{N}{j}$.

D'autre part, pour $k \in [\![i, N-r+i]\!]$, l'événement $X_i = k$ peut être décrit par :
- durant les $k-1$ premiers tirages, on a obtenu $i-1$ boules blanches,
- au tirage i on a obtenu une boule blanche.

Ainsi, on trouve :

$$(X_i = k) = \Big(\big(Y_{k-1} = i-1\big) \cap B_i\Big)$$

Cela donne

$$\begin{aligned} p(X_i = k) =& p\Big(\big(Y_{k-1} = i-1\big) \cap B_i\Big) \\ =& p\big(Y_{k-1} = i-1\big) p_{(Y_{k-1}=i-1)}\big(B_i\big) \end{aligned}$$

d'après le cours, on sait que :

$$p\big(Y_{k-1} = i-1\big) = \frac{\binom{r}{i-1}\binom{N-r}{k-i}}{\binom{N}{k-1}}.$$

Puis, au tirage k, on a $N+1-k$ boules dans l'urne, et si on a tiré $i-1$ boules blanches, il en reste $r-i+1$. Ainsi :

$$p_{(Y_{k-1}=i-1)}\big(B_i\big) = \frac{r-i+1}{N+1-k}.$$

$$\begin{aligned} p(X_i = k) =& \frac{\binom{r}{i-1}\binom{N-r}{k-i}}{\binom{N}{k-1}} \frac{r-i+1}{N+1-k} \\ =& \frac{r!}{(i-1)!(r-i+1)!} \frac{(N-r)!}{(N-r-k+i)!(k-i)!} \frac{(k-1)!(N-k+1)!}{N!} \frac{r-i+1}{N+1-k} \\ =& \frac{r!}{(i-1)!(r-i)!} \frac{(N-r)!}{(N-r-k+i)!(k-i)!} \frac{(k-1)!(N-k)!}{N!} \\ =& \frac{r!(N-r)!}{N!} \frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!} \frac{(N-k)!}{(r-i)!(N-k-r+i)!} \\ =& \frac{\binom{k-1}{i-1}\binom{N-k}{r-i}}{\binom{N}{r}}. \end{aligned}$$

Exercices de première année à savoir faire

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Expérience aléatoire en deux étapes

On a un dé et 6 urnes. L'urne numéro i contient i B et $6-i$ N.

On tire le dé. On note i sa valeur, et on tire alors plusieurs fois dans l'urne i avec remise.

1. Donner $p(B_1)$ et $p(B_2)$
2. Donner $p(B_1 \cap B_2)$.
3. B_1 et B_2 sont-ils des événements indépendants ?
4. Sachant B_1 quel est la probabilité que le dé ait donné la valeur i ?

On a clairement une expérience en deux étapes : choix de l'urne puis tirage dans cette urne.

1. Pour calculer la probabilité de B_1, on utilise la formule des probabilités totales avec le SCE associé à D :

$$\begin{aligned} p(B_1) &= \sum_{i=1}^{6} p(B_1 \cap D = i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} p(D=i) p_{D=i}(B_1) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\frac{i}{6} = \frac{1}{36}\frac{6\times 7}{2} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

   Remarquons que $p(B_1) = p(B_2)$.

2. On a avec la même technique :

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap B_2) &= \sum_{i=1}^{6} p(B_1 \cap B_2 \cap D = i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} p(D=i) p_{D=i}(B_1 \cap B_2) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\frac{i^2}{36} \\ &= \frac{1}{6^3}\frac{6\times 7\times 13}{6} \\ &= \frac{7\times 13}{6^3} = \frac{91}{216} \end{aligned}$$

3. Par contre B_1 et B_2 ne sont pas indépendants : même si les tirages se font avec remise, le résultat du première tirage donne de l'information sur le numéro du dé et donc sur le deuxième tirage. Précisément, on a :

$$\begin{aligned} p(B_1)p(B_2) &= \frac{49}{12^2} = \frac{49}{144} \\ \text{et} \qquad p(B_1 \cap B_2) &= \frac{91}{216} \end{aligned}$$

   Avec $\frac{49}{144} = 0.34 \neq 0.421 = \frac{91}{216}$ on obtient bien que les événements ne sont pas indépendants.
   Autre manière de voir :

$$p_{B_1}(B_2) = \frac{26}{36} > \frac{7}{12} = p(B_2)$$

   Ainsi, avoir une blanche au premier tirage indique que l'on va plutôt avoir une blanche au deuxième tirage.

4. C'est clairement la formule de Bayes : la conséquence est B_1 (résultat de la deuxième étape), on cherche la probabilité de la cause (le dé a donné i).
   On a :

$$\begin{aligned} p_{B_1}(D=i) &= \frac{p(D=i)p_{D=i}(B_1)}{p(B_1)} \\ &= \frac{\frac{i}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{2i}{7} \end{aligned}$$

✯ Loi de la somme de deux variables aléatoires

On considère $X \sim \mathscr{U}(n)$ et $Y \sim \mathscr{U}(n)$ indépendantes.
Donner la loi de $Z = X + Y$.

Déjà $Z(\Omega) = [\![2, 2n]\!]$.
Soit $k \in [\![2, 2n]\!]$, on commence par les probabilités totales avec le SCE associé à X :

$$\begin{aligned} p(Z = k) &= \sum_{l=1}^{n} p(Z = k \cap X = l) \\ &= \sum_{l=1}^{n} p(X + Y = k \cap X = l) \\ &= \sum_{l=1}^{n} p(Y = k - l \cap X = l) \end{aligned}$$

On a alors :

$$p(Y = k - l \cap X = l) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } 1 \leqslant l \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant k - l \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc :

$$p(Y = k - l \cap X = l) \neq 0 \iff \max(1, k - n) \leqslant l \leqslant \min(n, k - 1)$$

Ce qui donne une disjonction des cas pour savoir quel est le test qui est important.
Cas 1 : $k \leqslant n + 1$ (les petites valeurs de k), on a alors :

$$p(Y = k - l \cap X = l) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } 1 \leqslant l \leqslant k - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La somme précédente, ne contient que les premiers termes $l \in [\![1, k - 1]\!]$:

$$\begin{aligned} p(Z = k) &= \sum_{l=1}^{k-1} p(Y = k - l \cap X = l) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{(k-1)}{n^2}. \end{aligned}$$

Cas 2 : $k > n + 1$ (les grandes valeurs de k), on a alors :

$$p(Y = k - l \cap X = l) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } k - n \leqslant l \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La somme précédente, ne contient que les derniers termes $l \in [\![k - n, n]\!]$:

$$\begin{aligned} p(Z = k) &= \sum_{l=k-n}^{n} p(Y = k - l \cap X = l) \\ &= \sum_{l=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{2n - k + 1}{n^2}. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu la loi de Z :

$$p(Z = k) = \begin{cases} \frac{(k-1)}{n^2} & \text{pour } k \leqslant n + 1 \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{pour } k > n + 1 \end{cases}$$

✯ **Utilisation des variables de Bernoulli**

Soit N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons.
Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note X_i la variable caractéristique qui vaut 1 si on tire le jeton i. On note de plus Y la somme des valeurs des jetons obtenus.

1. Donner la loi de X_i pour toutes les valeurs de i.
2. Donner l'espérance de Y.
3. Donner la variance de Y.

1. On fixe $i \in [\![1,N]\!]$. On voit déjà que X_i est une variable de Bernoulli, on doit donc calculer $p(X_i = 1)$, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir le jeton i.
Méthode 1 : l'univers est l'ensemble des tirages de n éléments des N jetons. Un tirage qui contient le jeton i est caractérisé par la donnée d'une partie à $n-1$ éléments des $N-1$ jetons auquel on ajoute le jeton i. Ainsi :

$$p(X_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}$$

(c'est le nombre de jetons tirés sur le nombre de jetons total).
Méthode 2 : Clairement $p(X_i = 1)$ ne dépends pas de i puisque tous les jetons sont identiques. On note p cette probabilité et on sait que $E(X_i) = p$. Or on a la relation : $\sum_{i=1}^{N} X_i = n$ (c'est le nombre de jetons tirés). On a alors :

$$E(n) = n = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = Np.$$

D'où $p = \frac{n}{N}$
On a ainsi $X_i \sim \mathscr{B}\left(\frac{n}{N}\right)$.
2. Pour en déduire l'espérance et la variance de Y, on utilise la relation :

$$Y = \sum_{i=1}^{N} iX_i$$

R En aucun cas on ne calcule la loi de Y.

On a alors facilement l'espérance

$$\begin{aligned} E(Y) =& E\left(\sum_{i=1}^{N} iX_i\right) \\ =& \sum_{i=1}^{N} iE(X_i) = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N} i \\ =& \frac{n(N+1)}{2} \end{aligned}$$

3. Pour la variance, on a :

$$\begin{aligned} V(Y) =& V\left(\sum_{i=1}^{N} iX_i\right) \\ =& \sum_{i=1}^{N} i^2 V(X_i) + \sum_{(i,j)\in N^2,\ i\neq j} ijcov(X_i,X_j) \end{aligned}$$

Il faut donc calculer la covariance de (X_i,X_j).
Soit donc $i < j$, déjà $cov(X_i,X_j)$ ne dépends ni de i, ni de j, donc on sait d'avance que la somme double va se calculer relativement facilement.
On sait :

$$cov(X_i,X_j) = p(X_i = 1 \cap X_j = 1) - p(X_i = 1)p(X_j = 1)$$

Or on a, en utilisant des dénombrements (comme dans la méthode 1 ci-dessus) :

$$\begin{aligned} p(X_i = 1 \cap X_j = 1) =& \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} \\ =& \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} cov(X_i,X_j) =& \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \frac{n^2}{N^2} \\ =& \frac{n}{N}\left(\frac{n-1}{N-1} - \frac{n}{N}\right) \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} V(Y) =& \sum_{i=1}^{N} i^2 V(X_i) + \sum_{(i,j)\in N^2,\ i\neq j} cov(X_i,X_j) \\ =& \frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{n}{N}\left(\frac{n-1}{N-1}-\frac{n}{N}\right)\sum_{(i,j)\in N^2,\ i\neq j} ij \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer la dernière somme double :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in N^2,\ i\neq j} ij =& \sum_{(i,j)\in [\![1,N]\!]^2} ij - \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ =& \left(\sum_{i=1}^{N} i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ =& \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2 - \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \end{aligned}$$

En simplifiant le tout, on obtient le résultat.

Exercice 1 Finir le calcul.

Exercice 2 Refaire cet exercice (sauf la variance), mais cette fois avec une valeur n qui est aléatoire (exemple $n \sim \mathscr{U}(N)$.

✯ Loi du minimum de r variables uniformes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on considère r variables aléatoires indépendantes D_i pour $i \in [\![1,r]\!]$, avec $D_i \sim \mathscr{U}(n)$.

On note X le minimum de toutes les variables D_i :

$$X = \min_{i\in[\![1,r]\!]} D_i.$$

Donner la loi de X.

Déjà comme chaque variable D_i est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, on a clairement $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$, on commence par calculer la probabilité de l'évément : $X \geqslant k$, en effet :

$$(X \geqslant k) = (D_1 \geqslant k) \cap (D_2 \geqslant k) \cap \cdots \cap (D_r \geqslant k)$$

On en déduit par indépendance :

$$\begin{aligned} p(X \geqslant k) =& p(D_1 \geqslant k)p(D_2 \geqslant k)\dots p(D_r \geqslant k) \\ =& \left(\frac{(n-k+1)}{n}\right)^r \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], p(X \geqslant k) = \left(\frac{(n-k+1)}{n}\right)^r$$

Considérons maintenant $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a alors :

$$(X \geqslant k) = (X = k) \cup (X \geqslant k+1) \text{ union disjointe.}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(X=k) =& p(X \geqslant k) - p(X \geqslant k+1) \\ =& \left(\frac{(n-k+1)}{n}\right)^r - \left(\frac{(n-k)}{n}\right)^r \end{aligned}$$

Pour $k=n$, on a aussi :

$$(X=n) = X \geqslant n$$

et donc :

$$p(X=n) = \frac{1}{n^r}$$

La formule précédente est donc toujours vraie. On a obtenu :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ p(X=k) = \left(\frac{(n-k+1)}{n}\right)^r - \left(\frac{(n-k)}{n}\right)^r$$

R L'idée est que la fonction de répartition caractérise la loi. Attention aux termes extrémaux : ici $k<n$ est important pour utiliser la formule précédente.

✯ Deux lois usuelles en « cascade »

On dispose d'un dé et de 6 pièces. On lance le dé, on note D le nombre obtenu. On lance ensuite D pièces et on note X le nombre de faces obtenues.

Donner la loi et l'espérance de X.

Clairement : $D \sim \mathscr{U}(6)$, et connaissant la valeur d du dé $X \sim \mathscr{B}(d, \frac{1}{2})$.
On a donc : $X(\Omega) = [\![0,6]\!]$, et pour tout $k \in [\![0,6]\!]$,

$$\begin{aligned} p(X=k) =& \sum_{d=1}^{6} p(X=k \cap D=d) = \sum_{d=1}^{6} p_{D=d}(X=k)p(D=d) \\ =& \frac{1}{6}\sum_{d=1}^{6}\binom{d}{k}\frac{1}{2^d} \end{aligned}$$

L'expression de cette somme est difficile à calculer (on peut calculer sa valeur avec une calculatrice).

On calcule maintenant l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) =& \sum_{k=0}^{6} kp(X=k) \\ =& \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{6} k \sum_{d=1}^{6}\binom{d}{k}\frac{1}{2^d} \\ =& \frac{1}{6}\sum_{d=1}^{6}\frac{1}{2^d}\sum_{k=0}^{6} k\binom{d}{k} \\ =& \frac{1}{6}\sum_{d=1}^{6}\frac{1}{2^d}\sum_{k=1}^{d} k\binom{d}{k} \end{aligned}$$

Un exercice classique de première année donne :

$$\sum_{k=1}^{d} k\binom{d}{k} = d\sum_{k=1}^{d}\binom{d-1}{k-1} = d\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d-1}{k} = d2^{d-1}$$

On en déduit :

$$E(X) = \frac{1}{6}\sum_{d=1}^{6}\frac{d}{2} = \frac{1}{12}\frac{6\times 7}{2} = \frac{7}{4}$$

✯ Allumettes de Banach

Un joueur dispose de deux boîtes d'allumettes, qui contiennent initialement $n \in \mathbb{N}^*$ allumettes. L'une des boîtes est notée P l'autre F.

Il dispose aussi d'une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile est p avec $p \in]0,1[$. On note aussi $q = 1-p$.

Le joueur répète l'expérience :

- Lancer la pièce.
- Si il obtient pile il enlève une allumette de la boîte P, sinon de la boîte F.
- Il s'arrête lorsqu'il prend la dernière allumette de l'une des boîtes.

On note alors X le nombre d'allumettes qui restent dans l'autre boîte.

1. Déterminer l'univers image de X ?
2. Déterminer la loi de X.

1. Il est clair que $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
2. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. L'événement $X = k$ signifie que l'on a fait $n+(n-k)$ tirages ie $2n-k$ tirages.
   On écrit alors :
   $$(X=k) = \Big((X=k)\cap F_{2n-k}\Big) \cup \Big((X=k)\cap P_{2n-k}\Big) \qquad \text{union disjointe.}$$
   Ce qui revient à séparer deux cas :
   - la boîte pile est la première boîte vide (et la boîte face contient k allumettes.)
   - la boîte face est la première boîte vide (et la boîte pile contient k allumettes.)

   ou à utiliser le SCE (F_{2n-k}, P_{2n-k}).
   L'événement $((X=k)\cap P_{2n-k})$ signifie :
   - dans les $2n-k-1$ premiers tirages, on a eu : $n-1$ pile et $n-k$ face,
   - le tirage $2n-k$ a donné pile.

   On considère donc Y la variable qui compte le nombre de pile dans les $2n-k-1$ premiers tirages.
   On sait que $Y \sim \mathscr{B}(2n-k-1, p)$
   On peut écrire :
   $$(X=k)\cap P_{2n-k} = \Big(Y = n-1\Big)\cap P_{2n-k}$$
   ce qui donne :
   $$\begin{aligned} p\left((X=k)\cap P_{2n-k}\right) &= p\left(\Big(Y=n-1\Big)\cap P_{2n-k}\right) \\ &= p(Y=n-1)\,p\left(P_{2n-k}\right) && \text{par indépendance.} \\ &= \binom{2n-k-1}{n-1} p^{n-1} q^{n-k} p \\ &= \binom{2n-k-1}{n-1} p^n q^{n-k} \end{aligned}$$
   On fait le même raisonnement, qui donne (par symétrie) :
   $$p\left((X=k)\cap F_{2n-k}\right) = \binom{2n-k-1}{n-1} q^n p^{n-k}.$$
   Au final :
   $$p(X=k) = \binom{2n-k-1}{n-1}\left(p^n q^{n-k} + q^n p^{n-k}\right)$$

✯ Nombres de changements dans un tirages P / F

Pour $i \in [\![1,n+1]\!]$, on considère $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ des VAR indépendantes. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $Y_i = (X_i - X_{i+1})^2$.

1. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, donner la loi de Y_i.
2. On note $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, interpréter Z.
3. Donner $E(Z)$.
4. Donner $V(Z)$.

1. Déjà, Y_i est clairement une variable aléatoire de Bernouilli. Il faut donc calculer $p(Y_i = 1)$, or on a :

$$\begin{aligned}(Y_i = 1) =& (X_i \neq X_{i+1}) \\ =& (X_i = 1 \cap X_{i+1} = 0) \cup (X_i = 1 \cap X_{i+1} = 0) \qquad \text{union disjointe}\end{aligned}$$

   On a ainsi facilement :

$$p(Y_i = 1) = 2pq.$$

   et donc $Y_i \sim \mathscr{B}(2pq)$. En particulier, $E(Y_i) = 2pq$ et $V(Y_i) = 2pq(1-2pq)$.
2. La variable Z est le nombre de termes i tel que $Y_i = 1$, c'est donc le nombre de changement P / F dans les tirages 1 à $n+1$.
3. On a, par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = 2npq.$$

4. On utilise la variance d'une somme :

$$\begin{aligned}V(Z) =& V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\ =& \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(Y_i, Y_j)\end{aligned}$$

   On sait déjà calculer le premier terme.
   Pour le deuxième, commençons par le cas où $j > i+1$, on a alors :
   - Y_i est fonction de X_i et X_{i+1},
   - Y_j est fonction de X_j et X_{j+1},
   - les variables $(X_i, X_{i+1}, X_j, X_{j+1})$ sont indépendantes.
   - il n'y a pas de variables en commun puisque $\{i, i+1\} \cap \{j, j+1\} = \emptyset$.

   Ainsi, Y_i et Y_j sont indépendantes. En particulier $cov(Y_i, Y_j) = 0$.
   On a donc réduit la somme triangle à une somme simple :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(Y_i, Y_j) = \sum_{i=1}^{n-1} cov(Y_i, Y_{i+1})$$

   ! Attention aux indices, il faut $i < n$ sinon Y_{i+1} n'existe pas.
   Le plus simple est de construire le tableau $cov(Y_i, Y_j)$: les seuls termes nuls sont sur la diagonale, la première sur-diagonale, et la première sous-diagonale. On est dans le cas où $cov(Y_i, Y_j)$ ne dépends ni de i ni de j et est nul si j est « loin » de i.

   On calcule donc $cov(Y_i, Y_{i+1})$. On a :

$$cov(Y_i, Y_{i+1}) = E(Y_i Y_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1})$$

   On est donc ramené au calcul de :

$$\begin{aligned}E(Y_i Y_{i+1}) =& p(Y_i = 1 \cap Y_{i+1} = 1) \\ =& p(X_i = 1 \cap X_{i+1} = 0 \cap X_{i+2} = 1) + p(X_i = 0 \cap X_{i+1} = 1 \cap X_{i+2} = 0) \\ =& pqp + qpq = pq.\end{aligned}$$

   On finit alors le calcul :

$$cov(Y_i, Y_{i+1}) = pq - 4p^2q^2 = pq(1-4pq)$$

   Puis :

$$\sum_{i=1}^{n-1} cov(Y_i, Y_{i+1}) = (n-1)pq(1-4pq)$$

   Ensuite :

$$\begin{aligned}V(Z) =& n2pq(1-2pq) + 2(n-1)pq(1-4pq) \\ =& 2pq(n(1-2pq) + (n-1)(1-4pq) \\ =& 2pq(2n-1-2pq(3n-1))\end{aligned}$$

Couples et vecteurs de VARs, rappels et compléments

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Dans cette fiche, on reprend le cours de première année avec les complément de deuxième année (en particulier la covariance, le coefficient de corrélation linéaire et la formule de la variance d'une somme).

Généralités

Définition .2 — Couple de VARs. On appelle couple de variables aléatoires réelles deux var X et Y définies sur le même univers Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On construit alors l'application :

$$Z : \begin{cases} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & Z(w) = (X(w), Y(w)), \end{cases}$$

qui est donc une application de Ω dans $\mathbb{R}^2$ (une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$).

On note alors l'univers image $Z(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :

$$\forall (x,y) \in Z(\Omega), \quad \big[Z = (x,y)\big] = \Big[[X = x] \cap [Y = y]\Big].$$

R C'est une convention : l'univers image contient des valeurs qui ne sont l'image d'aucun événements.

■ **Exemple .22** Par exemple, si on tire des jetons, dans une urne portant des numéros 1 ou 2. on note X_1 le plus petit et X_2 le plus grand, on a alors $Z = (X_1, X_2)$ est une var. L'univers images est alors $Z(\Omega) = [\![1,2]\!]^2$. Néanmoins, le couple $(2,1)$ n'est l'image par Z d'aucune éventualité. ■

Dans cette fiche, on notera

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}.$$

On a de même que pour les var :

Proposition .3 — Système complet d'événements associé à un couple de VAR.
Les $n \times m$ événements $\Big(Z = (x_i, y_j)\Big)_{i \in [\![1,n]\!],\ j \in [\![1,m]\!]}$ forment un système complet d'événements.

✯ Loi conjointe

Définition .3 — Loi conjointe. La loi du couple (X,Y) ou loi conjointe est l'application :

$$\begin{cases} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ (x,y) & \mapsto & p\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = p\Big([Z = (x,y)]\Big) \end{cases}$$

On note :

$$p_{ij} = p(X = x_i \cap Y = y_i) = p(Z = (x_i, y_j)), \quad p_{i\bullet} = p(X = x_i) \text{ et } p_{\bullet j} = p(Y = y_j).$$

Lorsqu'il y a peu de valeurs, on représente ces nombres sous la forme d'une matrice de taille $n \times m$, l'élément (i,j) étant p_{ij}.

✯ lois marginales

Définition .4 — Lois marginales. Soit $Z = (X,Y)$ une couple de VAR, les VAR X et Y sont appelées **marginale** de Z. La loi de X est apellée **première loi marginale** du couple (X,Y), tandis que la loi de Y est la **seconde loi marginale**.

Le mot marginale signifie donc composante pour les probabilités.

Proposition .4 Soit (X,Y) un couple de var, on a alors :

- $\forall x \in X(\Omega),\ p(X=x) = \sum_{j=1}^{m} p(X=x \cap Y=y_j)$,
- $\forall y \in Y(\Omega),\ p(Y=y) = \sum_{i=1}^{n} p(X=x_i \cap Y=y)$.
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(X=x_i \cap Y=y_j) = 1$.

Cela signifie que :

- On obtient la loi de X en faisant pour chaque ligne la somme sur les colonnes.
- On obtient la loi de Y en faisant pour chaque colonne la somme sur les lignes.
- La somme sur toutes les cases du tableau fait 1.

Ce qui veut dire qu'on peut retrouver les lois marginales à partir de la loi du couple : pour trouver la loi de X, on fait la somme sur les colonnes et pour la loi de Y, on fait la somme sur les lignes.

Démonstration. C'est la formule des probabilités totales ! ■

Avec les différentes notations, on peut écrire :

$$\forall x \in X(\Omega),\ p(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} p(X=x \cap Y=y)$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ p(X=x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(X=x_i \cap Y=y_j)$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$$

De même :

$$\forall y \in Y(\Omega),\ p(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} p(Y=y \cap X=x)$$

$$\forall j \in [\![1,m]\!],\ p(Y=y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(Y=y_j \cap X=x_i)$$

$$\forall j \in [\![1,m]\!],\ p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

et :

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)} p\Big(X=x \cap Y=y\Big) = 1$$

$$\sum_{(i,j) \in [1,n]\times[1,m]} p\Big(X=x_i \cap Y=y_j\Big) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

■ **Exemple .23** Prenons l'exemple d'une urne contenant des boules numérotées de 1 à 4, et on tire deux boules successivement avec remise on note X_1 et X_2 la valeur de la première et de la deuxième boule, on construit alors le couple de VAR $Z = (X_1, \max(X_1,X_2)$.

On a facilement le tableau :

$X \backslash Y$	1	2	3	4	loi de X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
4	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
loi de Y	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

Attention, le contraire n'est par vrai : connaissant la loi des marginales, on ne peut pas déterminer la loi du couple. Tout simplement parce qu'il y a plus d'information dans le tableau que dans les « côtés » (les lois marginales)

✯ Lois conditionnelles

Définition .5 — Loi conditionnelle. Soit (X,Y) un couple de var on appelle loi conditionnelle de X sachant $Y=y_j$ l'application définie par :

$$\begin{cases} X(\Omega) & \mapsto & [0,1] \\ x_i & \to & p\big(X=x_i|Y=y_j\big)=\dfrac{p\big(Z=(x_i,y_j)\big)}{p\big(Y=y_j\big)}=\dfrac{p_{ij}}{p_j}. \end{cases}$$

De la même manière, on appelle, loi conditionnelle de Y sachant $X=x_i$ l'application définie par :

$$\begin{cases} Y(\Omega) & \mapsto & [0,1] \\ y_i & \to & p\big(Y=y_j|X=x_i\big)=\dfrac{p\big(Z=(x_i,y_j)\big)}{p\big(X=x_i\big)}=\dfrac{p_{ij}}{p_i}. \end{cases}$$

Théorème de transfert

✯ Loi de la somme de deux variables aléatoires à valeurs entières positives

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω. On suppose que X et Y sont à valeurs entières et positives. On note $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega)=[\![0,m]\!]$

On a alors : $(X+Y)(\Omega)=[\![0,n+m]\!]$. Considérons $k\in[\![0,n+m]\!]$ On utilise le système complet d'événement associé à X :

$$\begin{aligned} p(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} p(X=i\cap X+Y=k) \\ &= \sum_{i=0}^{n} p(X=i\cap Y=k-i). \end{aligned}$$

On cherche ensuite les termes qui sont non nuls. On a les contraintes :

$$\begin{aligned} p(X=i\cap Y=k-i)\neq 0 &\iff 0\leqslant i\leqslant n \text{ et } 0\leqslant k-i\leqslant m \\ &\iff 0\leqslant i\leqslant n \text{ et } k-m\leqslant i\leqslant k \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \forall k\in[\![0,n+m]\!],\ p(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} p(X=i\cap Y=k-i) \\ &= \sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)} p(X=i\cap Y=k-i) \end{aligned}$$

Ou de manière symétrique :

$$\begin{aligned} \forall k\in[\![0,n+m]\!],\ p(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{m} p(Y=j\cap X=k-j) \\ &= \sum_{j=\max(0,k-n)}^{\min(m,k)} p(Y=j\cap X=k-j) \end{aligned}$$

Exercice 1 On considère $X\sim\mathscr{U}(n)$ et $Y\sim\mathscr{U}(n)$ indépendantes. Donner la loi de $Z=X+Y$.

⋆ Théorème de transfert

Étant donné un couple de VAR (X,Y), et U une fonction $U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, on peut définir une VAR par $U(X,Y)=U\circ(X,Y)$. C'est la VAR image de (X,Y) par U.

Il est difficile de calculer la loi d'une composée à partir de la loi du couple. Le seul cas relativement simple est celui de la somme vue au dessus.

Néanmoins, il est facile de calculer l'espérance de la composée à partir de la loi du couple : il suffit de pondérer les valeurs possibles de $U(X,Y)$ par leur probabilité.

Proposition .5 — Théorème de transfert. Soit (X,Y) un couple de VAR, et U une fonction $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, alors on peut définir l'espérance de $U(X,Y)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}E\Big(U(X,Y)\Big)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}U(x_i,y_j)p\Big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\Big)\\&=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}U(x,y)p\Big([X=x]\cap[Y=y]\Big)\end{aligned}$$

Démonstration. Voir le poly de cours de première année, c'est la même démonstration que pour le cas d'une seule variable. ■

■ **Exemple .24** On lance deux dés cubiques, on note D_1 et D_2 les résultats. On considère X le minimum des deux dés. On veut calculer l'espérance de X, on a :

$$\begin{aligned}E(X)&=E\left(\min(D_1,D_2)\right)\\&=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\min(i,j)p(D_1=i\cap D_2=j) && \text{théorème de transfert}\\&=\frac{1}{36}\left(\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\min(i,j)\right)\end{aligned}$$

On est donc ramené à calculer une somme double basique, on a pas besoin de la loi de X (qui s'obtient en utilisant la fonction de répartition).

Pour finir les calculs :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\min(i,j)&=\sum_{i=1}^{6}\left(\sum_{j=1}^{i}j+\sum_{j=i+1}^{6}i\right)\\&=\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{i(i+1)}{2}+i(6-i)\right)\\&=\sum_{i=1}^{6}\left(-\frac{i^2}{2}+\frac{13}{2}i\right)\\&=-\frac{1}{2}\frac{6\times7\times(2\times6+1)}{6}+\frac{13}{2}\left(\frac{6\times7}{2}\right)\\&=\frac{13}{2}(-7+21)=7\times13.\end{aligned}$$

On obtient :

$$E(X)=\frac{7\times13}{36}.$$

■

⋆ Linéarité de l'espérance

Proposition .6 — Linéarité de l'espérance. Soit (X,Y) deux var, λ et μ deux réels quelconques, alors on a :

$$E(\lambda X+\mu Y)=\lambda E(X)+\mu E(Y)$$

On dit que l'espérance est linéaire.

Démonstration.

$$\begin{aligned}E(\lambda X+\mu Y) = & \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (\lambda x+\mu y)p(X=x\cap Y=y)\\ =&\lambda \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xp(X=x\cap Y=y)+\mu \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} yp(X=x\cap Y=y)\end{aligned}$$

Puis si on regarde le premier terme, on voit :

$$\begin{aligned}\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xp(X=x\cap Y=y) = & \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} xp(X=x\cap Y=y)\\ = & \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{y\in Y(\Omega)} p(X=x\cap Y=y)\\ = & \sum_{x\in X(\Omega)} xp(X=x)\\ =&E(X)\end{aligned}$$

De même pour le second terme, d'où :

$$E(\lambda X+\mu Y)=\lambda E(X)+\mu E(Y).$$

■

✯ Indépendance de deux variables aléatoires

Définition .6 — Indépendance de deux VARs. Soit X,Y deux var, on dit que X et Y sont indépendantes si :

$$\forall i\in [\![1,n]\!],\ \forall j\in [\![1,m]\!],\ p\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big)=p(X=x_i)p(Y=y_j).$$

Remarquons que dans ce cas :

$$\forall i\in [\![1,n]\!],\ p_{(Y=y_j)}\Big(X=x_i\Big)=p(X=x_i).$$

Proposition .7 Si les var X et Y sont indépendantes, on a :

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}E(XY) = & \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp((X=x)\cap(Y=y))\\ = & \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp(X=x)p(Y=y)\\ = & \sum_{x\in X(\Omega)} xp(X=x)\sum_{y\in Y(\Omega)} yp(Y=y)\\ =&E(X)E(Y).\end{aligned}$$

■

! La réciproque est fausse.

Proposition .8 Soient (X,Y) deux var indépendantes, et f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou plus généralement de $X(\Omega)$ (respectivement $Y(\Omega)$) dans $\mathbb{R}$).
Alors on a $(f(X),g(Y))$ sont des var indépendantes.

✯ Covariance

Définition .7 — Covariance. Soient (X,Y) un couple de var, on appelle covariance le nombre :

$$cov(X,Y) = E\Big([X-E(X)][Y-E(Y)]\Big)$$

Ce nombre est aussi égal à :

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Démonstration. La démonstration est la même que celle de l'égalité de Koenig-Huygens (que l'on retrouve dans le cas $X=Y$) :

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) =& E\Big([X-E(X)][Y-E(Y)]\Big)\\
=& E\Big(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)\Big)\\
=& E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y))\\
=& E(XY) - E(X)E(Y).
\end{aligned}$$

■

Proposition .9 On voit :

- $cov(X,Y) = cov(Y,X)$,
- $cov(\lambda X + X', Y) = \lambda cov(X,Y) + cov(X',Y)$, on a donc linéarité par rapport à X,
- $cov(X, Y+\mu Y') = cov(X,Y) + \mu cov(X,Y')$, de même pour Y
- $cov(X,X) = V(X) \geqslant 0$.
- $V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$.
- Si deux var sont indépendantes, la covariance est nulle.

Démonstration. Le premier point est évident.

Pour montrer la linéarité, on a :

$$\begin{aligned}
cov(\lambda X + X', Y) =& E\Big((\lambda X + X')Y\Big) - E\Big(\lambda X + X'\Big)E(Y)\\
=& E\Big(\lambda XY + X'Y\Big) - \lambda E(X)E(Y) + E(X')E(Y)\\
=& \lambda E\Big(XY\Big) + E\Big(X'Y\Big) - \lambda E(X)E(Y) + E(X')E(Y)\\
=& \lambda cov(X,Y) + cov(X',Y).
\end{aligned}$$

Puis $cov(X,X) = E(X^2) - (E(X))^2 = V(X)$.

Ensuite :

$$\begin{aligned}
V(X+Y) =& E((X+Y)^2) - \Big(E(X+Y)\Big)^2\\
=& E(X^2 + 2XY + Y^2) - \Big(E(X) + E(Y)\Big)^2\\
=& E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - \Big((E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2\Big)\\
=& E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2\Big(E(XY) - E(X)E(Y)\Big)\\
=& V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}
V(X+Y) =& cov(X+Y, X+Y)\\
=& cov(X, X+Y) + cov(Y, X+Y)\\
=& cov(X,X) + cov(Y,X) + cov(X,Y) + cov(Y,Y)\\
=& V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)
\end{aligned}$$

Pour deux var indépendantes, on a vu que $E(XY) = E(X)E(Y)$, donc la covariance est nulle.

■

⋆ Coefficient de régression linéaire

Proposition .10 — Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les couples de VARs. Soit (X,Y) un couple de var sur Ω d'écart type non nul (*i.e.* non certaine), on a alors :

$$|cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

Ainsi, la covariance de deux variables aléatoires est bornée par le produit de leur écart type.
L'égalité a lieu si et seulement si $\exists (a,b) \in \mathbb{R},\ Y = aX + b$. (sauf pour des valeurs de probabilités nulles).

Démonstration. Soit X et Y deux variables aléatoires, d'écart type non nul. Et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ V(\lambda X + Y) \geqslant 0$$

Ce qui s'écrit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2 V(X) + 2\lambda cov(X,Y) + V(Y) \geqslant 0$$

ou encore : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geqslant 0$.
Où $P(\lambda)$ est le polynôme : $\lambda^2 V(X) + 2\lambda cov(X,Y) + V(Y)$, de degré 2, car $V(X) \neq 0$.
On a donc :$\Delta \leqslant 0$ ce qui s'écrit :

$$4cov(X,Y)^2 - 4V(X)V(Y) \leqslant 0$$
$$\text{soit } cov(X,Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$$
$$\text{au final :} |cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

Ce qui est bien l'inégalité à laquelle on voulait arriver.
Regardons maintenant le cas d'égalité :

$$\begin{aligned}
|cov(X,Y)| = \sigma(X)\sigma(Y) &\iff \Delta = 0 \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R},\ P(\lambda_0) = 0 \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R},\ V(\lambda_0 X + Y) = 0 \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R},\ \lambda_0 X + Y \text{ est une var quasi certaine} \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R}, p(\lambda_0 X + Y = \mu) = 1. \\
&\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R},\ Y = aX + b.
\end{aligned}$$

Les deux dernières équivalence sont à comprendre dans le sens sauf sur un ensemble de probabilité nulle.

■

✎ Par exemple cela permet de montrer que si X est proche d'une constante (écart-type petit), alors quelque soit Y, X et Y ont tendance à être décoréllée, comme si X et Y étaient indépendante.

Définition .8 — VAR corrélées VAR décorélées. Soient (X,Y) deux var, on dit que X et Y sont corrélées si $cov(X,Y) \neq 0$, dans le cas contraire elles sont dite décoréllées (ou non corrélées).
On appelle coefficient de corrélation, le nombre :

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

! $\rho(X,Y)$ n'est défini que si X et Y sont d'écart type non nul.

✎ $\rho(X,Y)$ exprime la dépendance des deux variables, ramené à leur écart type. C'est un nombre compris entre -1 et 1, qui vaut 0 si les var sont indépendante (minimum de dépendance), et qui vaut 1 ou -1 ssi $\exists a,b,\ X = aY + b$, autrement dit dans le cas d'un maximum de dépendance.

✎ Si $\rho(X,Y) = 1$, alors on peut montrer que l'on a la relation :

$$X = \frac{cov(X,Y)}{V(Y)}(Y - E(Y)) + E(X)$$

C'est cette relation qui sert à faire passer une droite par un nuage de points.

✯ Vecteurs de variables aléatoires

Définition .9 — Vecteur aléatoire. On considère $(X_1,\dots X_n)$, n var sur un même univers Ω. On dit alors que $(X_1,\dots X_n)$ est un vecteur aléatoire sur Ω).

Sa loi conjointe est donné par :

$$\begin{cases} X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,\dots,x_n) & \mapsto & p\Big((X_1=x_1)\cap(X_2=x_2)\cap(X_3=x_3)\cdots\cap(X_n=x_n)\Big) \end{cases}$$

On appelle lois marginales les lois de $X_1,\dots,X_n$.

Proposition .11 — Espérance de la somme. On considère un vecteur aléatoire $(X_1,\dots X_n)$, on a alors :

$$E(X_1+X_2+\dots X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$$

R D'une manière générale, l'espérance est linéaire, ainsi si (λ_i) sont des réels, on a :

$$E\Big(\sum_i \lambda_i X_i\Big)=\sum_i \lambda_i E(X_i)$$

Définition .10 Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un vecteur aléatoire. On dit que les variables $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont mutuellement indépendantes (ou simplement indépendantes) si et seulement si :

$$\forall(x_1,x_2\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\dots X_n(\Omega),$$
$$p\Big((X_1=x_1)\cap(X_2=x_2)\cap\cdots\cap(X_n=x_n)\Big)=p(X_1=x_1)p(X_2=x_2)\dots p(X_n=x_n)$$

Proposition .12 Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables mutuellement indépendantes.

Alors :

- Soit $i_1,\dots,i_p\in[\![1,n]\!]$, alors les var $(X_{i_1},\dots,X_{i_p})$ sont indépendantes, *i.e. lorsqu'on choisit des variables aléatoires dans un vecteur de var indépendantes alors les var obtenues sont indépendantes*
- Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur :

$$X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times\dots X_p(\Omega),\quad \text{et}\quad X_{p+1}(\Omega)\times X_{p+2}(\Omega)\times\dots X_n(\Omega),$$

  alors $f(X_1,X_2\dots,X_p)$ et $g(X_{p+1},X_{p+2},\dots X_n)$ sont deux var indépendantes, ainsi *si on crée une var composée avec les premières var et une autre var composé avec les dernières composantes, alors on obtient deux var indépendantes*
- Si $f_1,\dots f_p$ sont des fonctions définies sur $X_i(\Omega)$, alors on a :

$$f_1(X_i),\ f_2(X_2),\dots,f_p(X_p) \text{ sont indépendantes.}$$

On obtient en particulier que si des var sont mutuellement indépendantes, elles sont indépendantes deux à deux.

Lorsqu'on utilise la propriété sur les fonctions des VAR, il est important de dire (par exemple) :

- f est une fonction des VAR X_1 et X_3
- g est une fonction des VAR X_2,X_4 et X_5.
- on a $\{1,3\}\cap\{2,4,5\}=\emptyset$.

donc $f(X_1,X_3)$ et $g(X_2,X_4,X_5)$ sont indépendantes. **Attention :** ce n'est plus vrai si il y a des variables « communes » aux deux fonctions.

✯ Variance d'une somme de n variables aléatoires

Proposition .13 — Variance de la somme cas de VAR indépendantes. Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables mutuellement indépendantes.

alors :

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$$

Démonstration. Par récurrence. ■

Proposition .14 — Variance de la somme cas général. Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires réelles.
On a alors :

$$\begin{aligned} V(X_1+X_2) &= V(X_1)+2cov(X_1,X_2)+V(X_2) \\ V(X_1+X_2+X_3) &= V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+2cov(X_1,X_2)+2cov(X_1,X_3)+2cov(X_2,X_3) \end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$\begin{aligned} V(X_1+\cdots+X_n) &= V(X_i)+V(X_2)+\dots V(X_n)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(X_i,X_j) \\ &= V(X_i)+V(X_2)+\dots V(X_n)+\sum_{i\neq j} cov(X_i,X_j) \\ &= \sum_{(i,j)} cov(X_i,X_j) \end{aligned}$$

Cette formule signifie que pour calculer la variance d'une somme, il faut faire la somme des variance, et de tous les « *double produit* » de la forme $cov(X_i,X_j)$ possible.
Il faut représenter les valeurs de $cov(X_i,X_j)$ dans un tableau. En particulier, repérer les termes non nuls.
Il faut faire le lien avec la formule :

$$\left(\sum x_i\right)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = \sum_{(i,j)} x_i x_j$$

Il faut compter le nombre de terme : dans $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(X_i,X_j)$ il y a $\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}$ termes, dans $\sum_{1\neq j} cov(X_i,X_j)$ il y a n^2-n termes.

En pratique, on a souvent un des cas particuliers :
- beaucoup de termes sont nuls.
- $cov(X_i,X_j)$ indépendant de i et de j, le tirage i agit de la même manière sur tous les tirages suivants. La somme devenant alors le nombre de termes multipliés par la valeur.
- $cov(X_i,X_j)$ est nul si j est « loin » de i, (par exemple si $j\neq i+1$). C'est le cas où le tirage i n'influe que sur le tirage suivant.

Démonstration. C'est simplement la linéarité de la covariance :

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) = cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n cov\left(X_j, \sum_{j=1}^n X_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n cov(X_i,X_j). \end{aligned}$$

On fait donc la somme des éléments du tableau $(cov(X_i,X_j))$. On peut voir les termes diagonaux (les variances) et le fait que le tableau est symétrique.

La relation :

$$V(X_1+\cdots+X_n) = V(X_i)+V(X_2)+\dots V(X_n)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(X_i,X_j)$$

signifie : pour faire la somme des éléments du tableau, on somme les éléments diagonaux, puis deux fois les éléments situés strictement au dessus de la diagonale. ■

Simulation de variables aléatoires et de tirages

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Créer un nombre aléatoire

Créer un nombre aléatoire est une chose impossible pour un ordinateur qui ne peut par définition que suivre des instructions données à l'avance.

Il existe tout de même des techniques pour générer des nombres **pseudo-aléatoires** sous la forme d'une fonction `rand` qui renvoie un nombre aléatoire U de $[0,1[$. Le nombre U obtenu suit alors une loi uniforme sur $[0,1[$, loi qui n'est pas au programme en PCSI car son univers image n'est pas de cardinal fini, mais qui est vue rapidement en terminale.

Ce nombre U correspond à l'idée intuitive d'un nombre au hasard dans le segment $[0,1[$.

Ce nombre n'est que pseudo-aléatoire puisque par définition, les valeurs renvoyées par la machine sont quantifiées : il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles sur $[0,1]$ pour un ordinateur. La fonction `rand` ne renvoie donc qu'un nombre fini de valeurs. Comme ce nombre est très grand, on considère qu'il s'agit vraiment d'une loi uniforme.

La propriété intéressante est : $\forall (a,b) \in [0,1]^2$, $p(a \leqslant U < b) = b-a$. Autrement dit la propriété que ce nombre soit entre a et b est proportionnelle à la longueur $[a,b]$.

Comme pour toute variable continue, on a $\forall x \in [0,1]$, $p(U=x)=0$. Autrement dit, la probabilité qu'elle soit égale à un nombre fixé d'avance est nulle. En particulier, on ne se préoccupera pas des cas où $U=0$ et $U=1$, impossible en pratique.

Le but de cette fiche est de voir comment utiliser cette fonction `rand` pour simuler les lois usuelles.

R La seule fonction à connaître est `rand`.

✯ Simulation de lois uniformes

Proposition .15 Si $U \sim \mathscr{U}([0,1[)$, alors :

$$\begin{aligned}
\text{la VAR } X = (b-a)U + a \text{ vérifie } X &\sim \mathscr{U}([a,b[) \\
\text{la VAR } X = \lfloor (n+1)U \rfloor \text{ vérifie } X &\sim \mathscr{U}([\![0,n]\!]) \\
\text{la VAR } X = \lfloor (b-a+1)U \rfloor + a \text{ vérifie } X &\sim \mathscr{U}([\![a,b]\!]) \\
\text{en particulier, la VAR } X = \lfloor nU \rfloor + 1 \text{ vérifie } X &\sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])
\end{aligned}$$

En conséquence :

- l'instruction `X=rand()*(b-a)+a` permet de simuler une loi uniforme sur $[a,b[$
- l'instruction `X=floor(rand()*(n+1))` permet de simuler une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$
- l'instruction `X=floor(rand()*(b-a+1)) +a` permet de simuler une loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$
- l'instruction `X=floor(rand()*n) +1` permet de simuler une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$

Démonstration. Considérons $X = (b-a)U + a$, on a alors :

$$0 \leqslant U < 1 \qquad \text{donc} \qquad 0 \leqslant (b-a)U < a$$

puis pour tout $(c,d) \in [a,b[$:

$$p(c \leqslant X < d) = p\left(\frac{c-a}{b-a} \leqslant U < \frac{d-a}{b-a}\right) = \frac{d-c}{b-a}.$$

On a bien une loi uniforme sur $[a,b[$, d'où le premier point.

Considérons maintenant :$X = \lfloor (n+1)U \rfloor$, on a :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant U < 1 \qquad \text{donc} \qquad & 0 \leqslant (n+1)U < n+1 \\
\text{puis :} \qquad & 0 \leqslant \lfloor (n+1)U \rfloor \leqslant n
\end{aligned}$$

De plus, pour $k \in [\![0,n]\!]$,

$$p(X=k) = p\Big(k \leqslant (n+1)U < k+1\Big) = p\Big(\frac{k}{n+1} \leqslant U < \frac{k+1}{n+1}\Big) = \frac{1}{n+1}.$$

On a donc bien une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

Considérons maintenant le dernier cas $X = \lfloor nU \rfloor + 1$, on a alors :

$$\begin{array}{lcr} 0 \leqslant U < 1 & \text{donc} & 1 \leqslant nU + 1 < n + 1 \\ & \text{puis :} & 1 \leqslant 1 + \lfloor nU \rfloor \leqslant n \end{array}$$

et pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$p(X = k) = p\Big(k \leqslant 1 + nU < k + 1\Big) = p\Big(\frac{k-1}{n} \leqslant U < \frac{k}{n}\Big) = \frac{1}{n}.$$

On a donc bien une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. ■

- Plutôt qu'apprendre par cœur des instructions, il suffit de partir de $0 \leqslant U < 1$ puis de retrouver les univers images. Exemple pour un dé :

$$\begin{array}{lcr} 0 \leqslant U < 1 & \text{donc} & 0 \leqslant 6U < 6 \\ & \text{puis :} & 0 \leqslant \lfloor 6U \rfloor \leqslant 5 \\ & \text{enfin :} & 1 \leqslant \lfloor 6U \rfloor + 1 \leqslant 6 \end{array}$$

  Ainsi l'instruction `floor(6*rand())+1` simule un dé.
- La fonction `randint` permet de faire la même chose directement, mais l'usage de cette fonction est déconseillé, sauf si l'énoncé y fait clairement référence.
  En effet :
  - dans la bibliothèque `pylab`, la syntaxe est :
    `randint(low,hight)` qui renvoie un entier au hasard entre $[\![\texttt{low}, \texttt{hight} - 1]\!]$,
  - dans la bibliothèque `random`, la syntaxe est la même mais la fonction renvoie un entier au hasard entre $[\![\texttt{low}, \texttt{hight}]\!]$, (borne supérieure comprise donc).

  D'une manière générale, il est plus utile de bien connaître les applications de la fonction `rand` que de connaître la syntaxe de toutes les fonctions construites à partir de `rand`.

✯ Simulation de tirages avec remise

Si E est un ensemble de cardinal p, on peut simuler un tirage dans E en suivant la loi uniforme sur E, en utilisant la liste `E` des éléments de E et en calculant `E[i]`, où i est un indice aléatoire uniforme dans $[\![0, (p-1)]\!]$.

Par exemple :

```
E = ['a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f', 'g', 'h', 'i']
p = length(E)
i = floor(rand()*p) # uniforme dans [|0, p-1|]
X = E[i] # X suit la loi uniforme sur E
```

On peut alors créer très facilement une fonction qui réalise plusieurs tirages avec remise :

```
def tirageAvecRemise(E,n):
    """
    entrée: E = liste de longueur p
            = ensemble des valeurs dans lesquelles on tire
          n = entier = nbr de tirages
    sortie: L = liste de longueur n = valeurs tirées
    """
    p = len(E)
    L = []
    for k in range(n) :
        i = floor(rand()*p) # uniforme dans [|0, p-1|]
        L.append( E[i])
    return(L)
```

- On utilise ici la concaténation, mais on pourrait aussi initialiser la liste `L` par exemple avec `L = [0]*n`, puis la remplir avec `L[k] = E[i]`.

✯ Simulation d'un tirage sans remise

Pour simuler un tirage sans remise dans un ensemble, il faut utiliser une liste `E` comme dans le cas d'un tirage avec remise sauf que l'on efface avec `del` la valeur tirée. La longueur de la liste `E` est alors automatiquement diminuée de 1.

Par exemple : pour tirer 5 fois sans remise dans une urne qui contient des jetons de $[\![1, 20]\!]$:

```
E = list( range(1, 21) ) # attention au 21!
L = [0]*5
for k in range(5) :
    i = floor( rand()*(20-k))# i est aléatoire entre 0 et len(E)-1
    L[k] = E[i]
    del(E[i])
```

- C'est l'indice `i` dans la liste `E` que l'on tire, cet indice correspond à l'élément `E[i]`. On ne peut pas tirer directement `E[i]`.
- Petit détail : `range` ne crée pas une liste (mais un itérateur).
- L'interprétation est : on prend l'élément i de `E[i]` (E est la liste des disponibles) et on l'ajoute à `L`.
- C'est aussi comme cela, que l'on simule des tirages de cartes.
- En tirant tous les éléments, on simule ainsi des mélanges (permutations).

⋆ Calcul de la fréquence

Pour vérifier la validité du programme, on pourra réaliser le diagramme en bâtons de la variable aléatoire simulée : on réalise un nombre N d'expériences, et on note A_k le nombre d'apparitions de l'événement $X = k$. On vérifie que la fréquence empirique $\frac{A_k}{N}$ est proche de la probabilité théorique p_k.

On utilise souvent la fonction `bar` du module `matplotlib`, sous la forme : `bar(universImage, frequences)`, avec

- `universImage` une liste (ou un `array` unidimensionnel) des valeurs de $X(\Omega)$.
- `frequences` une liste (ou un `array` unidimensionnel) des valeurs de la fréquence empirique : $\dfrac{A_k}{N}$.

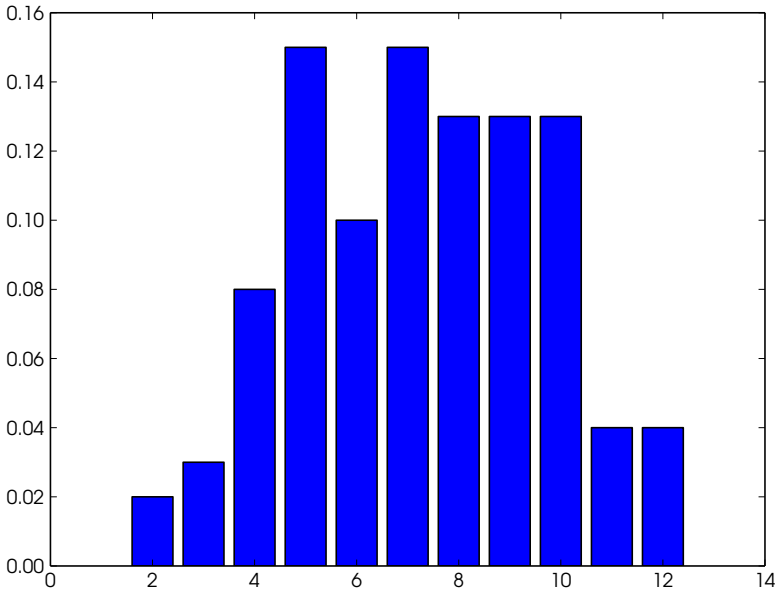
- On peut ajouter l'option `align='center'` pour que les bâtons soient centrés sur les modalités.
- Pour créer la liste des fréquences dans le cas usuel où l'univers image est $[\![0,n]\!]$:
  - on part d'un `array` `F` qui ne contient que des 0,
  - à chaque tirage, on obtient une valeur i, et on incrémente `F[i]`,
  - si on veut avoir la liste des fréquences et non des effectifs, il suffit de diviser cet `array` par le nombre de tirages (opérations entre `array`).
  - Enfin, l'univers image s'obtient en utilisant la fonction `range`.

  On adapte bien sûr selon l'univers image en ajoutant 1 à `F[i-1]` si l'univers image est $[\![1,n]\!]$ ou autre.

Exemple pour obtenir le diagramme en bâtons d'une somme de deux dés simulés :

```
F = zeros(11) #F[i] = fréquence de (X=i+2)
for t in range(100) : # 100 expériences
    D1 = floor(rand()*6) +1
    D2 = floor(rand()*6) +1
    i = D1+D2
    F[i-2] += 1 # on incrémente l'effectif correspondant
F = F / 100 #pour avoir les fréquences et non les effectifs
bar(range(2,13), F, align='center')
```

On obtient :



✯ Simulation d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'un schéma de Bernoulli

Pour simuler une variable de Bernoulli qui vaut 1 avec la probabilité p, il suffit de tester si $U < p$.

```
def bernoulli(p):
    """
    entrée: p = float = proba de succès
    sortie: 1 succès, 0 échec
    """
    alea = rand()
    if alea < p :
        return(1)
    else :
        return(0)
```

On peut alors simuler un schéma de Bernoulli en répétant plusieurs fois cette simulation.

```
def binomial(n,p):
    """
    entrée: n = nbr de tirages
            p = float = proba de succès
    sortie: X = entier = nbr de succès dans n tirages
    """
    X = 0
    for i in range(n) :
        tirage = bernoulli(p)
        X += tirage # on peut aussi faire un if
    return(X)
```

✯ Simulation d'une variable aléatoire hypergéométrique

Pour simuler une variable aléatoire hypergéométrique il faut garder en mémoire le nombre de blanches et de noires dans l'urne. Tout se passe comme si, à chaque tirage, les blanches sont numérotées de 1 à `nbrB`, et les noires de `nbrB+1` à `nbrN`.

```
def hypergeometrique(N,n,p) :
    """
    entrée: N = entier = Taille de l'urne
            n = entier = Nbr de tirages
            p = float = proportion de B dans l'urne de départ
    sortie: X = entier = nbr de Blanches après n tirages sans remise
    """
    X = 0
    nbrB = N*p
    nbrN = N*(1-p)
```

```
    for i in range(n) :
        alea = 1+ floor( rand()*(nbrB+nbrN) ) #uniforme entre 1 et (nbrB+nbrN)
        if alea <= nbrB :
            #tirage d'une B
            X += 1
            nbrB = nbrB - 1
        else :
            #tirage d'une N
            nbrN = nbrN -1
    return(X)
```

✯ Simulation d'une variable aléatoire quelconque

Considérons une variable aléatoire X, avec $X(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$. On suppose connue la loi de X, c'est-à-dire les n valeurs $p(X=i)$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, notées $\left(p_i\right)$. Il s'agit, comme indiqué dans le cours, de n réels positifs dont la somme fait 1.

On cherche à obtenir des réalisations de cette variable, comme si on obtenait des résultats possibles de l'expérience aléatoire. On dit que l'on cherche à simuler la variable aléatoire.

On va donc écrire une fonction `simule`, qui prend en entrée la liste `p` des n valeurs de $\left(p_i\right)$, et qui sort une valeur `X`, qui est comprise entre 0 et $n-1$, et qui est égale à k avec une probabilité p_k.

Pour cela, on va utiliser la fonction de répartition. On sait que :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ p(X=k) =& p_k \\ =& \sum_{i=0}^{k} p_i - \sum_{i=0}^{k-1} p_i \\ =& p(\sum_{i=0}^{k-1} p_i \leqslant U < \sum_{i=0}^{k} p_i)\end{aligned}$$

On peut donc simuler une variable aléatoire uniforme U puis chercher k tel que $\sum_{i=0}^{k-1} p_i \leqslant U < \sum_{i=1}^{k} p_i$. Pour cela, on introduit les sommes :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad S_k = \sum_{i=1}^{k} p_i \qquad \text{avec } S_0 = 0.$$

Comme la suite $\left(S_k\right)$ est croissante, il s'agit de trouver la plus petite valeur de k telle que : $U < \sum_{i=1}^{k} p_i$.

On utilise donc une boucle `while` qui calcule la valeur suivante de la somme S_k jusqu'à dépasser la valeur de U.

Cela donne :

```
def simule(p):
    """
    entrée:  p = liste de taille n = n valeurs pi positives dont la somme fait 1
    sortie:  X = float = valeurs aléatoires entre 1 et n avec p(X=i)=pi
    """
    alea = rand() # alea est la variable aléatoire uniforme
    S = p[0] # valeur de la somme
    i = 0 # indice du dernier élément ajouté
    while S < alea :
        i += 1
        S += p[i]
    return(X)
```

- C'est aussi ce que l'on fait lorsque l'on simule une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$: on cherche k tel que $\frac{k-1}{n} \leqslant U < \frac{k}{n}$, *i.e.* $k = \lfloor nu \rfloor + 1$.
- On est sûr de sortir du `while` avant que $i = n$, car $\sum_{i=0}^{n-1} p_i = 0$.

Exercice 1 On dispose de deux boîtes d'allumettes : la boîte « pile » et la boîte « face », et d'une pièce équilibrée. Au départ, les deux boîtes contiennent 20 allumettes. On tire à pile ou face, si on obtient pile, on enlève une allumette de la boîte « pile », idem si on obtient face.

On s'arrête lorsqu'une boite est vide, et on note X le nombre d'allumettes dans la boîte non vide. Ainsi, X est une valeur aléatoire de $[\![1,20]\!]$.

1. Écrire une fonction `simule` qui ne prend rien en entrée et qui calcule la valeur de X (aléatoire donc). On utilisera la fonction `rand` du module `numpy.random`.
   NB : une fonction qui n'a rien en entrée s'écrit : `def simule():`
2. Écrire une fonction `simuleMFois` qui prend un entier m, qui réalise m expériences et qui sort une liste L, de taille 20, tel que : `L[i]` est le nombre d'expérience parmi les m pour lesquelles le résultat a été $X = i+1$.
3. Réaliser 2000 expériences avec la fonction précédente.
   En utilisant uniquement les fonctions de base de python, estimer la valeur empirique de la moyenne de X et son écart-type.
4. En utilisant la fonction `bar` du module `pylab`, dessiner un diagramme en bâton des valeurs de `L`, c'est-à-dire des valeurs empiriques de $p(X = i)$.

Correction :

```python
# -*- coding: utf-8 -*-


"""
Auteur: Sylvain Pelletier
simulation des allumettes de Banach
"""


# Modules et fonctions importés
##############################
from numpy.random import rand
from math import sqrt
from pylab import *

# Fonctions
###########

# il est plus facile d'utiliser un paramètre pour cela.
TAILLE_BOITE = 20

def simule():
    """
    sortie: X = entier
              = nbr d'allumettes dans la boîte non vide lorsque l'une est vide
    """
    nbrPile = TAILLE_BOITE
    nbrFace = TAILLE_BOITE

    while nbrFace >0 and nbrPile >0 :
        alea =rand()
        if alea<0.5 : #pile
            nbrPile = nbrPile -1
        else :
            nbrFace = nbrFace -1
    if (nbrFace>0):
        return(nbrFace)
    else:
        return(nbrPile)

def simuleMFois(m):
    """
    entrée: m =  entier = nbr d'expériences
    sortie: L = liste de 20 entiers
              = L[i] est le nombre d'expérience telles que X=i+1
    """
    L = [0]*TAILLE_BOITE
    for i in range(m) :
```

```
        X = simule()
        L[X-1] += 1
    return(L)

def calculeMoyVar(L, nbr_exp) :
    """
    entrée: L = liste d'entiers
              =  L[i] est l'effectif de l'événemts X=i+1
                 après nbr_exp simulations
            nbr_exp = entier
             = nbr de simulations
             = somme des valeurs de L[i]
    sortie: moyenne = float
            variance = float
            sigma = float = ecart-type
    Attention: L contient les effectifs de X=i+1
    """
    moyenne = 0
    moyenneCarre = 0
    for [i, effectif] in enumerate(L):
        moyenne += (i+1)*effectif
        moyenneCarre += ((i+1)**2) *effectif

    moyenne = moyenne / nbr_exp
    moyenneCarre = moyenneCarre / nbr_exp

    variance = moyenneCarre - moyenne**2
    sigma = sqrt(variance)
    return([moyenne, variance, sigma])



# Code:
#######

NBR_EXP = 2000

L = simuleMFois(NBR_EXP)
print("\n"+"-"*10+"résultats obtenus"+"-"*10)
print(L)

bar(arange(1,TAILLE_BOITE+1), L)
show()

[moyenne, variance, sigma]=calculeMoyVar(L, NBR_EXP)
print("-"*30)
print("moyenne: \t"+str(moyenne))
print("variance: \t"+str(variance)+"\t écart-type: \t"+str(sigma))
```

Exercice 2 Soit N un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N dans lequel on effectue une succession de tirages avec remise d'un jeton en notant, à chaque fois, le numéro obtenu. Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages.

1. Exprimer précisément l'univers image $T_n(\Omega)$ où Ω désigne l'univers de l'expérience. Dans la suite, on considère que $T_n(\Omega) = [\![1,N]\!]$ quitte à ajouter artificiellement des valeurs possibles à T_n dont la probabilité d'apparition est nulle.
2. Écrire une fonction `simule` prenant en entrée n et N et simulant une expérience en calculant la valeur de T_n.
3. Faire plusieurs expériences pour calculer les fréquences des événements $T_n = k$. On écrira une fonction `loiEmpirique` qui prend en entrée n, N et le nombre d'expériences et qui calcule une liste `T` de taille N, avec `T[i]` la probabilité empirique que $T_n = i+1$.
   On dit que l'on détermine la loi empirique de la variable T_n.
   Représenter cette loi sous forme de diagramme en bâtons.
   Proposer des représentations graphiques dans les cas où $n < N$, $n \approx N$ et n très grand devant N.

On sauvegardera les images obtenues.

4. Pour un entier naturel non nul tel que $k \leqslant N$, on calcule $p(T_{n+1}) = k$ en utilisant le raisonnement suivant (à savoir faire) :

$$\text{on a : } \Big(T_{n+1} = k\Big) \subset \Big(T_n = k\Big) \cup \Big(T_n = k-1\Big)$$

$$\text{autrement dit : } \Big(T_{n+1} = k\Big) = \Bigg(\Big(T_n = k\Big) \cap \Big(T_{n+1} = k\Big)\Bigg) \cup \Bigg(\Big(T_n = k-1\Big) \cap \Big(T_{n+1} = k\Big)\Bigg)$$

$$\text{on conditionne : } p\Big(T_{n+1} = k\Big) = p\Big(T_n = k\Big) p_{T_n=k}\Big(T_{n+1} = k\Big) + p\Big(T_n = k-1\Big) p_{T_n=k-1}\Big(T_{n+1} = k\Big)$$

Or, sachant $T_n = k$, on a N jetons dans l'urne, dont k ont déjà été tirés au moins une fois, l'événement $T_{n+1} = k$ signifie alors que l'on tire l'un de ces k jetons. Ainsi, $p_{T_n=k}\Big(T_{n+1} = k\Big) = \frac{k}{N}$.
Sachant, $T_n = k-1$, on a N jetons dans l'urne, dont $k-1$ ont déjà été tirés au moins une fois, l'événement $T_{n+1} = k$ signifie alors que l'on tire un jeton qui n'a pas déjà été tiré, et donc $p_{T_n=k}\Big(T_{n+1} = k\Big) = \frac{N-k+1}{N}$.
Cela donne :

$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} \times P(T_n = k) + \frac{N-(k-1)}{N} \times P(T_n = k-1).$$

On dispose d'une formule de récurrence permettant de calculer la loi de T_{n+1} en connaissant la loi de T_n, comme la variable T_1 est certaine et égale à 1, on peut déterminer la loi exacte de T_n en fonction de n et N.
Écrire une fonction `loiExacte` prenant en entrées les valeurs de n et de N et calculant la loi de T_n.
Proposer une représentation graphique sous forme de diagramme en bâtons, et comparer aux représentations obtenues en simulant les expériences.
Indication : il y a une imprécision dans le raisonnement ci-dessus, la corriger. Attention au décalage : `T[i]` correspond à $p(T_n = i+1)$.

5. Modifier le code pour calculer les moyennes et les variances des lois empiriques et théoriques.
6. Dans cette question, on considère le cas $N = 5$ et $n = 8$.
Estimer le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir par simulation une loi empirique de T_n proche de la loi réelle. Estimer alors le nombre d'opérations nécessaires pour faire ces simulations. Comparer au nombre d'opérations nécessaires pour calculer la loi réelle.

Correction :

```python
# -*- coding: utf-8 -*-


"""
Auteur: Sylvain Pelletier
résolution d'un problème de probabilité avec Python
"""

# compatibilité V2 et V3:
from __future__ import print_function, division, unicode_literals
import sys
if sys.version_info.major <= 2 :
    input = raw_input


# Modules et fonctions importés
##############################
from pylab import *

# Fonctions
###########
def simule(n, N):
    """
    entrée: n = entier = nbr de tirages
            N = entier = taille de l'urne
    sortie: entier = nbr de jetons différents obtenus en n tirages
```

```
    """
    dejaTire = [] # liste des jetons deja tiré
    for k in range(n):
        jeton = floor(rand()*N)+1
        if jeton not in dejaTire :
            dejaTire += [ jeton ]
    return(len(dejaTire))

def loiEmpirique(nbrExpe, n, N):
    """
    entrée: n = entier = nbr de tirages
            N = entier = taille de l'urne
            nbrExpe = entier = nbr d'expériences
    sortie: T = liste = T[i] est l'effectif de (T_n = i+1)
    """
    T = [0]*N
    for expe in range(nbrExpe):
        i = simule(n,N)
        T[i-1] += 1
    return(T)

def loiEmpirique2(nbrExpe, n, N):
    """
    entrée: n = entier = nbr de tirages
            N = entier = taille de l'urne
            nbrExpe = entier = nbr d'expériences
    sortie: T = liste = T[i] est la fréquence de (T_n = i+1)
    """
    T = zeros(N) # o utilise un array
    for expe in range(nbrExpe):
        i = simule(n,N)
        T[i-1] += 1
    return(T/nbrExpe)


def loiExacte(n, N):
    """
    entrée: n = entier = nbr de tirages
            N = entier = taille de l'urne
    sortie: T = liste = T[i] est la probabilité exacte de (T_n = i+1)
    méthode utilisant uniquement deux liste Tn et Tnp1
    """

    # on utilise deux listes: Tn et Tnp1 de taille Nx
    Tn= [1] + [0]*(N-1) # initialisation de Tn à 1
    Tnp1= [0]*N # initialisation de Tn à 1
    for n in range(n-1):
        Tnp1[0] = 1/N*Tn[0]
        for i  in range(1,N):
            k = i+1
            Tnp1[i] = (k/N)*Tn[i] + (N-k+1)/N * Tn[i-1]
        Tn = Tnp1[:] # attention au piège de la copie de liste
    return(Tn)

def loiExacte2(n, N):
    """
    entrée: n = entier = nbr de tirages
            N = entier = taille de l'urne
    sortie: T = liste = T[i] est la probabilité exacte de (T_n = i+1)
    méthode construisant entièrement le tableau Tn
    """
    # on utilise un tableau T
    # T[i,j] = p (Tn=k ) avec n = i+1 et k = j+1
    T = zeros([n,N])
```

```
    T[0,0] = 1 # 1ère ligne: loi certaine = 1.
    for i in range(1,n): # boucle ligne
        T[i,0] = 1/N * T[i-1,0] # 1 ère élément de la ligne
        for j in range(1, N) : # boucle colonne
            k=j+1
            T[i,j] = (k/N)*T[i-1,j] + (N-k+1)/N * T[i-1,j-1]
    print(T)
    return(T[n-1,:]) #renvoi la dernière ligne.

# Code:
#######
N = 5
n = 8
nbrExpe = 100000

empirique = False

if empirique:
    L = loiEmpirique(nbrExpe, n, N)
    L = array(L) /nbrExpe #on utilise les fréquences et non les effectifs

    # ou utiliser
    # L = loiEmpirique2(nbrExpe, n, N)
else:
    L = loiExacte(n, N)

# représentation graphique
bar( range(1,N+1), L, align='center')
show(block ='false')

#calcul de la moyenne et de la variance
moy = 0
moyCarre = 0
for i, freq in enumerate(L) :
    result = i+1
    moy += result * freq
    moyCarre += (result**2) * freq
variance = moyCarre - moy**2
print("moyenne obtenue : "+str(moy)+"\t variance obtenue: "+str(variance))
```

Rappels de dénombrements

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Techniques de dénombrements

Exercice 1 Dénombrement des p-listes croissantes

Soit p et n deux entiers strictement positifs.
Pour $(a_1,\dots,a_p)$ une p-liste, on dit que :
- la p-liste $(a_1,\dots,a_p)$ est *croissante* si $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $a_i \leqslant a_{i+1}$.
- la p-liste $(a_1,\dots,a_p)$ est *strictement croissante* si $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $a_i < a_{i+1}$.

On note :
- E l'ensemble des p-listes croissantes d'éléments de $[\![1,n]\!]$,
- F l'ensemble des p-listes strictement croissantes d'éléments de $[\![1,n+p-1]\!]$.

1. Déterminer le cardinal de F.
2. Si $(a_1,a_2,\dots,a_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1,2,\dots,n\}$, on définit la p-liste $(b_1,b_2,\dots,b_p)$ par
$$\forall k \in \{1,2,\dots,p\},\ b_k = a_k + k - 1. \tag{1}$$
Montrer que si $(a_1,a_2,\dots,a_p) \in E$ alors $(b_1,b_2,\dots,b_p) \in F$.
3. Si $(b_1,b_2,\dots,b_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1,2,\dots,n+p-1\}$, on définit la p-liste $(a_1,a_2,\dots,a_p)$ par
$$\forall k \in \{1,2,\dots,p\},\ a_k = b_k - k + 1. \tag{2}$$
Montrer que si $(b_1,b_2,\dots,b_p) \in F$ alors $(a_1,a_2,\dots,a_p) \in E$.
4. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & F \\ & (a_1,a_2,\dots,a_p) & \mapsto & \varphi(a_1,a_2,\dots,a_p) = (b_1,b_2,\dots,b_p) \quad \text{définie par (1)} \end{array}$$
est bijective.
5. En déduire le nombre de p-listes croissantes d'éléments de $\{1,2,\dots,n\}$.

Correction :

1. Puisqu'il n'y a qu'une seule façon d'ordonner par ordre croissant les éléments d'une partie de $\{1,2,\dots,n+p-1\}$, le nombre de p-listes strictement croissantes de $\{1,2,\dots,n+p-1\}$ est égal au nombre de parties à p éléments de $\{1,2,\dots,n+p-1\}$. Autrement dit,
$$\operatorname{card}(F) = \binom{n+p-1}{p}.$$
2. Si $(a_1,a_2,\dots,a_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1,2,\dots,n\}$, on définit la p-liste $(b_1,b_2,\dots,b_p)$ par
$$\forall k \in \{1,2,\dots,p\},\ b_k = a_k + k - 1. \tag{1}$$
On suppose que $(a_1,a_2,\dots,a_p) \in E$, c'est-à-dire que $(a_1,a_2,\dots,a_p)$ est une p-liste croissante d'éléments de $\{1,2,\dots,n\}$.
Soit $k \in \{1,2,\dots,p-1\}$.
Puisque $(a_1,a_2,\dots,a_p)$ est croissante, on a $a_k \leqslant a_{k+1}$. Par conséquent,
$$b_k = a_k + k - 1 \leqslant a_{k+1} + k - 1 = a_{k+1} + (k+1) - 1 - 1 = b_{k+1} - 1 < b_{k+1}.$$
Ainsi $(b_1,b_2,\dots,b_p)$ est strictement croissante.
Soit $k \in \{1,2,\dots,p\}$. Puisque $1 \leqslant a_k \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant p$, on a
$$1 = 1 + 1 - 1 \leqslant b_k = a_k + k - 1 \leqslant n + p - 1$$
c'est-à-dire $b_k \in \{1,2,\dots,n+p-1\}$ pour tout $k \in \{1,2,\dots,p\}$.
Ainsi, $(b_1,b_2,\dots,b_p)$ est strictement croissante. est une p-liste d'éléments $\{1,2,\dots,n+p-1\}$.
On en déduit que $(b_1,b_2,\dots,b_p) \in F$.

3. Si $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1, 2, \dots, n+p-1\}$, on définit la p-liste $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ par

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, p\},\ a_k = b_k - k + 1. \tag{2}$$

On suppose que $(b_1, b_2, \dots, b_p) \in F$, c'est-à-dire que $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ est une p-liste strictement croissante d'éléments de $\{1, 2, \dots, n+p-1\}$.
Soit $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Puisque $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ est strictement croissante, on a $b_k < b_{k+1}$. Par conséquent,

$$a_k = b_k - k + 1 < b_{k+1} - k + 1 = b_{k+1} - (k+1) + 1 + 1 = a_{k+1} + 1.$$

Or a_k et a_{k+1} sont des nombres entiers, donc $a_k < a_{k+1} + 1$ et $a_k \leqslant a_{k+1}$. Ainsi $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est croissante.
Montrons maintenant que $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est une p-liste d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$. On a $a_1 = b_1 - 1 + 1 = b_1 \geqslant 1$ et $a_p = b_p - p + 1 \leqslant n + p - 1 - p + 1 = n$. Puisque $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est croissante, on a $a_1 \leqslant a_k \leqslant a_p$ et donc $a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.
Finalement $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in E$
4. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & F \\ & (a_1, a_2, \dots, a_p) & \mapsto & \varphi(a_1, a_2, \dots, a_p) = (b_1, b_2, \dots, b_p) \quad \text{définie par (1).} \end{array}$$

Montrons tout d'abord que φ est injective. Soient $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ et $(a'_1, a'_2, \dots, a'_p)$ deux p-listes de E. On note $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_p) = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ et $\varphi(a'_1, a'_2, \dots, a'_p) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_p)$ leurs images par φ. On suppose que $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_p) = \varphi(a'_1, a'_2, \dots, a'_p)$, d'où $(b_1, b_2, \dots, b_p) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_p)$. Soit $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. On a donc $b_k = b'_k$ et d'après (1) :

$$a_k + k - 1 = b_k = b'_k = a'_k + k - 1 \qquad \text{et} \qquad a_k = a'_k.$$

Donc $(a_1, a_2, \dots, a_p) = (a'_1, a'_2, \dots, a'_p)$ et φ est injective.
Montrons maintenant que φ est surjective. Soit $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ une p-liste de F. On considère la p-liste $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ définie par (2) et on va prouver que $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est un antécédent de $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ par φ. Tout d'abord $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est bien une p-liste de E d'après le résultat de la question précédente. On note donc $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_p) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_p)$ son image par φ et on a :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, p\},\ b'_k \underset{\text{d'après (1)}}{=} a_k + k - 1 \underset{\text{d'après (2)}}{=} (b_k - k + 1) + k - 1 = b_k.$$

Ainsi $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_p) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_p) = (b_1, b_2, \dots, b_p)$, autrement dit $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est un antécédent de $(b_1, b_2, \dots, b_p)$, et φ est surjective.
Finalement, φ est injective et surjective, donc bijective.
Une autre méthode possible est de considérer l'application $\psi : F \to E$ définie par (2) et de prouver que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_F$. Dans ce cas, on montre que $\varphi : E \to F$ est bijective et de plus que $\psi : F \to E$ et sa bijection réciproque.
5. D'après le résultat précédent on a $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$. Or E désigne l'ensemble des p-listes croissantes d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ et $\mathrm{card}(F)$ a été déterminé à la question 1. Donc le nombre de p-listes croissantes d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ est

$$\mathrm{card}(E) = \binom{n+p-1}{p}.$$

✯ Tirages sans remise

Exercice 2 Une urne contient n boules noires et p boules blanches avec n et p deux entiers naturels strictement positifs.

1. On considère l'ensemble Ω de tous les tirages possibles de ces boules une à une et sans remise. Combien y a-t-il de tels tirages ?
2. En classant les tirages en fonction du rang d'apparition de la dernière boule noire, déterminer la valeur de la somme :

$$S = \sum_{k=n}^{n+p} \binom{k-1}{n-1}.$$

Correction :

1. Un tirage est une liste de B/N de longueur $n+p$ contenant n fois le symbole N. Un tirage est donc déterminé par la place des noires. On en déduit : $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{n+p}{n}$.

2. Soit $k \in [\![n, n+p]\!]$. On note E_k l'ensemble des tirages tels que la dernière boule noire est en position k.
Montrons que :

$$\bigcup_{k=n}^{n+p} E_k = \Omega \qquad \text{union disjointe}$$

On a en effet :

- Pour $\boxed{\subset}$: on a $\forall k \in [\![n, n+p]\!]$, $E_k \subset \Omega$, donc $\bigcup_{k=n}^{n+p} E_k \subset \Omega$.
- Pour $\boxed{\supset}$: considérons un tirage $x \in \Omega$. On pose k la place de la dernière boule noire dans le tirage x. On a k est un entier, et $k \geqslant n$ (puisqu'il y a n noires) et $k \leqslant n+p$ (puisqu'il y a $n+p$ tirages). Ainsi, on a $k \in [\![n, n+p]\!]$.
  Enfin, x est un tirage où la dernière noire est en position k, donc $x \in E_k$. Par suite, $x \in \bigcup_{k=n}^{n+p} E_k$ et $\bigcup_{k=n}^{n+p} E_k \supset \Omega$.
- Pour montrer que l'union est disjointe : on considère k et l, deux entiers distincts de $[\![n, n+p]\!]$. On veut montrer que $E_k \cap E_l = \emptyset$, pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un tirage $x \in E_k \cap E_l$. Le tirage x vérifie alors : la dernière noire est sortie au rang k et au rang l. Comme le rang de la dernière noire est unique, on en déduit $k = l$. Contradiction. Ainsi, $E_k \cap E_l = \emptyset$ et l'union est disjointe.

On a donc $\bigcup_{k=n}^{n+p} E_k = \Omega$, union disjointe on en déduit une égalité des cardinaux :

$$\sum_{k=n}^{n+p} card(E_k) = card(\Omega) \qquad (*)$$

Or on a vu : $card(\Omega) = \binom{n+p}{n}$.
Considérons $k \in [\![n, n+p]\!]$ et cherchons le cardinal de E_k. On a vu qu'un tirage de Ω est déterminé par la place des n noires parmi les $n+p$ places possibles. Un tirage de E_k est alors déterminé par la place les $n-1$ noires dans les places $k-1$ première places, puisque la n-ième noire est en position k, les autres tirages étant blancs.
On en déduit : $card(E_k) = \binom{k-1}{n-1}$. En reportant dans (*), cela donne :

$$\sum_{k=n}^{n+p} \binom{k-1}{n-1} = \binom{n+p}{n}.$$

⋆ Dénombrements d'ensemble d'ensembles

Exercice 3 Soit E un ensemble de cardinal n. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des couples (X, Y) de parties disjointes de E. Ainsi :

$$\mathscr{F} = \left\{ (X, Y) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^2 \middle| X \cap Y = \emptyset \right\}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer le cardinal de $\mathscr{F}$.

1. Donner tous les éléments de $\mathscr{F}$ lorsque $E = \{1, 2\}$.
2. Justifier que $\mathscr{F}$ est de cardinal fini et $\text{Card}(\mathscr{F}) \leqslant 2^{2n}$.
3. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on définit $\mathscr{F}_k$ comme l'ensemble des couples (X, Y) de parties disjointes de E, telles que $\text{Card}(X) = k$. Ainsi,

   $$\mathscr{F}_k = \left\{ (X, Y) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^2 \middle| X \cap Y = \emptyset \text{ et } \text{Card}(X) = k \right\}.$$

   Déterminer le cardinal de $\mathscr{F}_k$.
4. Exprimer $\mathscr{F}$ en fonction des $\mathscr{F}_k$.
   Soyez précis dans le raisonnement et la démonstration
   En déduire $\text{Card}(\mathscr{F})$.

Commentaire : très classiquement on découpe $\mathscr{F}$ en ensemble dont on peut calculer le cardinal, les ensembles $\mathscr{F}_k$. On en déduit $\mathscr{F}$.

Correction :

1. Lorsque $E = \{1,2\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\Big\}$. Les couples de parties disjointes sont :

$$\big(\emptyset,\emptyset\big) \quad \big(\emptyset,\{1\}\big) \quad \big(\emptyset,\{2\}\big) \quad \big(\emptyset,\{1,2\}\big) \quad \big(\{1\},\emptyset\big) \quad \big(\{2\},\emptyset\big) \quad \big(\{1,2\},\emptyset\big) \quad \big(\{1\},\{2\}\big) \quad \big(\{2\},\{1\}\big)$$

2. On a : $\mathscr{F} \subset \Big(\mathscr{P}(E)\Big)^2$, or :
   - E est fini de cardinal n,
   - donc $\mathscr{P}(E)$ est fini de cardinal 2^n,
   - donc $\Big(\mathscr{P}(E)\Big)^2$ est fini de cardinal $(2^n)^2 = 2^{2n}$.

   Ainsi, $\mathscr{F}$ est fini et $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant 2^{2n}$.
3. On procède par choix successifs :
   (a) choix de X : il faut choisir une partie à k éléments parmi n, ce qui donne : $\binom{n}{k}$ choix.
   (b) choix de Y : il faut choisir une partie quelconque des $n-k$ éléments restants, ce qui donne : 2^{n-k} choix.

   Ainsi, $\mathrm{Card}\Big(\mathscr{F}_k\Big) = \binom{n}{k} 2^{n-k}$.
4. On a :

$$\mathscr{F} = \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{F}_k \text{ union disjointe.}$$

   En effet :
   - les $\mathscr{F}_k$ sont des parties de $\mathscr{F}$, d'où l'inclusion : $\subset$
   - Si $(X,Y) \in \mathscr{F}$, alors en notant $k = \mathrm{Card}(X)$, on a alors $k \in [\![0,n]\!]$ et $(X,Y) \in \mathscr{F}_k$. D'où l'inclusion $\supset$.
   - Si $k \neq k'$, alors supposons par l'absurde qu'il existe $(X,Y) \in \mathscr{F}_k \cap \mathscr{F}_{k'}$. On a alors : $\mathrm{Card}(X) = k$ et $\mathrm{Card}(X) = k'$, contradiction. donc l'union est disjointe.

   ! On attends une rédaction de ces trois points.

   On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\mathscr{F}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathscr{F}_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\\ &= 3^n.\end{aligned}$$

⋆ Exercices de concours

Exercice 4 Nombre de surjections

Quelques rappels :

- On note F^E l'ensemble des applications d'un ensemble E dans un ensemble F.
- On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective de E sur F lorsque :

$$\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x),$$

  autrement dit lorsque $F = f(E) = \{f(x) \in F / x \in E\}$.
  En particulier f est toujours surjective de E sur $f(E)$.
- Soient E et F deux ensembles finis. S'il existe une surjection de E sur F alors on a : $\mathrm{Card}\,E \geqslant \mathrm{Card}\,F$. S'il existe une injection sur E à valeurs dans F alors : $\mathrm{Card}\,E \leqslant \mathrm{Card}\,F$.
- Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application. Si $\mathrm{Card}\,E = \mathrm{Card}\,F$ alors on a :

$$f \text{ injective sur } E \iff f \text{ surjective de } E \text{ sur } F \iff f \text{ bijective de } E \text{ sur } F$$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On note S_n^p le **nombre de surjections** d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments. On pose $S_n^0 = S_0^p = 0$.

On admet que ce nombre ne dépends pas des ensembles E et F, mais uniquement de leur cardinal p et n.

1. **Exemples simples.** Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   (a) Pour $n > p \geqslant 1$, déterminer S_n^p.
   (b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer S_p^p et S_1^p.

(c) Établir que : $\forall p \geqslant 2,\ S_2^p = 2^p - 2$.

(d) Soient E et F deux ensembles finis tels que $\operatorname{Card} E = n+1$ et $\operatorname{Card} F = n$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une surjection de E sur F.

Montrer qu'il existe un unique $y \in F$ admettant deux antécédents par f (*remarquer que f n'est pas injective sur E ...*)

En déduire que :

$$S_n^{n+1} = \frac{n}{2}(n+1)!$$

2. **Formule générale.** Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant n \leqslant p$, E et F deux ensembles finis, avec $p = \operatorname{Card}(E)$ et $n = \operatorname{Card}(F)$.

(a) Soit $q \in [\![0, n-1]\!]$. Etablir que : $\forall k \in [\![q,n]\!]$, $\binom{n}{k}\binom{k}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{k-q}$.

En déduire que :

$$\sum_{k=q}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{q} = 0.$$

(b) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On pose : $\mathscr{A}_i = \left\{ f \in F^E / \operatorname{Card} f(E) = i \right\}$.

Justifier que : $F^E = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i$.

En déduire que :

$$n^p = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p.$$

(c) Déduire de 2a et 2b que :

$$S_n^p = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p.$$

3. **Table des S_n^p.**

(a) Établir que, si $n \geqslant 2$ et $p \geqslant n$:

$$S_n^p = n\left(S_n^{p-1} + S_{n-1}^{p-1}\right).$$

(*On suggère d'utiliser la question 2c*)

(b) A l'aide du principe de récurrence, démontrer que :

$$\forall p \geqslant 1, \quad S_p^{p+2} = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!.$$

(c) En s'inspirant du triangle de Pascal, écrire un programme permettant de construire la table des S_n^p pour $1 \leqslant n \leqslant 5$ et $1 \leqslant p \leqslant 5$.

p \ n	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0
3	1	6	6	0	0
4	1	14	36	24	0
5	1	30	150	240	120

4. **Applications :**

(a) On distribue 5 huitres (en les distinguant) à Pierre, Paul et Jacques. On suppose que toutes les répartitions sont équiprobables. Déterminer la probabilité qu'ils en recoivent au moins une chacun.

(b) Le jour du bizuthage les élèves de spé distribuent aux 47 jeunes bizuths p poireaux ($p \geqslant 47$) achetés au marché le matin même. Ils éliminent alors les bizuths qui n'en ont pas reçus. Ils reprennent les poireaux puis les redistribuent de façon aléatoire aux bizuths non éliminés ; ils eliminent de nouveau ceux qui n'en reçoivent pas. Ils réitèrent un certain nombre de fois ce jeu.

i. Quelle est la probabilité qu'au moins un bizuth (au moins) se retrouve sans poireaux ? qu'un bizuth reçoive tous les poireaux ?

ii. Pour $n \geqslant 1$, on note : $U_n =$ " il reste 47 bizuths au bout de n éliminations ", et $u_n = p(U_n)$. Donner une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n. En déduire la valeur de u_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

iii. Comment interpréter ce résultat ?

1. **Exemples simples.** Ces questions sont souvent mal traitées. On attends le cours :
   - Si $p < n$ il n'existe pas de surjection de E dans F.
   - Si $p = n$ alors une surjection est automatiquement une bijection.
   - Si $p < n$ alors une application $f : E \to F$ n'est pas injective.

   On voit trop souvent des raisonnements approximatifs.

   (a) Si $n > p$ alors il n'existe pas de bijection d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments. Donc

   $$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } n > p \geqslant 1, S_n^p = 0.$$

   (b) Une application d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à p éléments est bijective si et seulement si elle est surjective. Dans ce cas, il y a donc autant de surjection que de bijection, et il y a $p!$ bijection. Ainsi, $S_p^p = p!$.
   Considérons un ensemble F à un élément (F est le singleton $\{f\}$), alors la seule application de E dans F est $x \in E \longmapsto f$. Cette application est bien surjective. On obtient donc : $S_1^p = 1$.

   (c) Considérons maintenant le cas où F est constitué de deux éléments : $F = \{f_1, f_2\}$, et E un ensemble de cardinal p. Il y a alors 2^p applications de E dans F, seule deux ne sont pas surjectives : les deux applications constantes : $x \longmapsto f_1$ et $x \longmapsto f_2$. Ainsi, le complémentaire dans F^E de l'ensemble des applications surjectives est de cardinal 2, donc : $S_2^p = 2^p - 2$.

   (d) Comme $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} F$, l'application f ne peut pas être surjective, il existe donc **au moins** un élément $y \in F$ tels que y a **au moins** deux antécédents.

   ! Beaucoup d'imprécisions sur ce point.

   Il reste donc à montrer que :
   - y est unique
   - il n'a que deux antécédents.

   Pour cela, on découpe E en parties sur lequel f est constante (comme dans la démonstration du lemme des bergers). on a :

   $$E = \bigcup_{y' \in F} f^{-1}(\{y'\}) = \bigcup_{y' \in F} \left\{ x \in E \middle| f(x) = y' \right\}$$

   Cette union étant disjointe. On a donc :

   $$\begin{aligned} \operatorname{Card}(E) &= \sum_{y' \in F} \operatorname{Card}\left(f^{-1}(\{y'\})\right) \\ n+1 &= \sum_{y' \neq y} \underbrace{\operatorname{Card}\left(f^{-1}(\{y'\})\right)}_{\geqslant 1} + \underbrace{\operatorname{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right)}_{\geqslant 2}. \end{aligned}$$

   Pour tout $y' \in F$, $\operatorname{Card}\left(f^{-1}(\{y'\})\right) \geqslant 1$, puisque f est surjective, tout élément a donc au moins un antécédent.
   Avec cette écriture on a :
   - une somme de n terme supérieur ou égal à 1
   - plus un terme supérieur ou égal à 2
   - le tout fait $n+1$.

   C'est donc que tous les termes sont égaux à 1, et que le dernier terme est 2.
   On a donc montré qu'il existe un unique élément y de F qui a exactement deux antécédents, les autres ont un seul antécédents.
   On peut donc considérer alors l'application

   $$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & E \setminus \{x_1, x_2\} & \to & F \setminus \{y\} \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

   Montrons que l'application $\tilde{f}$ est surjective. Pour cela, on considère $y' \in F \setminus \{y\}$, alors, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y'$, puis comme $y' \neq y$, on a nécessairement $x \in E \setminus \{x_1, x_2\}$. Ainsi, $\tilde{f}$ est surjective.
   Puis $\operatorname{Card}(E \setminus \{x_1, x_2\}) = n - 1 = \operatorname{Card} F \setminus \{y\}$, donc $\tilde{f}$ est bijective.
   Ainsi, à partir de l'application f on peut déterminer :

- un élément $y \in F$ qui a exactement deux antécédents $\{x_1, x_2\}$,
- la donné de l'application $\tilde{f}$, bijection de $E \setminus \{x_1, x_2\} \to F \setminus \{y\}$.

Réciproquement, étant donné :
- un élément y de F,
- deux éléments $\{x_1, x_2\}$ de E,
- une application $\tilde{f}$ bijective d'un ensemble à $n-1$ élément dans un ensemble à $n-1$ éléments,

on peut construire une application f surjective de E dans F.

Cette partie peut par contre être admise.

Au final, on détermine le nombre d'application surjective de E dans F, avec la méthode des choix successifs :
- Le choix de l'élément $y \in F$ (n choix),
- le choix de la partie à deux éléments $\{x_1, x_2\}$ de E ($\binom{n+1}{2}$),
- le choix d'une permutation des éléments qu'ils restent ($(n-1)!$).

Ce qui fait donc :

$$\begin{aligned} S_n^{n+1} &= n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)! \\ &= n \times \frac{(n+1)n}{2} \times (n-1)! \\ &= \frac{n}{2}(n+1)! \end{aligned}$$

2. **Formule générale.**
   (a) Soit $k \in [\![q, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}\binom{k}{q} &= \frac{n!}{(n-k)!\cancel{k!}} \frac{\cancel{k!}}{(k-q)!q!} \\ &= \frac{n!}{q!(n-q)!} \frac{(n-q)!}{(\underbrace{(n-q)-(k-q)}_{n-k})!(k-q)!} \\ &= \binom{n}{q}\binom{n-q}{k-q}. \end{aligned}$$

On a donc : $\binom{n}{k}\binom{k}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{k-q}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=q}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{q} &= \sum_{k=q}^{n} (-1)^k \binom{n}{q}\binom{n-q}{k-q} \\ &= \binom{n}{q} \sum_{k=q}^{n} (-1)^k \binom{n-q}{k-q} \\ &= \binom{n}{q} \sum_{k=0}^{n-q} \binom{n-q}{k} (-1)^k \\ &= \binom{n}{q} (1+(-1))^{n-q} \qquad \text{(Newton)} \\ &= 0 \text{ si } n \neq q. \end{aligned}$$

   (b) Soit $f \in F^E$ (f est donc une application de E dans F), alors $f(E)$ est donc un sous-ensemble de F, et donc nécessairement de cardinal fini. On note alors $i = \operatorname{Card} f(E)$, on a alors $i \geqslant 1$, et $f \in \mathscr{A}_i$.
   D'autre part, cette union est disjointe, en effet, si $f \in \mathscr{A}_i \cap \mathscr{A}_j$, c'est que $\operatorname{Card}(f(E)) = i = j$.
   On en déduit que :

$$\operatorname{Card}(F^E) = n^p = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(\mathscr{A}_i).$$

   Or une application de $\mathscr{A}_i$ est déterminé par :

- le choix de $f(E)$, qui doit être une partie à i éléments de F, il y a donc $\binom{n}{i}$ choix.
- une surjection de E dans $f(E)$, il y a donc S_i^p choix.

Au final, on obtient : $\text{Card}(\mathscr{A}_i) = \binom{n}{i} S_i^p$, puis en remplaçant dans la somme :

$$n^p = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_i^p.$$

(c) On commence alors par calculer le terme de gauche en utilisant 2b :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} S_i^p \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{k} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} S_i^p \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} S_i^p \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_i^p \sum_{k=i}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{i}
\end{aligned}$$

(**NB :** le terme pour $k = 0$ est nul et n'intervient donc pas.)

Or si $i < n$, la question 2a indique que $\sum_{k=i}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{i}$. Il ne reste donc qu'un terme non nul dans la première somme : celui pour $i = n$.

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p &= S_n^p \sum_{k=n}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{n} \\
&= S_n^p (-1)^n.
\end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$S_n^p = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p.$$

3. **Table des S_n^p.**

(a) Soit $n \geqslant 2$ et $p \geqslant n$, on remplace dans 2c et on obtient :

$$\begin{aligned}
n(S_n^{p-1} + S_{n-1}^{p-1}) &= n \left(\underbrace{(-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^{p-1}}_{S_n^{p-1}} + \underbrace{(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} k^{p-1}}_{S_{n-1}^{p-1}} \right) \\
&= n(-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} k^{p-1} - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} k^{p-1} + (-1)^n n^{p-1} \right) \\
&= n(-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right] k^{p-1} + (-1)^n n^{p-1} \right)
\end{aligned}$$

La relation de Pascal donne pour $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

R En prolongeant par convention le triangle de Pascal par des 0, cette relation est aussi vraie pour $k = n$, néanmoins, il est plus clair de sortir le dernier terme.

On a donc :

$$\begin{aligned}
n(S_n^{p-1} + S_{n-1}^{p-1}) &= n(-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} k^{p-1} + (-1)^n n^{p-1} \right) \\
&= n(-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} k^{p-1}
\end{aligned}$$

Pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, on utilise la relation :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\Big((n-1)-(k-1)\Big)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

R Il est intéressant de connaître cette relation : dans un binomial le $n-k$ ne dépend que de la « distance » entre n et k. Attention, il faut $k \neq 0$.

On continue le calcul :

$$\begin{aligned}
n(S_n^{p-1} + S_{n-1}^{p-1}) =& n(-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} k^{p-1} \\
=& (-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} k^p \\
=& (-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p \\
=& (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p = S_n^p
\end{aligned}$$

On a donc bien la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall p \geqslant n, S_n^p = n\big(S_n^{p-1} + S_{n-1}^{p-1}\big).$$

(b) On utilise une récurrence sur $p \geqslant 1$, en notant

$$\mathscr{P}_p :\ S_p^{p+2} = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!.$$

Pour l'initialisation, si $p = 1$, on considère le nombre de surjection d'un ensemble E à 3 éléments dans un ensemble F à 1 éléments. Il y a une seule application possible $E \to F$, et elle est surjective. On a donc $S_1^3 = 1$. D'un autre côté, si $p = 1$, on a $\frac{p(3p+1)}{24}(p+2)! = \frac{4}{24}3! = 1$. D'où l'initialisation pour $p = 1$.
Pour l'hérédité, on considère un entier $p \geqslant 1$ fixé, tel que $\mathscr{P}_p$ est vraie. On a alors en utilisant la relation 3a :

$$S_{p+1}^{p+3} = (p+1)\left(S_{p+1}^{p+2} + S_p^{p+2}\right),$$

Or on a vu 1d la relation $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^{n+1} = \frac{n}{2}(n+1)!$. On applique alors pour obtenir :

$$S_{p+1}^{p+2} = \frac{p+1}{2}(p+2)!,$$

D'autre part en appliquant [HR], on a :

$$S_p^{p+2} = \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
S_{p+1}^{p+3} =& (p+1)\left(S_{p+1}^{p+2} + S_p^{p+2}\right), \\
=& (p+1)\left(\frac{p+1}{2}(p+2)! + \frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!\right) \\
=& (p+2)!(p+1)\left(\frac{p(3p+1)}{24} + \frac{p+1}{2}\right) \\
=& (p+2)!(p+1)\frac{1}{24}\left(p(3p+1) + 12(p+1)\right) \\
=& (p+2)!(p+1)\frac{1}{24}\left(3p^2 + 13p + 12\right)
\end{aligned}$$

Or

$$3p^2+13p+12=(p+3)(3p+4)=(p+3)\left(3(p+1)+1\right),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}S_{p+1}^{p+3}=&(p+2)!(p+1)\frac{1}{24}(p+3)\left(3(p+1)+1\right)\\=&(p+3)!\frac{(p+1)\left(3(p+1)+1\right)}{24}.\end{aligned}$$

On obtient bien l'hérédité.
En conclusion, on a bien pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, la relation $S_p^{p+2}=\frac{p(3p+1)}{24}(p+2)!$.

R Question en apparence difficile, mais il suffit de relire soigneusement les questions précédentes pour trouver la solution.

(c) On va stocker les S_n^p dans une matrice, la valeur de S_n^p se lisant ligne p colonne n. La relation :

$$\forall n\geqslant 2,\forall p\geqslant n,\ S_n^p=n\left(S_n^{p-1}+S_{n-1}^{p-1}\right),$$

signifie alors que la valeur de `S[p,n]` est égale à n multiplié par la somme de la valeur située au dessus et de celle situé dans la case en « haut à gauche ».
Voici un exemple de programme :

```
from numpy import zeros

S = zeros( [6,6] )
for p in range(1,6) :
      S[p,1] = 1

for p in range(1,6):
  for n in range(2,p+1) :
      S[p, n] = n * (S[p-1, n] + S[p-1, n-1] )

print(S)
```

R On a ajouté une ligne et une colonne de zéros pour avoir S_n^p représenté par `S[p, n ]`.

4. **Applications :**

(a) Une distribution correspond à une application de l'ensemble des huîtres (5 éléments) dans l'ensemble des personnes (3 éléments) : à une huître on associe la personne qui la reçoit. Il y a donc 5^3 applications possibles. L'ensemble des distributions possibles est donc un ensemble Ω de cardinal 5^3, on le munit de la probabilité uniforme.
Une distribution vérifie la propriété : « *toutes les personnes reçoivent une huître au moins* si et seulement si l'application correspondante est surjective.
On en déduit donc la probabilité :

$$p=\frac{S_3^5}{5^3}=\frac{120}{5^3}.$$

(b) Une distribution est représentée par une fonction φ qui à un poireau associe un bizuth. Il s'agit d'une application d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à 47 éléments. Il y a 47^p distribution possible.
L'événement $E=$« au moins un bizuth (au moins) se retrouve sans poireaux » est le complémentaire de l'événement « φ est surjective ». On obtient donc :

$$p(E)=1-p(\overline{E})=1-\frac{S_{47}^p}{47^p}.$$

En effet, il y a S_{47}^p applications surjectives.
L'événement $A=$ »un bizuth reçoit tous les poireaux » est l'événement φ est constante. Comme il y a 47 applications constantes, on obtient :

$$p(A)=\frac{47}{47^p}=\frac{1}{47^{p-1}}.$$

(c) On utilise les probabilités totales avec le système complet d'événements $(U_n, \overline{U_n})$

$$\begin{aligned} u_{n+1} =& p(U_{n+1}) = p(U_{n+1} \cap U_n) + p(U_{n+1} \cap \overline{U_n}) \\ =& p(U_n) p_{U_n}(U_{n+1}) + p(\overline{U_n}) p_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) \\ =& u_n \left(1 - \frac{S_{47}^p}{47^p}\right) \end{aligned}$$

En effet, sachant $\overline{U_n}$, U_{n+1} est impossible, et $p_{U_n}(U_{n+1})$ est l'événement E de la question précédente. On voit donc que u_n est une suite géométrique avec $u_0 = 1$ et on a alors la relation :

$$u_n = \left(1 - \frac{S_{47}^p}{47^p}\right)^n.$$

Comme $S_{47}^p < 47^p$, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

(d) Un bizuth finit par être éliminé à coups sûr.

Rappels probabilités

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Techniques de calculs des probabilités

Exercice 1 On considère cinq entier naturels non nuls : N, b_1, b_2, n_1 et n_2.

Soient deux urnes U_1 et U_2 :
- l'urne U_1 contient b_1 boules blanches et n_1 boules noires,
- l'urne U_2 contient b_2 boules blanches et n_2 boules noires.

On fait N tirages au hasard successifs avec remise avec les règles suivante :
- On tire une seule boule à chaque tirage.
- La première urne est choisie au hasard.
- Si on tire une blanche, le tirage suivant s'effectue dans U_1.
- Si on tire une noire, le tirage suivant s'effectue dans U_2.

1. Donner en fonction de b_1, b_2, n_1 et n_2, la probabilité p_1 d'avoir une blanche au premier tirage.
2. Si on suppose que le premier tirage donne une boule noire, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne U_1.
3. Pour tout nombre entier i entre 1 et N, on note p_i la probabilité d'avoir une blanche au i-ième tirage.
   Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
   $$\forall i \in [\![2,N]\!],\ p_i = \alpha p_{i-1} + \beta.$$
   On donner la valeur de α et β en fonction de b_1, b_2, n_1 et n_2.
4. Montrer que $p_1 = \frac{\alpha}{2} + \beta$. Montrer que $\alpha \neq 1$.
5. Montrer par récurrence que pour tout i entre 1 et N, on a :
   $$p_i = \frac{\alpha^i}{2} + \beta \frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}.$$

Commentaire : expérience aléatoire en N étapes chronologique (même $N+1$ si on inclu le choix de la première urne) donc formule des probabilités composées !

1. On note U_1 l'événement : « au premier tirage on a choisir l'urne 1 », idem pour $U_2 = \overline{U_1}$ On utilise les probabilités totales et le système complets d'événements (U_1, U_2) :
   $$\begin{aligned} p_1 = p(B_1) =& p(U_1 \cap B_1) + p\left(\overline{U_1} \cap B_1\right) \\ =& p(U_1) p_{U_1}(B_1) + p(U_2)\, p_{U_2}(B_1) \\ =& \frac{1}{2}\frac{b_1}{n_1+b_1} + \frac{1}{2}\frac{b_2}{n_2+b_2}. \end{aligned}$$
   NB : lorsque l'on utilise les probabilités totales, il faut donner le système d'événements.
   On obtient ainsi : $p_1 = \frac{1}{2}\frac{b_1}{n_1+b_1} + \frac{1}{2}\frac{b_2}{n_2+b_2}$.
2. Avec les notations de la questions précédentes, on veut calculer : $p_{N_1}(U_1)$ On utilise la formule de Bayes :
   $$p_{N_1}(U_1) = \frac{p(U_1 \cap N_1)}{p(N_1)} = \frac{p(U_1) p_{U_1}(N_1)}{p(N_1)}$$
   On a :
   $$\begin{aligned} p(N_1) =& 1 - p_1 = \frac{1}{2}\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{1}{2}\frac{n_2}{n_2+b_2} && \text{on peut refaire le calcul de la question précédente} \\ \text{et } p_{U_1}(N_1) =& \frac{n_1}{n_1+b_1} \\ p(U_1) =& \frac{1}{2} && \text{par hypothèse.} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
p_{N_1}(U_1) =& \frac{\frac{1}{2}\frac{n_1}{n_1+b_1}}{\frac{1}{2}\frac{n_1}{n_1+b_1}+\frac{1}{2}\frac{n_2}{n_2+b_2}} \\
=& \frac{\frac{n_1}{n_1+b_1}}{\frac{n_1}{n_1+b_1}+\frac{n_2}{n_2+b_2}} \\
=& \frac{n_1(n_2+b_2)}{n_1(n_2+b_2)+n_2(n_1+b_1)} \\
=& \frac{n_1n_2+n_1b_2}{2n_1n_2+b_2n_1+n_2b_1}
\end{aligned}$$

3. Soit $i \in [\![2,n]\!]$.
   On utilise les probabilités totales avec le système complet d'événements (B_{i-1}, N_{i-1}).
   On a alors :

$$\begin{aligned}
p_i = p(B_i) =& p(N_{i-1} \cap B_i) + p(B_{i-1} \cap B_i) \\
=& p(N_{i-1})p_{N_{i-1}}(B_i) + p(B_{i-1})p_{B_{i-1}}(B_i) \\
=& (1-p_{i-1})\frac{b_2}{b_2+n_2} + p_{i-1}\frac{b_1}{n_1+b_1} && \text{d'après la modélisation} \\
=& p_{i-1}\left(\frac{b_1}{n_1+b_1} - \frac{b_2}{b_2+n_2}\right) + \frac{b_2}{b_2+n_2} \\
=& p_{i-1}\left(\frac{b_1n_2-b_2n_1}{(n_1+b_1)(n_2+b_2)}\right) + \frac{b_2}{b_2+n_2}.
\end{aligned}$$

   On obtient donc la relation demandée avec :

$$\alpha = \frac{b_1n_2-b_2n_1}{(n_1+b_1)(n_2+b_2)} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{b_2}{b_2+n_2}.$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
\text{d'un côté :} \qquad p_1 =& \frac{1}{2}\frac{b_1}{n_1+b_1} + \frac{1}{2}\frac{b_2}{n_2+b_2} \\
=& \frac{b_1n_2+n_1b_2+2b_1b_2}{2(n_1+b_1)(n_2+b_2)} \\
\text{d'un autre côté :} \qquad \frac{\alpha}{2}+\beta =& \frac{b_1n_2-b_2n_1}{2(n_1+b_1)(n_2+b_2)} + \frac{b_2}{b_2+n_2} \\
=& \frac{1}{2(n_1+b_1)(n_2+b_2)}(b_1n_2-b_2n_1+2b_2n_1+2b_2b_1) \\
=& \frac{1}{2(n_1+b_1)(n_2+b_2)}(b_1n_2b_2n_1+2b_2b_1)
\end{aligned}$$

   On a bien : $p_1 = \frac{1}{2}\alpha + \beta$.
   On a :

$$\begin{aligned}
\alpha = 1 \Leftrightarrow& \frac{b_1n_2-b_2n_1}{(n_1+b_1)(n_2+b_2)} = 1 \\
\Leftrightarrow& b_1n_2-b_2n_1 = (n_1+b_1)(n_2+b_2) \\
\Leftrightarrow& b_1n_2-b_2n_1 = n_1n_2+b_1n_2+n_1b_2+b_1b_2 \\
\Leftrightarrow& n_1n_2+2n_1b_2+b_1b_2 = 0
\end{aligned}$$

   Ce qui est impossible car il s'agit de termes positifs (strictement).
5. **NB :** c'est le résultat du cours sur les suites arithmético-géométrique.
   On note pour $i \in [\![1,N]\!]$:

$$P(i) : \qquad p_i = \frac{\alpha^i}{2} + \beta\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}.$$

Initialisation : pour $i = 1$, la formule s'écrit :

$$p_1 = \frac{\alpha}{2} + \beta,$$

ce qui est vrai d'après la question précédente.
Hérédité : soit i fixé, tel que $P(i)$ est vrai et $i < N$ (pour que le rang suivant existe !)
On a alors :

$$\begin{aligned}
p_{i+1} =& \alpha p_i + \beta && \text{d'après q3} \\
=& \alpha\left(\frac{\alpha^i}{2} + \beta\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}\right) + \beta && \text{HR} \\
=& \frac{\alpha^{i+1}}{2} + \beta\left(\alpha\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha} + 1\right) \\
=& \frac{\alpha^{i+1}}{2} + \beta\left(\frac{\alpha - \alpha^{i+1} + 1 - \alpha}{1-\alpha}\right) \\
=& \frac{\alpha^{i+1}}{2} + \beta\left(\frac{1-\alpha^{i+1}}{1-\alpha}\right)
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité
Conclusion : on a donc :

$$\forall i \in [\![1, N]\!], p_i = \frac{\alpha^i}{2} + \beta\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}.$$

Exercice 2 Deux jeux de dés successifs

Tous les dés considérés sont cubiques, et les apparitions des différentes faces sont toutes équiprobables.

On considère le dé A dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et les sept dés D_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$ tels que, pour chaque i le dé D_i possède $i-1$ faces blanches et $7-i$ faces noires (par exemple, le dé D_3 contient deux faces blanches et quatre faces noires).

On choisit tout d'abord un numéro i compris entre 1 et 7 en lançant le dé A et en procédant de la façon suivante :

- si le résultat du lancer est 2, 3, 4, 5 ou 6, on choisit le numéro sorti,
- si le résultat du lancer est 1, on lance à nouveau le dé A, et si le nouveau résultat est 1, 2 ou 3, on choisit le numéro 1, sinon on choisit le numéro 7.

Après avoir choisi de cette façon le numéro i, $1 \leqslant i \leqslant 7$, on joue exclusivement avec le dé D_i. On lance D_i successivement plusieurs fois de suite de façon indépendante. Les résultats obtenus à chaque lancer sont donc indépendants, sachant que l'on a utilisé le dé D_i.

On transmets alors la couleur de la face obtenue à chaque lancer à un observateur qui ignore quel dé D_i est utilisé.

Rappel :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

1. On note A_k l'évènement "à l'issue de la procédure de choix de dé, on choisit le dé numéro k".
   (a) Calculer les probabilités $p(A_2)$, $p(A_3)$, $p(A_4)$, $p(A_5)$ et $p(A_6)$.
   (b) Calculer les probabilités $p(A_1)$ et $p(A_7)$.
2. Calculer la probabilité que l'observateur obtienne :
   (a) une face noire au premier lancer du dé N/B.
   (b) une face noire au deuxième lancer du dé N/B.
   (c) une face noire aux deux premiers lancers du dé N/B.
   (d) Les évènement "obtenir une face noire au premier lancer du dé N/B" et "obtenir une face noire au second lancer du dé N/B" sont-ils indépendants ?
   Justifier votre réponse par le calcul et interpréter.
   (e) une face noire aux trois premiers lancers du dé N/B.
3. Si on a obtenu une face noire aux deux premiers lancers du dé N/B, calculer la probabilité d'obtenir une face noire au troisième lancer du dé N/B.
4. Si on a obtenu une face noire aux trois premiers lancers du dé N/B, calculer la probabilité que le dé choisit soit le dé 1.

On donnera une expression facilement calculable des valeurs des probabilités, sans chercher à simplifier les fractions obtenues.

Commentaire : Expérience aléatoire en deux étapes (dé A puis dé de couleurs). On a alors les techniques classiques : SCE associé à la première étape et formule de Bayes.

Correction :

1. (a) A_2 signifie que le premier tirage du dé A a donné 2. Ainsi, $p(A_2) = \frac{1}{6}$. De même, on a : $p(A_3) = p(A_4) = p(A_5) = p(A_6) = \frac{1}{6}$

   (b) A_1 signifie que le premier tirage de dé a donné 1 , et le deuxième 1, 2 ou 3. En notant D_1 et D_2 les résultats des deux tirages du dé A, on a : $A_1 = (D_1 = 1) \cap (D_2 = 1, 2 \text{ ou } 3)$.
   Ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(A_1) =& p\Big((D_1 = 1) \cap (D_2 = 1, 2 \text{ ou } 3)\Big) \\ =& p(D_1 = 1) p_{D_1=1}\Big((D_2 = 1, 2 \text{ ou } 3)\Big) \\ =& \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

   De même :

$$\begin{aligned} p(A_1) =& p\Big((D_1 = 1) \cap (D_2 = 4, 5 \text{ ou } 6)\Big) \\ =& \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

2. (a) On utilise le système complet d'événements : $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7)$. Il s'agit bien d'un système complet d'événements car on choisit un nombre $i \in [\![1, 7]\!]$ et un seul.
   Ainsi, avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(N) =& \sum_{i=1}^{7} p(N \cap A_i) = \sum_{i=1}^{7} p(A_i) p_{A_i}(N) \\ =& \sum_{i=1}^{7} p(A_i) \frac{7-i}{6}. \end{aligned}$$

   En effet, sachant l'événement A_i, le dé choisit est le dé D_i. Il a $7 - i$ faces (sur les 6) qui sont noires. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(N_1) =& \sum_{i=1}^{7} p(A_i) \frac{7-i}{6} \\ =& \sum_{i=2}^{6} p(A_i) \frac{7-i}{6} + p(A_1)\frac{6}{6} + p(A_7)\frac{0}{6} \\ =& \sum_{i=2}^{6} \frac{1}{6}\frac{7-i}{6} + \frac{1}{12} \\ =& \frac{1}{36} \sum_{i=2}^{6} (7-i) + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

   On peut faire le calcul « à la main » :

$$p(N_1) = \frac{1}{36}(5+4+3+2+1) + \frac{1}{12} = \frac{15}{36} + \frac{1}{12} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

   Ou utiliser les formules de somme :

$$\begin{aligned} p(N_1) =& \frac{1}{36}\left(\sum_{i=1}^{5} i\right) + \frac{1}{12} && \text{en posant } i = 7 - i \\ =& \frac{15}{36} + \frac{1}{12} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Ainsi : $p(N_1) = \frac{1}{2}$

(b) Les lancers 2 et 3 se déroulent dans les mêmes conditions, ainsi $p(N_2) = p(N_1)$. On peut aussi refaire le même calcul en utilisant la formule des probabilités totales avec le même SCE. Par contre, il est inutile d'utiliser le système complet d'événements

$$\Big((A_1,N_1),(A_1,B_1),(A_2,N_1),(A_2,B_1),\dots(A_7,N_1),(A_7,B_1)\Big)$$

et de faire deux fois la formule des probabilités totales.

(c) On procède de même en utilisant le système complet d'événements $\Big(A_i\Big)$:

$$\begin{aligned}
p(N_1\cap N_2) &= \sum_{i=1}^{7} p(N_1\cap N_2\cap A_i) = \sum_{i=1}^{7} p(A_i)p_{A_i}(N_1\cap N_2)\\
&= \sum_{i=1}^{7} p(A_i)\left(\frac{7-i}{6}\right)^2
\end{aligned}$$

En effet, sachant A_i, les lancers du dé D_i sont indépendants. Cela donne :

$$\begin{aligned}
p(N_1\cap N_2) &= \frac{1}{6^2}\sum_{i=2}^{6} p(A_i)(7-i)^2 + p(A_1)\times 1 + p(A_7)\times 0\\
&= \frac{1}{6^3}\sum_{i=2}^{6}(7-i)^2 + \frac{1}{12}\\
&= \frac{1}{6^3}\sum_{k=1}^{5} k^2 + \frac{1}{12}\\
&= \frac{1}{6^3}\frac{5\times 6\times 11}{6} + \frac{1}{12}\\
&= \frac{55}{6^3} + \frac{1}{6\times 2}\\
&= \frac{110}{6^3\times 2} + \frac{36}{6^3\times 2}\\
&= \frac{146}{6^3\times 2} = \frac{73}{6^3}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi : $p(N_1\cap N_2) = \frac{73}{6^3}$.

(d) Pour montrer que N_1 et N_2 ne sont pas indépendants, on vérifie :

$$\begin{aligned}
&p(N_1\cap N_2) \neq p(N_1)p(N_2)\\
\text{c'est-à-dire } &\frac{73}{6^3} \neq \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

En effet, si on a obtenu une noire au premier tirage, on peu penser que la valeur de i choisie est faible (en particulier, ce n'est pas 7), et ainsi, le prochain tirage aura plus de chance d'être noir.

(e) On procède de même en utilisant le système complet d'événements $\Big(A_i\Big)$:

$$\begin{aligned}
p(N_1\cap N_2\cap N_3) &= \sum_{i=1}^{7} p(N_1\cap N_2\cap N_3\cap A_i) = \sum_{i=1}^{7} p(A_i)p_{A_i}(N_1\cap N_2\cap N_3)\\
&= \sum_{i=1}^{7} p(A_i)\left(\frac{7-i}{6}\right)^3\\
&= \frac{1}{6^3}\left(\frac{1}{6}\sum_{i=2}^{6}(7-i)^3\right) + p(A_1)\\
&= \frac{1}{6^4}\sum_{i=1}^{5} i^3 + \frac{1}{12}\\
&= \frac{1}{6^4}\frac{(5\times 6)^2}{4} + \frac{1}{6\times 2}\\
&= \frac{25}{6^2\times 4} + \frac{12}{6^2\times 4}\\
&= \frac{37}{6^2\times 4}.
\end{aligned}$$

Ainsi : $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{37}{6^2 \times 4}$.

3. On cherche $p_{N_1 \cap N_2}(N_3)$. On a :

$$\begin{aligned} p_{N_1 \cap N_2}(N_3) &= \frac{p(N_1 \cap N_2 \cap N_3)}{p(N_1 \cap N_2)} \\ &= \frac{\frac{37}{6^2 \times 4}}{\frac{73}{6^3}} = \frac{37}{6^2 \times 4} \frac{6^3}{73} = \frac{37 \times 6}{73 \times 4} = \frac{37 \times 3}{73 \times 2} = \frac{111}{146}. \end{aligned}$$

4. On utilise la formule de Bayes avec le système complet d'événements $\left(A_i\right)$:

$$\begin{aligned} p_{N_1 \cap N_2 \cap N_3}(A_1) &= \frac{p(A_1 \cap N_1 \cap N_2 \cap N_3)}{p(N_1 \cap N_2 \cap N_3)} \\ &= \frac{p(A_1) p_{A_1}(N_1 \cap N_2 \cap N_3)}{p(N_1 \cap N_2 \cap N_3)}. \end{aligned}$$

or $p(A_1) = \frac{1}{12}$ et $p_{A_1}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = 1$ et $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$ a été calculé à la question 2.
Cela donne :

$$p_{N_1 \cap N_2 \cap N_3}(A_1) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{37}{6^2 \times 4}} = \frac{6^2 \times 4}{12 \times 37} = \frac{6 \times 2}{37}.$$

Exercice 3 (inspiré de Véto 1997)

Dans la savane, les lionnes chassent des gazelles et des zèbres pour le lion. La population de gazelles et de zèbres est suffisamment importante pour que la population de chaque espèce reste stable malgré la chasse.

La probabilité pour que les lionnes ramènent une gazelle est de $2/3$, celle pour qu'elles rapportent un zèbre est de $1/3$. Les repas du lion ne sont composés que d'une proie à chaque fois. On suppose que la composition d'un repas est indépendante des repas précédents.

On observe le lion sur une assez grande période. Pour $n \geqslant 2$, on note E_n l'événement « *le lion a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois, aux $n-1^e$ et n^e repas* », et on note $u_n = p(E_n)$.

Pour $n \geqslant 1$, on appelle G_n l'événement « *le lion a mangé une gazelle au n^e repas* », et Z_n l'événement « *le lion a mangé un zèbre au n^e repas* ».

1. Calculer u_2, c'est-à-dire la probabilité pour que lors des deux premiers repas, le lion ait mangé deux gazelles.
2. Exprimer les événements E_3 et E_4 en fonction des événements $(Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ et $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$. En déduire u_3 et u_4.
3. Calculer $p(E_4|Z_1)$ et $p(E_4|G_1 \cap Z_2)$.
4. Soit $n \geqslant 4$. Expliquer pourquoi $p(E_n|Z_1) = u_{n-1}$
   Exprimer de même $p(E_n|G_1 \cap Z_2)$ et $p(E_n|G_1 \cap G_2)$
5. Montrer que $\forall n \geqslant 4$, $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1} + \frac{2}{9} u_{n-2}$ (être précis dans le raisonnement)
6. Donner pour tout $n \geqslant 2$ l'expression explicite de u_n en fonction de n.
7. Pour $n \geqslant 2$, calculer p_n, la probabilité de $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, et chercher sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

Correction :

1. D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p(G_n) = \frac{2}{3}$ et $p(Z_n) = \frac{1}{3}$, et les G_n sont mutuellement indépendants.
   $u_2 = p(E_2) = p(G_1 \cap G_2) = p(G_1)p(G_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. $\boxed{u_2 = \frac{4}{9}}$
2. On a d'après l'énoncé : $\boxed{E_3 = Z_1 \cap G_2 \cap G_3}$ et $\boxed{E_4 = Z_2 \cap G_3 \cap G_4}$.
   On peut aussi écrire : $E_4 = (G_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4) \cup (Z_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4)$ (union disjointe).
   On obtient alors en utilisant l'indépendance des tirages : $u_3 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ et $u_4 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$.
   Au final, on a le résultat $\boxed{u_3 = u_4 = \frac{4}{27}}$.
3. $p(E_4|Z_1) = \frac{p(E_4 \cap Z_1)}{p(Z_1)} = \frac{p(Z_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4)}{p(Z_1)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{27}$

Il n'est pas évident que E_4 et Z_1 sont indépendants.

$$p(E_4|G_1\cap Z_2)=\frac{p(E_4\cap G_1\cap Z_2)}{p(G_1\cap Z_2)}=\frac{p(G_1\cap Z_2\cap G_3\cap G_4)}{p(G_1\cap Z_2)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{4}{9}$$

R On pouvait deviner les résultats en lisant la question suivante.

4. $p(E_n|Z_1)=\dfrac{p(Z_1\cap E_n)}{p(Z_1)}$
Rédaction 1 : Notons F_n l'événement « *à partir du 2e repas, le lion mange 2 gazelles de suite pour la première fois aux $n-1$e et ne repas* »
F_n a la même probabilité que E_{n-1}.
On peut écrire $Z_1\cap E_n=Z_1\cap F_n$, et comme F_n ne concerne que les repas 2 à n, Z_1 et F_n sont indépendants.
Donc $p(Z_1\cap F_n)=p(Z_1)p(F_n)$. D'où $p(E_n|Z_1)=p(F_n)=p(E_{n-1})=u_{n-1}$
Rédaction 2 : Sachant que Z_1 est réalisé, obtenir E_1 signifie que les tirages 2 à n forment une séquence de taille $n-1$ qui vérifie la propriété : « *le lion mange 2 gazelles de suite pour la première fois aux deux derniers repas* ». Cette séquence est la même que E_{n-1} et a donc la même probabilité que E_{n-1}. Ainsi, sachant Z_1, tout se passe comme si le compteur de gazelle était remis à 0, et que l'expérience recommence au deuxième repas. Donc obtenir E_n à partir de Z_1 signifie que les a la même probabilité qu'obtenir E_{n-1} à partir du début.
NB : faire un schéma explicatif.

De même, $\boxed{p(E_n|G_1\cap Z_2)=p(E_{n-2})=u_{n-2}}$, car si $G_1\cap Z_2$ est réalisé, on recommence à zéro à partir du repas 3 (seuls les repas 3 à n sont comptabilisés pour obtenir 2 G de suite)
Enfin, $\boxed{p(E_n|G_1\cap G_2)=0}$, car si $G_1\cap G_2$ est réalisé, alors E_2 est réalisé, donc pas E_n (car $n\geqslant 4$).

5. Les événements Z_1, $G_1\cap Z_2$, $G_1\cap G_2$ forment un système complet d'événements.
On applique la formule des probabilités totales pour exprimer $p(E_n)$:
$p(E_n)=p(E_n|Z_1)p(Z_1)+p(E_n|G_1\cap Z_2)p(G_1\cap Z_2)+p(E_n|G_1\cap G_2)p(G_1\cap G_2)$
D'où (d'après la question précédente) $u_n=\dfrac{1}{3}u_{n-1}+\dfrac{2}{9}u_{n-2}$

On attends la description du système complet d'événements, ou la relation : $E_n=(E_n\cap Z_1)\cup(E_n\cap G_1\cap Z_2)$, union disjointe.

6. La suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire, d'équation caractéristique $r^2-\dfrac{1}{3}r-\dfrac{2}{9}=0$, qui admet comme solutions $-\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{2}{3}$.
Donc il existe deux réels a et b tels que $\forall n\geqslant 2$, $u_n=a\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+b\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
$n=2$ donne $\dfrac{4}{9}=\dfrac{a}{9}+\dfrac{4b}{9}$, donc $4=a+4b$
$n=3$ donne $\dfrac{4}{27}=-\dfrac{a}{27}+\dfrac{8b}{27}$, donc $4=-a+8b$.
Ces 2 équations donnent $a=\dfrac{4}{3}$ et $b=\dfrac{2}{3}$.
Donc $\boxed{\forall n\geqslant 2,\ u_n=\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-4\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}$ (ce qu'on peut vérifier avec $n=4$)

Il faut savoir faire ces petits calculs sans erreurs.

7. Les E_i sont 2 à 2 disjoints, à cause du terme *pour la première fois*. En effet, si un tirage $\omega\in E_i\cap E_j$, avec $i<j$, il est clair que l'événements deux gazelles sont mangées deux fois de suites a lieu pour la première fois au repas i et $i-1$, et donc pas en j et $j-1$.

R Bien détailler ce point, il est essentiel.

Ainsi : $p_n=\sum\limits_{i=2}^{n}p(E_i)=\sum\limits_{i=2}^{n}u_i$ (somme de 2 suites géométriques).

On obtient :

$$\begin{aligned}
p_n &= \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{i+1} - 4\sum_{i=2}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \sum_{i=0}^{n-2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{i} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)} \\
&= 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] - \frac{3}{4}\times 4\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{2^3}{3^2} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{3^2} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Après simplification cela donne : $\boxed{p_n = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$

Donc $p_n \xrightarrow[n+\infty]{} 1$.

L'événement « *le lion mange 2 gazelles de suite* » se produit donc de manière quasi-certaine. Ce qui est évident.

Exercice 4 Chaîne de Markov (G2E)

Une puce effectue des sauts aléatoires sur les trois sommets du triangle ABC. À chaque saut, elle peut soit sauter sur place, soit sauter vers un des deux autres sommets. Les probabilités pour que chaque saut de départ s'effectue en A, B ou C sont respectivement a_0, b_0 et c_0. On note A_n (respectivement B_n et C_n) les événements « *Après le n-ième saut, la puce est au point A* » (respectivement B, C), et a_n, b_n, c_n leur probabilités respectives.

Enfin, pour tout point M et N appartenant à $\{A,B,C\}$, on note P_{MN} la probabilité que le saut s'effectue de M vers N.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n$. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. Soit $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Dans cette question, pour tous points M et N appartenant à $\{A,B,C\}$ avec $M \neq N$, on pose $p_{MN} = a$ et $p_{MM} = 1-2a$.
   (a) Montrer la relation $a_{n+1} = (1-3a)a_n + a$.
   (b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
   (c) Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n.
   (d) En déduire la limite de chacune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comment peut-on interpréter ce résultat.
3. Dans cette question, on suppose $p_{AA} = 1$, $p_{BA} = p_{BB} = \frac{1}{2}$ et $p_{CA} = p_{CB} = p_{CC} = \frac{1}{3}$.
   (a) Comment interpréter la condition $p_{AA} = 1$?
   (b) Déterminer les valeurs p_{MN} manquantes.
   (c) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire une expression de c_n en fonction de n, de c_0.
   (d) Montrer la relation : $b_{n+2} = \frac{5}{6}b_{n+1} - \frac{1}{6}b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de b_n en fonction de n et de c_0 et de b_0.
   (e) Déterminer les limites des suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire la limite de la suite (a_n). Comment interpréter ce résultat ?

Correction :

1. Les événements (A_n, B_n, C_n) forment un système complet d'événements. Ainsi en utilisant les probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p(A_{n+1}) &= p(A_{n+1}\cap A_n) + p(A_{n+1}\cap B_n) + p(A_{n+1}\cap C_n) \\
&= p_{A_n}(A_{n+1})p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1})p(B_n) + p_{C_n}(A_{n+1})p(C_n)
\end{aligned}$$

Or $p_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité que la puce reste en A sachant qu'elle est en A au temps n, c'est donc p_{AA}. De même, $p_{B_n}(A_{n+1}) = p_{BA}$ et $p_{C_n}(A_{n+1}) = p_{CA}$. D'autre part, $p(A_n) = a_n$ et $p(B_n) = a_n$, $p(C_n) = c_n$ par définition. Ainsi, on obtient :

$$(*) \qquad a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n.$$

R Il est implicite que les probabilités de saut au temps n ne dépendent que de la position de la puce.

On attends les mots **Formule des probabilités totales, systèmes complets d'événements**, et la relation $p_{A_n}(A_{n+1}) = p_{AA}$.

De même on obtient :

$$(**) \qquad b_{n+1} = p_{AB}a_n + p_{BB}b_n + p_{CB}c_n \qquad \text{et} \qquad c_{n+1} = p_{AC}c_n + p_{BC}b_n + p_{CC}c_n.$$

2. (a) En remplaçant dans la relation $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1-2a)a_n + ab_n + ac_n \\ &= (1-2a)a_n + a(b_n + c_n) \\ &= (1-2a)a_n + a(1-a_n) \qquad \text{car} \qquad a_n + b_n + c_n = 1 \\ &= (1-3a)a_n + a \end{aligned}$$

La relation $a_n + b_n + c_n = 1$ provient du fait que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événement.

R Si vous ne voyez pas cette relation, utilisez la réponse pour vous guider.

(b) La suite (a_n) est arithmético-géométrique. On cherche l tel que $a_n - l$ est géométrique :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - l &= (1-3a)a_n + a - l \\ &= (1-3a)(a_n - l) + a - 3al. \end{aligned}$$

Il faut donc $a - 3al = 0$ soit $l = \frac{1}{3}$, puisque $a \neq 0$. Ainsi : $\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$ est géométrique, de premier terme $(a_0 - \frac{1}{3})$ et de raison $(1-3a)$. On conclut :

$$a_n = \frac{1}{3} + (1-3a)^n\left(a_0 - \frac{1}{3}\right).$$

(c) On a : $b_{n+1} = p_{AB}a_n + p_{BB}b_n + p_{CB}c_n$ donc en remplaçant : $b_{n+1} = (1-2a)b_n + a(a_n + b_n) = (1-3a)b_n + a$. On a donc la même expression et de même : $b_n = \dfrac{1}{3} + (1-3a)^n\left(b_0 - \dfrac{1}{3}\right)$.

(d) On a $0 < a < \frac{1}{2}$, donc $-\frac{1}{2} < 1 - 3a < 1$, en particulier $|1-3a| < 1$, et donc : $(1-3a)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

R Il faut montrer que $|1-3a| < 1$!

On en déduit $\lim_{n\infty} a_n = \frac{1}{3}$ et $\lim_{n\infty} b_n = \frac{1}{3}$. Comme $a_n + b_n + c_n = 1$, on a aussi $\lim_{n\infty} c_n = \frac{1}{3}$. Quelque soit la probabilités (a_0, b_0, c_0) de départ, les trois positions sont **équiprobables** si on laisse la puce faire suffisaient de saut. Cela provient de la symétrie : on peut échanger les rôles des points $\{A, B, C\}$.

R On attends l'**équiprobabilité**.

3. (a) $p_{AA} = 1$ signifie que si la puce est en A elle y reste indéfiniment.

(b) On a :

$$p_{AB} = 0 \qquad p_{AC} = 0 \qquad p_{BC} = 0.$$

En effet, si la puce est en A alors elle a trois possibilités : rester en A, aller en B, aller en C, et donc : $p_{AA} + p_{AB} + p_{AC} = 1$. Comme p_{AB} et p_{AC} sont positifs, on obtient les deux premières relations. La troisième provient de $p_{BA} + p_{BB} + p_{BC} = 1$.

Note : la rédaction précise de la démonstration de la formule $p_{AA} + p_{AB} + p_{AC} = 1$ est : (A_1, B_1, C_1) est un système complet d'événements donc :

$$\begin{aligned} p(A_0) &= p(A_1 \cap A_0) + p(B_1 \cap A_0) + p(C_1 \cap A_0) \\ &= p(A_0)p_{A_0}(A_1) + p(A_0)p_{A_0}(B_1) + p(A_0)p_{A_0}(C_1) \\ &= p(A_0)p_{A_0}(A_1) + p(A_0)p_{A_0}(B_1) + p(A_0)p_{A_0}(C_1) \\ &= p(A_0)(p_{AA} + p_{AB} + p_{AC}). \end{aligned}$$

En divisant par $p(A_0)$, on obtient la relation.

(c) On écrit les relations $(*)$ et $(**)$:

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{3}c_n. \end{cases}$$

Il est alors clair que (c_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et donc : $c_n = c_0\left(\frac{1}{3^n}\right)$.

(d) On a : $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n$, donc : $c_n = 3b_{n+1} - \frac{3}{2}b_n$

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{9}c_n \\ &= \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{9}\left(3b_{n+1} - \frac{3}{2}b_n\right) \\ &= \frac{5}{6}b_{n+1} - \frac{1}{6}b_n. \end{aligned}$$

R Il faut savoir faire ces petits calculs : on veut simplement éliminer c_n avec les relations de la questions précédentes pour se ramener à une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

La suite (b_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est : $r^2 - \frac{5}{6}r + \frac{1}{6} = 0$, qui admet comme solution $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n s'écrit sous la forme : $b_n = \alpha\frac{1}{2^n} + \beta\frac{1}{3^n}$. Avec les relations

- au rang 0 : $b_0 = \alpha + \beta$,
- au rang 1 : $b_1 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta$, mais on sait aussi : $b_1 = \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{3}c_0$.

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = b_0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta & = \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{3}c_0 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} \frac{1}{3}\beta & = -\frac{2}{3}c_0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta & = \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{3}c_0 \end{cases} \begin{matrix} l_1 \to l_1 - 2l_2 \\ l_2 \end{matrix} \quad \text{soit} \begin{cases} \beta & = -2c_0, \\ \alpha & = b_0 + 2c_0. \end{cases}$$

Au final :

$$b_n = \left(b_0 + 2c_0\right)\frac{1}{2^n} - \frac{2c_0}{3^n}.$$

(e) Comme $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, on a : $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$, puis comme $\frac{1}{2^n} \to 0$, et $\frac{2c_0}{3^n} \to 0$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.
De la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n + c_n = 1$, on déduit $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.
Ce résultat s'interprète car la puce finit toujours par passer en A et donc par y rester.

Exercice 5 On suppose que n est un entier naturel non nul.

On dispose de 2 boites. Dans chaque boite, on a mis n boules jaunes et n boules vertes, on prend simultanément n boules dans la 1ère que l'on met dans la 2ème puis on prend n boules dans la 2ème simultanément.

On constate que les n boules prises dans la 2ème boîte sont toutes vertes. Quelle est la probabilité que celles prises dans la première soient toutes vertes.

Correction : on introduit les VAR X_i : le nombre de V au tirage i.
On calcule en utilisant Bayes :

$$p_{X_2=n}(X_1 = n) = \frac{p(X_1 = n)p_{X_1=n}(X_2 = n)}{p(X_2 = n)} = \frac{p(X_1 = n)p_{X_1=n}(X_2 = n)}{\sum_{i=0}^{n} p(X_1 = i)p_{X_1=i}(X_2 = n)}$$

On calcule tout par dénombrements.

Au premier tirage, l'univers est une partie à n éléments des $2n$ boules, et donc $card(\Omega) = \binom{2n}{n}$. Et un tirage tel que $X_1 = i$ est déterminé par le choix des i V et des $n - i$ J. Ainsi :

$$p(X_1 = i) = \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}}{\binom{2n}{n}}$$

Sachant $X = i$, le tirage 2 se déroule avec les conditions : $3n$ boules, $n + i$ vertes, $2n - i$ jaunes. Ainsi avec la même méthode :

$$p_{X_1=i}(X_2 = n) = \frac{\binom{n+i}{n}}{\binom{3n}{n}}$$

Ce qui donne :

$$p(X_2=n)=\frac{1}{\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}\binom{n+i}{n}$$

$$\text{et } p(X_1=n)p_{X_1=n}(X_2=n)=\frac{1}{\binom{2n}{n}}\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{n}}=\frac{1}{\binom{3n}{n}}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}p_{X_2=n}(X_1=n)&=\frac{\binom{2n}{n}}{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}\binom{n+i}{n}}\\&=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}\binom{n+i}{n}}\end{aligned}$$

REM : On peut essayer de calculer la somme, mais il semble que le calcul n'aboutit pas :

$$\begin{aligned}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}\binom{n+i}{n}&=\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{(n+i)!}{n!i!}\\&=\frac{n!(n+i)!}{(i!)^3\left((n-i)!\right)^2}\end{aligned}$$

Par contre, il faut connaître :

$$\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

Exercice 6 Soit n un élément de $[\![1,7]\!]$. On dispose de cinq urnes U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5.

1. L'urne U_1 contient cinq jetons : deux rouges, deux blancs et enfin un bleu.
2. L'urne U_2 contient huit jetons : cinq jetons marqués 1 et trois jetons marqués 0.
3. L'urne U_3 contient huit jetons : trois jetons marqués 1 et cinq jetons marqués 0.
4. L'urne U_4 contient 8 jetons : n jetons marqués 1 et $8-n$ jetons marqués 0.
5. L' urne U_5 contient huit jetons : $8-n$ jetons marqués 1 et n jetons marqués 0.

On réalise l'une des deux expériences aléatoires :

1. La première expérience aléatoire se passe en deux étapes :
   - **Etape** 1 **:** On commence par tirer au hasard et simultanément trois jetons de l'urne U_1.
   - **Etape** 2 **:** Si le tirage est tricolore, on tire au hasard un jeton de l'urne U_2. Sinon, on tire au hasard un jeton de l'urne U_3.

   La première expérience aléatoire est qualifiée de succès si le dernier jeton tiré est marqué 1.
2. La deuxième expérience aléatoire se passe en trois étapes, la première étant similaire à celle de la première expérience aléatoire.
   - **Etape** 2 **:** Si le tirage réalisé à l'étape 1 est tricolore, on tire au hasard un jeton de l'urne U_4. Sinon, on tire au hasard un jeton de l'urne U_5.
   - **Etape** 3 **:**
     Si le jeton ainsi tiré à la fin de l'étape 2 est marqué 1, on le remet dans le sac d'où il vient et on tire au hasard un jeton du sac U_4. Si le jeton ainsi tiré à la fin de l'étape 2 est marqué 0, on le remet dans le sac d'où il vient et on tire au hasard un jeton du sac U_5.

   La deuxième expérience aléatoire est qualifiée de succès si le dernier jeton tiré est marqué 1.

On introduit les événements suivants :

- D : "Les jetons tirés de l' urne U_1 sont de trois couleurs différentes".
- S_1 : "La première expérience aléatoire est un succès".
- S_2 : "La deuxième expérience aléatoire est un succès".

On introduit les matrices suivantes :

$$G_1=\begin{pmatrix}P(S_1)\\P(\overline{S_1})\end{pmatrix},G_2=\begin{pmatrix}P(S_2)\\P(\bar{S_2})\end{pmatrix},\text{ et } C=\begin{pmatrix}P(D)\\P(\bar{D})\end{pmatrix}.$$

1. Évaluer $P(D)$ et $P(\bar{D})$.

2. (a) Montrer qu'il existe A une matrice d'ordre 2 telle que :

$$G_1 = AC.$$

(b) Calculer $P(S_1)$.

3. (a) Montrer qu'il existe B une matrice d'ordre 2 telle que :

$$G_2 = B^2C.$$

(b) Calculer $P(S_2)$.

Correction :

1. Ω, l'univers lié au tirage dans l'urne 1 est l'ensemble des 3-combinaisons des 5 jetons de l'urne 1 (car on tire simultanément trois jetons de l' urne U_1). On a donc $\text{Card}(\Omega) = \binom{5}{3}$. On munit Ω de P la probabilité uniforme (car on tire au hasard) d'où :

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{\text{Card}(D)}{10}. \end{aligned}$$

Pour réaliser D, je :

- choisis une boule rouge ($\binom{2}{1}$ choix)
- puis je choisis une boule bleue ($\binom{1}{1}$ choix)
- puis je choisis une boule blanche ($\binom{2}{1}$ choix)

On a donc $\text{Card}(D) = \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{2}{1}$, soit $\text{Card}(D) = 4$. On en déduit que $P(D) = \dfrac{4}{10}$ soit $P(D) = \dfrac{2}{5}$. Ajoutons que $P(\bar{D}) = 1 - P(D)$ pour conclure :

$$P(D) = \frac{2}{5} \text{ et } P(\bar{D}) = \frac{3}{5}$$

2. (a) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(D, \bar{D})$, événements de probabilité non nulle, on a :

$$P(S_1) = P_D(S_1)P(D) + P_{\bar{D}}(S_1)P(\bar{D}).$$

Pour la même raison, on a :

$$P(\bar{S_1}) = P_D(\bar{S_1})P(D) + P_{\bar{D}}(\bar{S_1})P(\bar{D}).$$

Posons $A = \begin{pmatrix} P_D(S_1) & P_{\bar{D}}(S_1) \\ P_D(\bar{S_1}) & P_{\bar{D}}(\bar{S_1}) \end{pmatrix}$. On a alors :

$$G_1 = AC.$$

On a $G_1 = AC$ avec $A = \begin{pmatrix} P_D(S_1) & P_{\bar{D}}(S_1) \\ P_D(\bar{S_1}) & P_{\bar{D}}(\bar{S_1}) \end{pmatrix}$.

(b) on en déduit que :

$$P(S_1) = \frac{2}{5}P_D(S_1) + \frac{3}{5}P_{\bar{D}}(S_1)$$

Si D a lieu, on choisit l'urne U_2 dans laquelle il y a 8 jetons dont 5 marqués 1, on a donc :

$$P_D(S_1) = \frac{5}{8}.$$

Si $\bar{D}$ a lieu, on choisit l'urne U_2 dans laquelle il y a 8 jetons dont 3 marqués 1, on a donc :

$$P_{\bar{D}}(S_1) = \frac{3}{8}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} P(S_1) &= \frac{2}{5}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{8} \\ &= \frac{10+9}{40}. \end{aligned}$$

$P(S_1) = \dfrac{19}{40}$.

3. (a) On introduit l'événement U : "On a obtenu un jeton marqué 1 à l'issue de la deuxième étape de la seconde expérience aléatoire".
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(D,\bar{D})$, événements de probabilité non nulle, on a :

$$P(U) = P_D(U)P(D) + P_{\bar{D}}(U)P(\bar{D}).$$

Pour la même raison, on a :

$$P(\bar{U}) = P_D(\bar{U})P(D) + P_{\bar{D}}(\bar{U})P(\bar{D}).$$

Posons $B_1 = \begin{pmatrix} P_D(U) & P_{\bar{D}}(U) \\ P_D(\bar{U}) & P_{\bar{D}}(\bar{U}) \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} P(U) \\ P(\bar{U}) \end{pmatrix}$, on a alors :

$$G = B_1C$$

Par le même raisonnement (utilisation de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(U,\bar{U})$, événements de probabilité non nulle), on a : $G_2 = B_2G$ avec $B_2 = \begin{pmatrix} P_U(S_2) & P_{\bar{U}}(S_2) \\ P_U(\bar{S_2}) & P_{\bar{U}}(\bar{S_2}) \end{pmatrix}$.
on en déduit que :$G = B_2B_1C$.
Si D a lieu, on choisit l'urne U_4 dans laquelle il y a 8 jetons dont n marqués 1, on a donc :

$$P_D(U) = \frac{n}{8} \text{ et } P_D(\bar{U}) = \frac{8-n}{8}.$$

Si $\bar{D}$ a lieu, on choisit l'urne U_5 dans laquelle il y a 8 jetons dont $8-n$ marqués 1, on a donc :

$$P_D(U) = \frac{8-n}{8} \text{ et } P_D(\bar{U}) = \frac{n}{8}.$$

On en déduit que :

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{n}{8} & \frac{8-n}{8} \\ \frac{8-n}{8} & \frac{n}{8} \end{pmatrix}$$

Si U a lieu, on choisit l'urne U_4 dans laquelle il y a 8 jetons dont n marqués 1, on a donc :

$$P_U(S_2) = \frac{n}{8} \text{ et } P_U(\bar{S_2}) = \frac{8-n}{8}.$$

Si $\bar{U}$ a lieu, on choisit l'urne U_5 dans laquelle il y a 8 jetons dont $8-n$ marqués 1, on a donc :

$$P_{\bar{U}}(S_2) = \frac{n}{8} \text{ et } P_{\bar{U}}(\bar{S_2}) = \frac{8-n}{8}.$$

On en déduit que :

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{n}{8} & \frac{8-n}{8} \\ \frac{8-n}{8} & \frac{n}{8} \end{pmatrix}$$

Posons $B = \begin{pmatrix} \frac{n}{8} & \frac{8-n}{8} \\ \frac{8-n}{8} & \frac{n}{8} \end{pmatrix}$. On a alors, d'après $B_1 = B$ et $B_2 = B$.

On a alors, d'après $G_2 = B^2C$. On a $G_2 = B^2C$ avec $B = \begin{pmatrix} \frac{n}{8} & \frac{8-n}{8} \\ \frac{8-n}{8} & \frac{n}{8} \end{pmatrix}$.

(b) on a :

$$P(S_2) = \frac{n}{8}P(U) + \frac{8-n}{8}P(\bar{U}).$$

Or, $P(U) = P_D(U)P(D) + P_{\bar{D}}(U)P(\bar{D})$, d'où :

$$P(U) = \frac{n}{8} \times \frac{2}{5} + \frac{8-n}{8} \times \frac{3}{5}$$

soit $P(U) = \frac{24-n}{40}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} P(S_2) &= \frac{n}{8} \times \frac{24-n}{40} + \frac{8-n}{8} \times \frac{16+n}{40} \\ &= \frac{n}{8}\left(\frac{8-n}{20}\right) + \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

On a : $P(S_2) = \frac{n}{8}\left(\frac{8-n}{20}\right) + \frac{2}{5}$.

Exercice 7 Probabilités et réduction matricielle : les souris de laboratoire

Partie I - Puissances de A

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice P est inversible, déterminer P^{-1}.
2. Déterminer les réels λ tels que la matrice $(A - \lambda I_3)$ ne soit pas inversible.
3. (a) Montrer que : $P^{-1}AP = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Soit k un entier naturel, calculer N^k et D^kN.
   (c) En déduire : $(P^{-1}AP)^n = (2^n - 1)N + D$ si n est un entier impair
   Et $(P^{-1}AP)^n = (2^n - 1)N + I_3$ si n est un entier pair.
4. Calculer PDP^{-1} et PNP^{-1}. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} & 2^n - 1 \\ \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Partie II - Application

Des étudiants s'intéressant au comportement des souris ont mis au point le protocole suivant. Ils placent une souris dans une boite comportant trois issues, une issue E très éclairée, une issue F éclairée par la lumière du jour et dégageant un air frais et enfin une issue G éclairée elle aussi par la lumière du jour mais donnant sur un morceau de gruyère appétissant. Après que la souris ait choisi son issue, les étudiants la remettent au centre de la boite, puis ils répètent l'expérience. Ils ont observé les résultats suivants : Lorsque la souris a choisi la sortie E, elle sort la fois suivante en F ou G avec la même probabilité. Lorsqu'elle a choisi la sortie F, elle sort la fois suivante en E ou G avec la même probabilité. Lorsqu'elle a choisi la sortie G, elle la choisit de nouveau systématiquement la fois suivante. Aujourd'hui les étudiant effectuent leurs expériences trente fois devant leur professeur. À la première étape la souris est sortie par l'issue E, c'est à dire $e_1 = 1$, avec les notations ci-dessous.

On note les événements :

E_n : la souris choisit la sortie E à la n^{eme} étape, et $e_n = \mathbb{P}(E_n)$,
F_n : la souris choisit la sortie F à la n^{eme} étape, et $f_n = \mathbb{P}(F_n)$,
G_n : la souris choisit la sortie G à la n^{eme} étape, et $g_n = \mathbb{P}(G_n)$,
ceci pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Déterminer e_2, f_2 et g_2.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice C telle que : $\forall n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} e_{n+1} \\ f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \\ g_n \end{pmatrix}$. Exprimer C en fonction de la matrice A de la partie I.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} e_n \\ f_n \\ g_n \end{pmatrix} = C^{n-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}$
3. En utilisant la partie I, donner l'expression de e_n, f_n et g_n, en fonction de n.

Correction :

<u>Partie I</u> - Puissances de A

1. On utilise la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \leftarrow l_1 + l_2 \\ l_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \leftarrow \frac{1}{2} l_2 \\ l_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} l_1 \leftarrow l_1 - l_2 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}
\end{array}$$

   Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On calcule le rang de $A - \lambda I_3$ en fonction de λ.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} & & \\
\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} l_2 \\ l_1 \\ l_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \leftarrow l_2 + \lambda l_1 \\ l_3 \end{array}
\end{array}$$

   Ainsi, $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible (ie n'est pas de rang 3) si et seulement si $1 - \lambda^2 = 0$ ou $2 - \lambda = 0$. C'est-à-dire, si $\lambda = 2$, 1 ou -1.

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D+N.
\end{aligned}$$

(b) On détermine N^k. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N.$$

Ainsi, $N^2 = N$. On en déduit par une récurrence immédiate (**à rédiger rapidement**) que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N^k = N$.
Attention : $N^0 = I_3$.
On a :

$$\begin{aligned}
D^kN &= \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N.
\end{aligned}$$

NB : ne pas faire de récurrence pour le calcul de D^k, c'est du cours !

(c) On veut utiliser la formule de Newton, pour cela, on vérifie d'abords que les matrices N et D commutent : On a vu $DN = N$, et on a :

$$\begin{aligned}
ND &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N.
\end{aligned}$$

! Ne pas oublier ce point (-0.5).

Ainsi, on applique la formule de Newton pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(P^{-1}AP)^n &= \Big(D+N\Big)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k N^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} D^k N^{n-k} + D^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} D^k N + D^n && \text{car } \forall l \in \mathbb{N}^*,\ N^l = N \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} N + D^n && \text{car } \forall k \in \mathbb{N},\ D^kN = N \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\right) N + D^n.
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-1=2^n-1.$$

et

$$D^n=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{cases}I_3 & \text{si } n \text{ pair}\\ D & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$$

NB : on peut aussi faire une récurrence.

4. On a :

$$\begin{aligned}PDP^{-1}&=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}PNP^{-1}&=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Enfin, on démontre par récurrence la propriété :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$$

En effet, en posant $\mathscr{P}_n$ la proposition : $(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$.
On a $\mathscr{P}_0$ évident, et pour n fixé tel que $\mathscr{P}_n$ est vrai :

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^{n+1}=&(P^{-1}AP)^nP^{-1}AP=P^{-1}A^nPP^{-1}AP\\=&P^{-1}A^{n+1}P.\end{aligned}$$

D'où l'hérédité et la conclusion.
Cela donne au final en utilisant la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ P^{-1}A^nP=\begin{cases}(2^n-1)N+D & \text{si } n \text{ impair}\\(2^n-1)N+I_3 & \text{si } n \text{ pair}\end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire :}\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\begin{cases}(2^n-1)PNP^{-1}+PDP^{-1} & \text{si } n \text{ impair}\\(2^n-1)PNP^{-1}+I_3 & \text{si } n \text{ pair}\end{cases}.$$

Ce qui donne pour n est impair :

$$\begin{aligned}A^n=&(2^n-1)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}0&1&(2^n-1)\\1&0&(2^n-1)\\0&0&2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+(-1)^n}{2}&\frac{1-(-1)^n}{2}&2^n-1\\\frac{1-(-1)^n}{2}&\frac{1+(-1)^n}{2}&2^n-1\\0&0&2^n\end{pmatrix},\end{aligned}$$

si n est impair, on trouve de même :

$$\begin{aligned}A^n =&(2^n-1)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}1&0&2^n-1\\0&1&2^n-1\\0&0&2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+(-1)^n}{2}&\frac{1-(-1)^n}{2}&2^n-1\\\frac{1-(-1)^n}{2}&\frac{1+(-1)^n}{2}&2^n-1\\0&0&2^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

<u>Partie II</u> - Aplication

1. À la première étape, la souris est sorti par la sortie E. Ainsi, à la deuxième étape, elle choisira F ou G avec la même probabilité. On en déduit donc :

$$\begin{aligned}p(E_2)&=0 &&\text{ie } e_2=0\\ p(F_2)&=p(G_2) &&\text{ie } f_2=g_2\end{aligned}$$

Comme (E_2,F_2,G_2) consituent un système complet d'évenements, on en déduit :$f_2=g_2=\frac{1}{2}$.
NB : même si cela n'est pas obligatoire, il est intéressant de justifier $f_2=\frac{1}{2}$.

2. (a) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\Big(E_n,F_n,G_n\Big)$. L'énoncé donne les valeurs de :

$$\begin{aligned}&p_{E_n}(E_{n+1})=0 &&p_{E_n}(F_{n+1})=\frac{1}{2} &&p_{E_n}(G_{n+1})=\frac{1}{2}\\ &p_{F_n}(E_{n+1})=\frac{1}{2} &&p_{F_n}(F_{n+1})=0 &&p_{F_n}(G_{n+1})=\frac{1}{2}\\ &p_{G_n}(E_{n+1})=0 &&p_{G_n}(F_{n+1})=0 &&p_{G_n}(G_{n+1})=1.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}e_{n+1}=p(E_{n+1})=&p(E_n)p_{E_n}(E_{n+1})+p(F_n)p_{F_n}(E_{n+1})+p(G_n)p_{G_n}(E_{n+1})\\ =&e_n\underbrace{p_{E_n}(E_{n+1})}_{=0}+f_n\underbrace{p_{F_n}(E_{n+1})}_{\frac{1}{2}}+g_n\underbrace{p_{G_n}(E_{n+1})}_{=0}\\ =&\frac{1}{2}f_n.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}f_{n+1}=p(F_{n+1})=&p(E_n)p_{E_n}(F_{n+1})+p(F_n)p_{F_n}(F_{n+1})+p(G_n)p_{G_n}(F_{n+1})\\ =&\frac{1}{2}e_n.\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}g_{n+1}=p(G_{n+1})=&p(E_n)p_{E_n}(G_{n+1})+p(F_n)p_{F_n}(G_{n+1})+p(G_n)p_{G_n}(G_{n+1})\\ =&\frac{1}{2}e_n+\frac{1}{2}f_n+g_n.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix}e_{n+1}\\f_{n+1}\\g_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_n\\f_n\\g_n\end{pmatrix}$$

On en déduit la valeur de C

$$C=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}.$$

On constate :

$$C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}A^T.$$

(b) Par récurrence, on en déduit la propriété :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \\ g_n \end{pmatrix} = C^{n-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} C^{n-1} &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(A^T\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(A^{n-1}\right)^T \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2} & \frac{1-(-1)^{n-1}}{2} & 0 \\ \frac{1-(-1)^{n-1}}{2} & \frac{1+(-1)^{n-1}}{2} & 0 \\ 2^{n-1}-1 & 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-(-1)^n}{2^n} & \frac{1+(-1)^n}{2^n} & 0 \\ \frac{1+(-1)^n}{2^n} & \frac{1-(-1)^n}{2^n} & 0 \\ 1-\frac{1}{2^{n-1}} & 1-\frac{1}{2^{n-1}} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \\ g_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1-(-1)^n}{2^n} & \frac{1+(-1)^n}{2^n} & 0 \\ \frac{1+(-1)^n}{2^n} & \frac{1-(-1)^n}{2^n} & 0 \\ 1-\frac{1}{2^{n-1}} & 1-\frac{1}{2^{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n} \\ \frac{1-(-1)^{n-1}}{2^n} \\ 1-\frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$e_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n} \qquad f_n = \frac{1-(-1)^{n-1}}{2^n} \qquad g_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 8 On considère trois urnes U, V et W contenant respectivement :

- urne U : 3 boules blanches et 5 boules noires.
- urne V : 6 boules blanches et 2 boules noires.
- urne W : 1 boule blanche et 6 boules noires.

1. On choisit une urne au hasard et une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
2. On recommence l'expérience en tirant cette fois-ci deux boules avec remise.
   Quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur ?
3. Même question pour un tirage sans remise.

Correction :

1. On utilise la formule des probabilités totales avec le SCE (U, V, W) :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(U \cap B) + p(V \cap B) + p(W \cap B) \\ &= p(U)p_U(B) + p(V)p_V(B) + p(W)p_W(B) \\ &= \frac{1}{3}\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\frac{6}{8} + \frac{1}{3}\frac{1}{7} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{21} = \frac{71}{168} \end{aligned}$$

2. On note E l'événement avoir deux boules de la même couleur. On a :

$$E = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2).$$

On peut refaire le même calcul, ou simplement noter que l'on a :

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap B_2) =& p(B_1)^2 && \text{car il y a remise} \\ =& \left(\frac{71}{168}\right)^2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} p(N_1 \cap N_2) =& p(N_1)^2 = \Big(1 - p(B_1)\Big)^2 && \text{car} p(N_1) + p(B_1) = 1 \\ =& \left(\frac{97}{168}\right)^2 \end{aligned}$$

Au final :

$$p(E) = \left(\frac{71}{168}\right)^2 + \left(\frac{97}{168}\right)^2 = \frac{71^2 + 97^2}{168^2}.$$

3. On procède de même :

$$E = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2),$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap B_2) =& p(U \cap B_1 \cap B_2) + p(V \cap B_1 \cap B_2) + p(W \cap B_1 \cap B_2) \\ =& p(U) p_U(B_1) p_{U \cap B_1}(B_2) + p(V) p_V(B_1) p_{V \cap B_1}(B_2) + p(W) p_w(B_1) p_{W \cap B_1}(B_2) \\ =& \frac{1}{3}\frac{3}{8}\frac{2}{7} + \frac{1}{3}\frac{6}{8}\frac{5}{7} + \frac{1}{3}\frac{1}{7}\frac{0}{6} \\ =& \frac{2}{56} + \frac{10}{56} = \frac{12}{56}. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} p(N_1 \cap N_2) =& p(U \cap N_1 \cap N_2) + p(V \cap N_1 \cap N_2) + p(W \cap N_1 \cap N_2) \\ =& p(U) p_U(N_1) p_{U \cap N_1}(N_2) + p(V) p_V(N_1) p_{V \cap N_1}(N_2) + p(W) p_W(N_1) p_{W \cap N_1}(N_2) \\ =& \frac{1}{3}\frac{5}{8}\frac{4}{7} + \frac{1}{3}\frac{2}{8}\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\frac{6}{7}\frac{5}{6} \\ =& \frac{1}{3 \times 8 \times 7}(20 + 2) + \frac{5}{3 \times 7} \\ =& \frac{1}{3 \times 8 \times 7}(20 + 2 + 40) \\ =& \frac{62}{3 \times 8 \times 7} \end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{aligned} p(E) =& p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap N_2) \\ =& \frac{12}{8 \times 7} + \frac{62}{3 \times 8 \times 7} \\ =& \frac{36 + 62}{3 \times 8 \times 7} = \frac{98}{3 \times 8 \times 7}. \end{aligned}$$

✯ Exercices de concours

Exercice 9 Jeu avec des pièces inconnues

On dispose de deux pièce, l'une équilibrée, l'autre faussée permet d'obtenir face avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Malheureusement, on ne sait plus quelle est la pièce truquée.

On propose deux stratégies pour, à long terme, avoir le plus de chance d'obtenir face.

1. **Stratégie 1** On lance une pièce (choisie au hasard). Si c'est face, on joue avec cette pièce, sinon on joue avec l'autre, et on ne change plus de pièce par la suite.
   Déterminer la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer avec cette stratégie.
2. **Stratégie 2** On lance une pièce (choisie au hasard). Si on obtient face, on rejoue la même pièce, sinon, on change de pièce. Mais désormais, on procède ainsi à chaque tirage.
   On note : F_n « *obtenir face au n-ième tirage* » et T_n « *on joue la pièce truquée au n-ième tirage*.

(a) Déterminer $p(T_{n+1})$ en fonction de $p(T_n)$. Puis $p(T_n)$ en fonction de n.
(b) Quelle est la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer ?

3. Quelle est la meilleur stratégie à long terme pour avoir le plus de chance d'obtenir face ?

1. **Stratégie 1**
Commentaire : on reconnaît une expérience aléatoire en deux étapes : choix de la pièce (tirage de test) puis tirage de cette pièce.
La première question à se poser est bien sûr : quel est la probabilité d'utiliser la pièce équilibrée.
On note ainsi E l'événement : « on joue avec la pièce équilibrée ». Cet événement arrive de deux manière : soit on a choisi la pièce équilibré au lancer de test et l'on n'a pas changé, soit on a choisi la pièce truquée et l'on a changé.
On note donc A l'événement : « au lancer de test, on a choisi la pièce équilibrée ». On a : $p(A) = p(\overline{A}) = \frac{1}{2}$ puisque l'énoncé indique *au hasard*.
On utilise le SCE $(A, \overline{A})$ et la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(E) =& p(A \cap E) + p(\overline{A} \cap E) \\ =& p(A)p_A(E) + p(\overline{A})p_{\overline{A}}(E). \end{aligned}$$

Puis, $p_A(E) = p_A(F) = \frac{1}{2}$ puisqu'avec la pièce équilibrée, il y a une chance sur deux d'avoir F. Enfin, $p_{\overline{A}}(E) = p_{\overline{A}}(P) = \frac{1}{3}$, puisqu'avec la pièce truquée, il y a une chance sur trois d'avoir P (et donc de changer de pièce au lancer de test).
On en déduit :

$$\begin{aligned} p(E) =& p(A)p_A(E) + p(\overline{A})p_{\overline{A}}(E) \\ =& \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

On note ensuite pour $n \in \mathbb{N}$, F_n : « avoir face au n-ième tirage.
On utilise le SCE $\left(E, \overline{E}\right)$ pour obtenir pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p(F_n) =& p\left(E \cap F_n\right) + p\left(\overline{E} \cap F_n\right) && \text{probas totales} \\ =& p\left(E\right)p_E\left(F_n\right) + p\left(\overline{E}\right)p_{\overline{E}}\left(F_n\right). \end{aligned}$$

On a vu : $p(E) = \frac{5}{12}$, et donc $p(\overline{E}) = \frac{7}{12}$. Puis $p_E(F_n) = \frac{1}{2}$, tandis que $p_{\overline{E}}(F_n) = \frac{2}{3}$.
Ce qui donne

$$\begin{aligned} p(F_n) =& p\left(E\right)p_E\left(F_n\right) + p\left(\overline{E}\right)p_{\overline{E}}\left(F_n\right) \\ =& \frac{5}{12}\frac{1}{2} + \frac{7}{12}\frac{2}{3} = \frac{43}{72}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(F_n) = \frac{43}{72}$.

R on peut aussi utiliser le SCE : $(A \cap F_1, A \cap \overline{F_1}, \overline{A} \cap F_1, \overline{A} \cap \overline{F_1})$ pour calculer directement $p(F_n)$.

2. **Stratégie 2**
Commentaire : La stratégie 2 revient à un modèle de Markov : à chaque étape, on change d'état (de pièce) avec une probabilité qui ne dépends que de l'état dans lequel on se trouve (de la pièce que l'on joue).
(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on utilise le SCE $\left(T_n, \overline{T_n}\right)$:

$$\begin{aligned} p(T_{n+1}) =& p\left(T_n \cap T_{n+1}\right) + p\left(\overline{T_n} \cap T_{n+1}\right) \\ =& p\left(T_n\right)p_{T_n}\left(T_{n+1}\right) + p\left(\overline{T_n}\right)p_{\overline{T_n}}\left(T_{n+1}\right) \\ =& p\left(T_n\right)p_{T_n}\left(F_n\right) + p\left(\overline{T_n}\right)p_{\overline{T_n}}\left(\overline{F_n}\right) \\ =& p\left(T_n\right)\frac{2}{3} + \left(1 - p(T_n)\right)\frac{1}{2} \\ =& p(T_n)\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ =& \frac{1}{6}p(T_n) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(T_{n+1}) = \frac{1}{6}p(T_n) + \frac{1}{2}$. La suite $\left(p(T_n)\right)_{n\geqslant 1}$ est donc arithmético-géométrique.
On détermine l tel que $p(T_n) - l$ est géométrique. Cela donne :

$$\begin{aligned} p(T_{n+1}) - l =& \frac{1}{6}p(T_n) + \frac{1}{2} - l \\ =& \frac{1}{6}\left(p(T_n) - l\right) + \frac{1}{2} - \frac{5}{6}l. \end{aligned}$$

Il faut donc choisir l tel que $\frac{1}{2} - \frac{5}{6}l = 0$, *i.e.* $l = \frac{3}{5}$.
Ainsi, $\left(p(T_n) - \frac{3}{5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(T_n) = \frac{1}{6^{n-1}}\left(p(T_1) - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}.$$

Comme $p(T_1) = \frac{1}{2}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(T_n) = -\frac{1}{10}\frac{1}{6^{n-1}} + \frac{3}{5}.$$

! Attention au fait que c'est $p(T_1)$ que l'on connaît (et donc que c'est $\frac{1}{6^{n-1}}$).

(b) On utilise le sce $\left(T_n, \overline{T_n}\right)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(F_n) =& p(T_n \cap F_n) + p(\overline{T_n} \cap F_n) && \text{probas totales} \\ =& p(T_n)p_{T_n}(F_n) + p(\overline{T_n})p_{\overline{T_n}}(F_n) \\ =& p(T_n)\frac{2}{3} + (1 - p(T_n))\frac{1}{2} \\ =& \left(-\frac{1}{10}\frac{1}{6^{n-1}} + \frac{3}{5}\right)\frac{2}{3} + \left(1 + \frac{1}{10}\frac{1}{6^{n-1}} - \frac{3}{5}\right)\frac{1}{2} \\ =& \left(\frac{1}{10}\frac{1}{6^{n-1}}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{5}\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\frac{1}{2} \\ =& -\frac{1}{10}\frac{1}{6^n} + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

3. Pour la stratégie 1, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(F_n) = \frac{43}{72}$, tandis qu'avec la stratégie 2, on a : $\lim_{n\infty} p(F_n) = \frac{3}{5}$, la question est donc de vérifier :

$$\frac{3}{5} > \frac{43}{72} \Leftrightarrow 216 > 215 \text{ VRAI.}$$

Ainsi, la stratégie 2 est meilleure à long terme.

Exercice 10 Paradoxe de Parrondo

Le but de ce problème est d'étudier un paradoxe de la théorie des jeux découvert par Juan Parrondo, un chercheur espagnol en physique théorique. Etant donné un couple de nombres réels $(a,b) \in]-1,1[^2$, on considère deux pièces de monnaie notées A et B qui donnent «pile» avec probabilité $\frac{1+a}{2}$ et $\frac{1+b}{2}$ respectivement. Le jeu de Parrondo noté $\mathscr{P}(a,b)$ consiste en une série de lancers d'une des deux pièces (qui peut être différente à chaque lancer). Le joueur débute le jeu avec une cagnotte nulle et à chaque lancer il gagne 1 euro s'il obtient «pile» et il perd 1 euro s'il obtient «face» (la cagnotte peut évoluer négativement). Le montant de la cagnotte avant le n-ième lancer est noté c_n (ainsi $c_1 = 0$). Le choix de la pièce au n-ième lancer se fait de la façon suivante : si c_n est un multiple de 3 alors le joueur joue avec la pièce A, sinon il joue avec la pièce B. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit les événements suivants :

- X_n : «le montant de la cagnotte avant le n-ième lancer est un multiple de 3» («$\exists k \in \mathbb{Z},\ c_n = 3k$») ;
- Y_n : «$\exists k \in \mathbb{Z},\ c_n = 3k+1$» ;
- Z_n : «$\exists k \in \mathbb{Z},\ c_n = 3k+2$» ;
- G_n : «le joue ajoute 1 euro à la cagnotte au n-ième lancer».

Si la limite $\lim_{n\to+\infty} P(G_n)$ existe, on dira que le jeu $\mathscr{P}(a,b)$ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{favorable} & \text{si} & \lim_{n\to+\infty} P(G_n) > 1/2 \\ \text{équilibré} & \text{si} & \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = 1/2 \\ \text{défavorable} & \text{si} & \lim_{n\to+\infty} P(G_n) < 1/2 \end{array}\right. .$$

I) Etude d'un cas particulier. Pour cette question, on suppose que les pièces A et B sont identiques et qu'elles donnent «pile» plus souvent que «face». On suppose donc que $a = b = \varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer que le jeu $\mathscr{P}(\varepsilon,\varepsilon)$ est favorable.

II) Le critère de Parrondo. On considère le jeu $\mathscr{P}(a,b)$ avec un couple $(a,b) \in]-1,1[^2$ quelconque.

1. Déterminer $P(X_1)$, $P(Y_1)$ et $P(Z_1)$.
2. Déterminer $P(X_2)$, $P(Y_2)$ et $P(Z_2)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Que peut-on dire des événements X_n, Y_n et Z_n (sans justifier votre réponse) ?
4. Justifier que $P(X_{n+1}) = \frac{(1-b)}{2}P(Y_n) + \frac{(1+b)}{2}P(Z_n)$.
5. Déterminer des expressions de $P(Y_{n+1})$ et $P(Z_{n+1})$ en fonction de a, b, $P(X_n)$, $P(Y_n)$ et $P(Z_n)$.
6. En déduire que $\begin{pmatrix} P(X_{n+1}) \\ P(Y_{n+1}) \\ P(Z_{n+1}) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} P(X_n) \\ P(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix}$ où $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1-b & 1+b \\ 1+a & 0 & 1-b \\ 1-a & 1+b & 0 \end{pmatrix}$.
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\begin{pmatrix} P(X_n) \\ P(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
8. On admet qu'il existe une matrice $Q \in \mathscr{G}\ell_3(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}MQ = \mathrm{diag}(1,\lambda,\mu)$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ avec $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$. Justifier que $M^{n-1} = Q \times \mathrm{diag}(1,\lambda^{n-1},\mu^{n-1}) \times Q^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
9. On admet de plus que les matrices Q et Q^{-1} sont de la forme :

$$Q = \frac{1}{2ab+b^2+9}\begin{pmatrix} b^2+3 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ ab+a-b+3 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ ab-a+b+3 & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & q'_{1,2} & q'_{1,3} \\ 1 & q'_{2,2} & q'_{2,3} \\ 1 & q'_{3,2} & q'_{3,3} \end{pmatrix}$$

où les coefficients $(q_{i,j})$ et $(q'_{i,j})$ sont des nombres réels. A l'aide des questions précédentes, déterminer des expressions de $P(X_n)$, $P(Y_n)$ et $P(Z_n)$ en fonction de a, b, λ, μ, n et $(q_{i,j})$.

10. En déduire les valeurs de $\lim_{n\to+\infty} P(X_n)$, $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n)$.
11. Déterminer une expression de $P(G_n)$ en fonction de a, b, $P(X_n)$, $P(Y_n)$ et $P(Z_n)$.
12. A l'aide des questions précédentes, montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{1}{2} + \frac{3(ab^2+a+2b)}{2(2ab+b^2+9)}$.
13. Justifier que $\forall (a,b) \in]-1,1[^2,\ 2ab+b^2+9 > 0$.
14. En déduire le **critère de Parrondo** :

$$\boxed{\text{le jeu } \mathscr{P}(a,b) \text{ est } \begin{cases} \text{favorable} & \text{si} \quad \delta(a,b) > 0 \\ \text{équilibré} & \text{si} \quad \delta(a,b) = 0 \\ \text{défavorable} & \text{si} \quad \delta(a,b) < 0 \end{cases} \quad \text{où } \delta(a,b) = ab^2+a+2b.}$$

III) Etudes d'exemples. Les questions suivantes utilisent le critère de Parrondo énoncé ci-dessus.

1. Montrer que le jeu $\mathscr{P}\left(\frac{4}{5},-\frac{1}{2}\right)$ est équilibré.
2. Soit $\varepsilon > 0$ dans un petit voisinage de 0. Montrer que $\delta\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{20}(20\varepsilon^2-4\varepsilon+49)$ et en déduire que le jeu $\mathscr{P}\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$ est favorable.
3. Montrer que le jeu $\mathscr{P}\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{4}\right)$ est défavorable.
4. Soit $\varepsilon > 0$ dans un petit voisinage de 0. Sans chercher à développer l'expression de $\delta\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)$, justifier que le jeu $\mathscr{P}\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)$ est défavorable.

IV) Le paradoxe de Parrondo. On considère désormais un nouveau jeu qui consiste toujours en une série de lancers de pièces dont chaque «pile» augmente le montant de la cagnotte de 1 euro et chaque «face» le baisse de 1 euro. Mais avant chaque lancer, le joueur choisit au hasard et avec même probabilité (par exemple à l'aide d'un autre lancer d'une pièce équilibré) s'il va utiliser le couple de pièces du jeu $\mathscr{P}(\varepsilon,\varepsilon)$ ou bien le couple de pièces du jeu $\mathscr{P}\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$ où $\varepsilon > 0$ est dans un petit voisinage de 0. Autrement dit, le joueur joue alternativement et aléatoirement à deux jeux de Parrondo favorables. On fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $(a,b) \in]-1,1[^2$ on note $\mathscr{P}_n(a,b)$ l'événement «le joueur utilise le couple de pièces du jeu $\mathscr{P}(a,b)$ au n-ième lancer».

1. Justifier que $P_{X_n}(G_n) = \frac{1}{2}P_{X_n\cap\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon)}(G_n) + \frac{1}{2}P_{X_n\cap\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(G_n)$ et en déduire une expression de $P_{X_n}(G_n)$ en fonction de ε.
2. Déterminer des expressions similaires pour $P_{Y_n}(G_n)$ et $P_{Z_n}(G_n)$.
3. Montrer que jouer à ce nouveau jeu revient à jouer au jeu $\mathscr{P}\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)$, c'est-à-dire que $P(G_n) = P_{\mathscr{P}_n\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)}(G_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et expliquer pourquoi ce résultat est paradoxal.

Correction :

I) Etude d'un cas particulier. On suppose que $a = b = \varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0,1[$. Dans ce cas, le joueur joue avec une pièce identique à chaque lancer, quel que soit le montant de la cagnotte. Par conséquent, la probabilité de gagner 1 euro à chaque lancer est constante et égale à la probabilité d'obtenir «pile». Donc :

$$P(G_n) = \frac{1+a}{2} = \frac{1+b}{2} = \frac{1+\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{1+\varepsilon}{2} > \frac{1}{2}$$

car $\varepsilon > 0$. On en déduit que le jeu $\mathscr{P}(\varepsilon,\varepsilon)$ est favorable.

Attention au piège : la justification $P(G_n) > \frac{1}{2}$ est insuffisante pour justifier que $\lim_{n\to+\infty} P(G_n) > \frac{1}{2}$ car on passe à une inégalité large à la limite (pensez à la suite $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$). Il faut donc bien préciser que la suite $(P(G_n))_{n\geqslant 1}$ est constante.

II) Le critère de Parrondo. On considère le jeu $\mathscr{P}(a,b)$ avec $(a,b) \in]-1,1[^2$ quelconque.

1. Puisque le joueur débute le jeu avec une cagnotte nulle, c'est-à-dire $c_1 = 0$, et que 0 est évidemment un multiple de 3, on a :

$$P(X_1) = 1 \quad \text{et} \quad P(Y_1) = P(Z_1) = 0.$$

2. D'après le résultat précédent, le joueur choisit de jouer avec la pièce A au premier lancer. Après ce lancer, sa cagnotte sera donc de 1 euro s'il obtient «pile» et de -1euro s'il obtient «face», c'est-à-dire :

$$P(\{c_2 = 1\}) = \frac{1+a}{2} \quad \text{et} \quad P(\{c_2 = -1\}) = 1 - \frac{1+a}{2} = \frac{1-a}{2}.$$

Or $1 = 3\times 0 + 1$ et $-1 = 3\times(-1)+2$. On en déduit donc que :

$$P(X_2) = 0, \quad P(Y_2) = \frac{1+a}{2} \quad \text{et} \quad P(Z_2) = \frac{1-a}{2}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Les événements X_n, Y_n et Z_n forment un système complet d'événements.

La justification est que tout nombre entier relatif $c \in \mathbb{Z}$ est nécessairement de la forme suivante : $3k$, $3k+1$ ou bien $3k+2$ car le reste de la division euclidienne de c par 3 est 0, 1 ou 2 (k est le quotient).

4. D'après le résultat précédent, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1}) = P_{X_n}(X_{n+1})P(X_n) + P_{Y_n}(X_{n+1})P(Y_n) + P_{Z_n}(X_{n+1})P(Z_n).$$

Or le montant de la cagnotte après le n-ième lancer est soit égale à $c_{n+1} = c_n + 1$ ou bien à $c_{n+1} = c_n - 1$. En particulier, si le montant de la cagnotte avant le n-ième lancer est un multiple de 3 alors le montant de la cagnotte après ce lancer ne sera pas un multiple de 3, donc : $P_{X_n}(X_{n+1}) = 0$. De plus, si le montant de la cagnotte avant le n-ième lancer vérifie $c_n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors le joueur choisit de jouer avec la pièce B et le montant de la cagnotte après ce lancer sera un multiple de 3 si et seulement si le joueur obtient «face» (car $(3k+1)+1 = 3k+2$ et $(3k+1)-1 = 3k$), donc : $P_{Y_n}(X_{n+1}) = 1 - \frac{1+b}{2} = \frac{1-b}{2}$. De même, si le montant de la cagnotte avant le n-ième lancer vérifie $c_n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors le joueur choisit de jouer avec la pièce B et le montant de la cagnotte après ce lancer sera un multiple de 3 si et seulement si le joueur obtient «pile» (car $(3k+2)+1 = 3(k+1)$ et $(3k+2)-1 = 3k+1$), donc : $P_{Z_n}(X_{n+1}) = \frac{1+b}{2}$. On obtient en remplaçant dans la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1}) = \frac{(1-b)}{2}P(Y_n) + \frac{(1+b)}{2}P(Z_n).$$

5. De même, on a en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{cases} P(Y_{n+1}) = \dfrac{(1+a)}{2}P(X_n) + \dfrac{(1-b)}{2}P(Z_n) \\ P(Z_{n+1}) = \dfrac{(1-a)}{2}P(X_n) + \dfrac{(1+b)}{2}P(Y_n) \end{cases}.$$

6. D'après les résultats précédents, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P(X_{n+1}) \\ P(Y_{n+1}) \\ P(Z_{n+1}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{(1-b)}{2}P(Y_n)+\frac{(1+b)}{2}P(Z_n) \\ \frac{(1+a)}{2}P(X_n)+\frac{(1-b)}{2}P(Z_n) \\ \frac{(1-a)}{2}P(X_n)+\frac{(1+b)}{2}P(Y_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0\times P(X_n) & + & \frac{(1-b)}{2}\times P(Y_n) & + & \frac{(1+b)}{2}\times P(Z_n) \\ \frac{(1+a)}{2}\times P(X_n) & + & 0\times P(Y_n) & + & \frac{(1-b)}{2}\times P(Z_n) \\ \frac{(1-a)}{2}\times P(X_n) & + & \frac{(1+b)}{2}\times P(Y_n) & + & 0\times P(Z_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(1-b)}{2} & \frac{(1+b)}{2} \\ \frac{(1+a)}{2} & 0 & \frac{(1-b)}{2} \\ \frac{(1-a)}{2} & \frac{(1+b)}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n) \\ P(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix} \\
&= M \begin{pmatrix} P(X_n) \\ P(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1-b & 1+b \\ 1+a & 0 & 1-b \\ 1-a & 1+b & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

7. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\begin{pmatrix} P(X_n) \\ P(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'égalité est vraie pour $n=1$ d'après le résultat de la question 1 et car $M^{1-1} = M^0 = I_3$. On suppose que l'égalité est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On a donc :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P(X_{n+1}) \\ P(Y_{n+1}) \\ P(Z_{n+1}) \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} P(X_n) \\ P(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix} \quad \text{(d'après le résultat de la question précédente)} \\
&= M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} P(X_n) \\ P(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix} \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= M^n \begin{pmatrix} P(X_n) \\ P(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix} = M^{(n+1)-1} \begin{pmatrix} P(X_n) \\ P(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix} \quad \text{(par associativité).}
\end{aligned}$$

Donc l'égalité est vraie au rang $n+1$ dès qu'elle est vraie au rang n. Elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ d'après le principe de récurrence.

8. On admet qu'il existe une matrice $Q \in \mathscr{G}\ell_3(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}MQ = \mathrm{diag}(1,\lambda,\mu)$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ avec $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ M^{n-1} = Q \times \mathrm{diag}(1,\lambda^{n-1},\mu^{n-1}) \times Q^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. L'égalité est vraie pour $n=1$ car :

$$\begin{aligned}
Q \times \mathrm{diag}(1,\lambda^{1-1},\mu^{1-1}) \times Q^{-1} &= Q \times \mathrm{diag}(1,\lambda^0,\mu^0) \times Q^{-1} = Q \times \mathrm{diag}(1,1,1) \times Q^{-1} \\
&= QI_3Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3 = M^0 = M^{1-1}.
\end{aligned}$$

On suppose que l'égalité est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. En multipliant l'hypothèse $\mathrm{diag}(1,\lambda,\mu) = Q^{-1}MQ$ à gauche par Q et à droite par Q^{-1} on obtient :

$$Q \times \mathrm{diag}(1,\lambda,\mu) \times Q^{-1} = QQ^{-1}MQQ^{-1} = I_3MI_3 = M.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
M^{(n+1)-1} &= M^n = M^{n-1} \times M \\
&= \left(Q \times \mathrm{diag}(1,\lambda^{n-1},\mu^{n-1}) \times Q^{-1}\right) \times \left(Q \times \mathrm{diag}(1,\lambda,\mu) \times Q^{-1}\right) \\
&= Q \times \left(\mathrm{diag}(1,\lambda^{n-1},\mu^{n-1}) \times Q^{-1}Q \times \mathrm{diag}(1,\lambda,\mu)\right) \times Q^{-1} \\
&= Q \times \left(\mathrm{diag}(1,\lambda^{n-1},\mu^{n-1}) \times I_3 \times \mathrm{diag}(1,\lambda,\mu)\right) \times Q^{-1} \\
&= Q \times \left(\mathrm{diag}(1,\lambda^{n-1},\mu^{n-1}) \times \mathrm{diag}(1,\lambda,\mu)\right) \times Q^{-1} \\
&= Q \times \mathrm{diag}(1,\lambda^n,\mu^n) \times Q^{-1} \\
&= Q \times \mathrm{diag}(1,\lambda^{(n+1)-1},\mu^{(n+1)-1}) \times Q^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc l'égalité est vraie au rang $n+1$ dès qu'elle est vraie au rang n. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ d'après le principe de récurrence.

9. On admet de plus que les matrices Q et Q^{-1} sont de la forme :

$$Q = \frac{1}{2ab+b^2+9}\begin{pmatrix} b^2+3 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ ab+a-b+3 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ ab-a+b+3 & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & q'_{1,2} & q'_{1,3} \\ 1 & q'_{2,2} & q'_{2,3} \\ 1 & q'_{3,2} & q'_{3,3} \end{pmatrix}$$

où les coefficients $(q_{i,j})$ et $(q'_{i,j})$ sont des nombres réels. En utilisant les résultats des questions 7 et 8, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P(X_n) \\ P(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix} &= M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Q \times \mathrm{diag}(1, \lambda^{n-1}, \mu^{n-1}) \times Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q'_{1,2} & q'_{1,3} \\ 1 & q'_{2,2} & q'_{2,3} \\ 1 & q'_{3,2} & q'_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= Q \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{n-1} \\ \mu^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2ab+b^2+9} \begin{pmatrix} b^2+3 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ ab+a-b+3 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ ab-a+b+3 & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{n-1} \\ \mu^{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(X_n) & = & \frac{1}{2ab+b^2+9}\left(b^2+3+q_{1,2}\lambda^{n-1}+q_{1,3}\mu^{n-1}\right) \\ P(Y_n) & = & \frac{1}{2ab+b^2+9}\left(ab+a-b+3+q_{2,2}\lambda^{n-1}+q_{2,3}\mu^{n-1}\right) \\ P(Z_n) & = & \frac{1}{2ab+b^2+9}\left(ab-a+b+3+q_{3,2}\lambda^{n-1}+q_{3,3}\mu^{n-1}\right) \end{array} \right. .$$

10. Puisque λ et μ sont des nombres complexes tels que $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \lambda^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \mu^{n-1} = 0$. On en déduit d'après le résultat précédent que :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n) = \frac{b^2+3}{2ab+b^2+9}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(Y_n) = \frac{ab+a-b+3}{2ab+b^2+9}$$
$$\text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} P(Z_n) = \frac{ab-a+b+3}{2ab+b^2+9}.$$

11. En raisonnant comme pour les questions 4 et 5, on a en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(G_n) &= P_{X_n}(G_n)P(X_n) + P_{Y_n}(G_n)P(Y_n) + P_{Z_n}(G_n)P(Z_n) \\
&= \frac{(1+a)}{2}P(X_n) + \frac{(1+b)}{2}P(Y_n) + \frac{(1+b)}{2}P(Z_n).
\end{aligned}$$

12. En utilisant les résultats des questions 10 et 11, on a :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} P(G_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(1+a)}{2}P(X_n) + \frac{(1+b)}{2}P(Y_n) + \frac{(1+b)}{2}P(Z_n) \right) \\
&= \frac{(1+a)}{2} \lim_{n\to+\infty} P(X_n) + \frac{(1+b)}{2} \lim_{n\to+\infty} P(Y_n) + \frac{(1+b)}{2} \lim_{n\to+\infty} P(Z_n) \\
&= \frac{(1+a)}{2} \times \frac{b^2+3}{2ab+b^2+9} + \frac{(1+b)}{2} \times \frac{ab+a-b+3}{2ab+b^2+9} + \frac{(1+b)}{2} \times \frac{ab-a+b+3}{2ab+b^2+9} \\
&= \frac{1}{2(2ab+b^2+9)} \Big(\left[b^2+3+ab^2+3a\right] + \left[ab+a-b+3+ab^2+ab-b^2+3b\right] \\
&\qquad\qquad + \left[ab-a+b+3+ab^2-ab+b^2+3b\right] \Big) \\
&= \frac{1}{2(2ab+b^2+9)} \left(b^2+9+3ab^2+3a+2ab+6b\right) \\
&= \frac{1}{2(2ab+b^2+9)} \Big(\left[2ab+b^2+9\right] + \left[3ab^2+3a+6b\right] \Big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3(ab^2+a+2b)}{2(2ab+b^2+9)}.
\end{aligned}$$

13. On a pour tout $(a,b) \in]-1,1[^2$, $2ab+b^2+9 \geqslant -2+0+9 = 7 > 0$.
14. D'après le résultat de la question 12, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(G_n) - \frac{1}{2} = \frac{3(ab^2+a+2b)}{2(2ab+b^2+9)} = \frac{3\delta(a,b)}{2(2ab+b^2+9)}.$$

Or $2ab+b^2+9 > 0$ d'après le résultat de la question précédente, donc le signe de $\lim_{n\to+\infty} P(G_n) - \frac{1}{2}$ est égal au signe de $\delta(a,b)$. On en déduit le critère de Parrondo :

$$\boxed{\text{le jeu } \mathscr{P}(a,b) \text{ est } \left\{ \begin{array}{rcl} \text{favorable} & \text{si} & \delta(a,b) > 0 \\ \text{équilibré} & \text{si} & \delta(a,b) = 0 \\ \text{défavorable} & \text{si} & \delta(a,b) < 0 \end{array} \right. \quad \text{où } \delta(a,b) = ab^2+a+2b.}$$

III) Etudes d'exemples.

1. Pour $a=\frac{4}{5}$ et $b=-\frac{1}{2}$ on a $\delta\left(\frac{4}{5},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)+2\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}-1=0$. Donc le jeu $\mathscr{P}\left(\frac{4}{5},-\frac{1}{2}\right)$ est équilibré d'après le critère de Parrondo.
2. Soit $\varepsilon\in\left]0,\frac{1}{5}\right[$. On a :
$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right) &= \left(\frac{4}{5}+\varepsilon\right)\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^2+\left(\frac{4}{5}+\varepsilon\right)+2\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\\ &= \left(\frac{1}{5}-\frac{11}{20}\varepsilon-\frac{1}{5}\varepsilon^2+\varepsilon^3\right)-\frac{1}{5}+3\varepsilon\\ &= \frac{49}{20}\varepsilon-\frac{1}{5}\varepsilon^2+\varepsilon^3\\ &= \frac{\varepsilon}{20}(20\varepsilon^2-4\varepsilon+49).\end{aligned}$$
Puisque $\varepsilon>0$, on en déduit que $\delta\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$ est du même signe que $20\varepsilon^2-4\varepsilon+49$. Or cette expression est une fonction polynomiale de degré 2 en ε dont le discriminant vaut $\Delta=(-4)^2-4\times20\times49=16-3920=-3904<0$. Par conséquent $20\varepsilon^2-4\varepsilon+49>0$ pour tout ε, donc $\delta\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)>0$ pour tout $\varepsilon\in\left]0,\frac{1}{5}\right[$ et le jeu $\mathscr{P}\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$ est favorable d'après le critère de Parrondo.
3. Pour $a=\frac{2}{5}$ et $b=-\frac{1}{4}$ on a $\delta\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)+2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{40}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{40}<0$. Donc le jeu $\mathscr{P}\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{4}\right)$ est défavorable d'après le critère de Parrondo.
4. L'expression de $\delta\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)$ est une fonction polynomiale de ε, en particulier c'est une fonction continue de ε. D'après le résultat de la question précédente, cette expression est strictement négative pour $\varepsilon=0$. Donc, pour tout ε suffisamment proche de 0 on a $\delta\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)<0$ et le jeu $\mathscr{P}\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)$ reste défavorable d'après le critère de Parrondo.

> Attention : ce raisonnement est faux sans le mot «strictement». On utilise ici que si une limite en un point est strictement négative, alors la fonction est strictement négative au voisinage de ce point. L'argument «continuité» est don essentiel.

IV) Le paradoxe de Parrondo. On considère un nouveau jeu qui consiste en une série de lancers de pièces dont chaque «pile» augmente le montant de la cagnotte de 1euro et chaque «face» le baisse de 1euro. Avant chaque lancer, le joueur choisit au hasard et avec même probabilité s'il va utiliser le couple de pièces du jeu $\mathscr{P}(\varepsilon,\varepsilon)$ ou bien le couple de pièces du jeu $\mathscr{P}\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$ où $\varepsilon\in\left]0,\frac{1}{5}\right[$. On fixe $n\in\mathbb{N}^\star$ et pour tout $(a,b)\in]-1,1[^2$ on note $\mathscr{P}_n(a,b)$ l'événement «le joueur utilise le couple de pièces du jeu $\mathscr{P}(a,b)$ au n-ième lancer».

1. D'après l'énoncé, les événements $\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon)$ et $\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$ forment un système complet d'événements et $P(\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon))=P(\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right))=\frac{1}{2}$. On peut donc appliquer la formule de probabilités totales :
$$\begin{aligned}&P(G_n\cap X_n)\\ &= P(\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon))P_{\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon)}(G_n\cap X_n)+P(\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right))P_{\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(G_n\cap X_n)\\ &= \frac{1}{2}P_{\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon)}(G_n\cap X_n)+\frac{1}{2}P_{\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(G_n\cap X_n)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{P(G_n\cap X_n\cap\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon))}{P(\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon))}+\frac{1}{2}\times\frac{P(G_n\cap X_n\cap\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right))}{P(\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right))}.\end{aligned}$$
Puisque le choix du couple de pièces utilisés au n-ième lancer est fait au hasard, en particulier sans prendre en considération le montant de la cagnotte avant ce lancer, l'événement X_n est indépendant des événements $\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon)$ et $\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$. On obtient donc en divisant l'égalité ci-dessus par $P(X_n)$:
$$\begin{aligned}P_{X_n}(G_n) &= \frac{P(G_n\cap X_n)}{P(X_n)}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{P(G_n\cap X_n\cap\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon))}{P(X_n)P(\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon))}+\frac{1}{2}\times\frac{P(G_n\cap X_n\cap\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right))}{P(X_n)P(\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right))}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{P(G_n\cap X_n\cap\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon))}{P(X_n\cap\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon))}+\frac{1}{2}\times\frac{P(G_n\cap X_n\cap\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right))}{P(X_n\cap\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right))}\\ &= \frac{1}{2}P_{X_n\cap\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon)}(G_n)+\frac{1}{2}P_{X_n\cap\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(G_n).\end{aligned}$$
Par définition du jeu de Parrondo, on a $P_{X_n\cap\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon)}(G_n)=\frac{1+\varepsilon}{2}$ et $P_{X_n\cap\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(G_n)=\frac{1+\left(\frac{4}{5}+\varepsilon\right)}{2}=\frac{9+5\varepsilon}{10}$. D'où :
$$P_{X_n}(G_n)=\frac{1}{2}\times\frac{1+\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{9+5\varepsilon}{10}=\frac{7+5\varepsilon}{10}.$$

2. De même, on a en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P_{Y_n}(G_n) = P_{Z_n}(G_n) &= \frac{1}{2}P_{Y_n\cap\mathscr{P}_n(\varepsilon,\varepsilon)}(G_n) + \frac{1}{2}P_{Y_n\cap\mathscr{P}_n\left(\frac{4}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(G_n) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1+\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{2} = \frac{3+4\varepsilon}{8}. \end{aligned}$$

3. D'après les résultats précédents et la formule des probabilités totales (car les événements X_n, Y_n et Z_n forment un système complet d'événements), on a :

$$\begin{aligned} P(G_n) &= P_{X_n}(G_n)P(X_n) + P_{Y_n}(G_n)P(Y_n) + P_{Z_n}(G_n)P(Z_n) \\ &= \frac{(7+5\varepsilon)}{10}P(X_n) + \frac{(3+4\varepsilon)}{8}P(Y_n) + \frac{(3+4\varepsilon)}{8}P(Z_n). \end{aligned}$$

De plus, en raisonnant comme pour la question 1, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P_{\mathscr{P}_n\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)}(G_n) &= P_{\mathscr{P}_n\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\cap X_n}(G_n)P(X_n) + P_{\mathscr{P}_n\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\cap Y_n}(G_n)P(Y_n) \\ &\qquad + P_{\mathscr{P}_n\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\cap Z_n}(G_n)P(Z_n) \\ &= \frac{1+\left(\frac{2}{5}+\varepsilon\right)}{2}P(X_n) + \frac{1+\left(-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)}{2}P(Y_n) + \frac{1+\left(-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)}{2}P(Z_n) \\ &= \frac{(7+5\varepsilon)}{10}P(X_n) + \frac{(3+4\varepsilon)}{8}P(Y_n) + \frac{(3+4\varepsilon)}{8}P(Z_n). \end{aligned}$$

Ainsi $P(G_n) = P_{\mathscr{P}_n\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)}(G_n)$, on en déduit que ce nouveau jeu revient à jouer au jeu $\mathscr{P}\left(\frac{2}{5}+\varepsilon,-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)$. En particulier, ce nouveau jeu consistant à jouer alternativement et aléatoirement à deux jeux de Parrondo favorables est équivalent à un jeu de Parrondo défavorable si $\varepsilon \in \left]0,\frac{1}{5}\right[$ est suffisamment proche de 0. Ceci est paradoxal.

Rappels VARs

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Calculs d'espérance et de variance

Exercice 1 Soit (X_n) une suite de variable aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Y_n = X_n X_{n+1}, \qquad \text{et } T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conjointe de (Y_n, Y_{n+1}) et $Cov(Y_n, Y_{n+1})$.
3. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout entier $k \geqslant 2$, la loi conjointe de (Y_n, Y_{n+k}). Les variables Y_n et Y_{n+k} sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.

Correction :

1. $Y_n(\Omega) = \{0,1\}$, et $Y_n = 1$ si $X_n = 1$ et $X_{n+1} = 1$, donc $Y_n \sim \mathscr{B}(1, p^2)$. $E(Y_n) = p^2$, $V(Y_n) = p^2(1-p^2)$.
2. On a $(Y_n, Y_{n+1})(\Omega) = \{0,1\}^2$.
   - $p(Y_n = 1 \cap Y_{n+1} = 1) = p(X_n = 1 \cap X_{n+1} = 1 \cap X_{n+2} = 1) = p^3$,
   - $p(Y_n = 0 \cap Y_{n+1} = 1) = p(X_n = 0 \cap X_{n+1} = 1 \cap X_{n+2} = 1) = p^2(1-p)$,
   - $p(Y_n = 1 \cap Y_{n+1} = 0) = p(X_n = 0 \cap X_{n+1} = 1 \cap X_{n+2} = 1) = p^2(1-p)$,
   - et $p(Y_n = 0 \cap Y_{n+1} = 0) = 1 - p^3 - 2p^2(1-p)$.

   (à mettre dans un tableau)
   On a : $Cov(Y_n, Y_{n+1}) = E(Y_n Y_{n+1}) - E(Y_n)E(Y_{n+1}) = p^3 - p^4$.
3. pour $k \geqslant 2$, Y_n et Y_{n+k} sont indépendante, car Y_n est fonction de X_n et X_{n+1}, tandis que Y_{n+k} est fonction de X_{n+1} et X_{n+2}. On peut aussi exprimer les événement $p(Y_n = 1 \cap Y_{n+k} = 1)$ en fonction des X.
4. $E(T_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = np^2$.

$$\begin{aligned} V(T_n) &= \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} Cov(Y_i, Y_j) \\ &= np^2(1-p^2) + 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} Cov(Y_i, Y_{i+1}) \\ &= np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p). \end{aligned}$$

Exercice 2 On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise. On définit la suite de var $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- X_1 est la variable certaine égale à 1,
- pour $p \geqslant 2$, X_p est égal à 1 si le numéro obtenu au p-ième tirage n'a pas été obtenu au cours des tirages précédents, $X_p = 0$ dans le cas contraire.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Montrer que X_p suit la loi de Bernouilli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.
3. (a) Montrer que :

$$\forall i < j,\ p([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

   (b) En déduire la loi du produit $X_i X_j$.
   (c) Calculer la covariance de (X_i, X_j). Conclusion ?
4. Soit $N \geqslant 2$, on note Z_N la var égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction des (X_k) et en déduire son espérance.

5. Expliquer comment on peut calculer sa variance (on ne finira pas le calcul).

Correction :

1. X_2 est une variable de Bernouilli. L'événement $X_2 = 0$ signifie que la boule 2 est la même que la boule 1, ainsi, $p(X_2 = 0) = \frac{1}{n+1}$. et donc $X_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{n}{n+1}\right)$.
   On peut démontrer cela en utilisant le SCE associé à Y_2 (ou Y_1) ou par dénombrements.
2. X_p est une variable de Bernouilli. En notant Y_p la var égale au numéro de la boule tirée au tirage p, on a :
$$(X_p = 1) = \bigcup_{i=0}^{n}(X_p = 1)\cap(Y_p = i) = \bigcup_{i=0}^{n}\left((Y_1 \neq i)\cap(Y_2 \neq i)\cdots\cap(Y_{p-1} \neq i)\cap(Y_p = i)\right)$$
   Cette union étant disjointe, on a donc :
$$p(X_p = 1) = \sum_{i=0}^{n} p\left((Y_1 \neq i)\cap(Y_2 \neq i)\cdots\cap(Y_{p-1} \neq i)\cap(Y_p = i)\right)$$
   Or pour i fixé, on a :
$$p\left((Y_1 \neq i)\cap(Y_2 \neq i)\cdots\cap(Y_{p-1} \neq i)\cap(Y_p = i)\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}\frac{1}{n+1}$$
   D'où le résultat.
   Il faut aussi traiter le cas $p = 1$ à part (variable certaine).
3. (a) Soit $i < j$, l'événement $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$ apparaît si le nombre tiré au tirage i n'est pas apparu avant et de même au tirage j. On a :
$$\begin{aligned} p([X_i = 1]\cap[X_j = 1]) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} p(X_i = 1 \cap Y_i = k \cap X_j = 1 \cap Y_j = l) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n} p(Y_1 \neq k \cap Y_1 \neq l \cap Y_2 \neq k \cap Y_2 \neq l \ldots Y_i = k \cap Y_{i+k} \neq l \ldots Y_j = l). \end{aligned}$$
   Pour k et l fixé, l'événement $Y_1 \neq k \cap Y_1 \neq l \cap Y_2 \neq k \cap Y_2 \neq l \ldots Y_i = k \cap Y_{i+k} \neq l \ldots Y_j = l$ signifie :
   - tous les tirages avant i sont différents de l et k,
   - le tirage i est k,
   - les suivants sont différents de l,
   - le tirage j vaut l.

   Chacun des ses événements est de probabilités :
$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{i-1}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{j-i-1}\frac{1}{n+1} = \frac{n^{j-i-1}(n-1)^{i-1}}{(n+1)^j}$$
   Ainsi, la somme sur k et l fait le nombre de terme $n+1 \times n$ multiplié par ce nombre, soit :
$$p([X_i = 1]\cap[X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$
   (b) le produit X_iX_j est une variable de Bernoulli de paramètre : $\frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
   (c) Si $i < j$ on a :
$$cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i+j-2}.$$
   elles ne sont donc pas indépendantes.
4. On a :
$$Z_N = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$
   En particulier,
$$E(Z_N) = \sum_{k=1}^{N} E(X_k) = (n+1)\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^N\right)$$

(somme géométrique).
Pour la variance :

$$\begin{aligned} V(Z_n) &= V(\sum_{k=1}^{N} X_k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} V(X_k) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1} + 2... \end{aligned}$$

Ce calcul peut se faire : il y a plusieurs sommes géométriques.

Exercice 3 Optimisation des gains dans un jeu

Une urne contient $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$ $(n \geqslant 1)$ et sert de matériel au jeu suivant. On extrait un jeton au hasard de l'urne et on a alors le choix :

- on peut arrêter le jeu là et gagner la valeur de ce pion,
- ou alors on peut remettre le jeton dans l'urne, puis en tirer un autre. On gagne alors la valeur de ce second jeton (même si il est moins avantageux).

On choisit d'adopter la stratégie suivante : on se donne une valeur « *seuil* » $s \in [\![2, 2n]\!]$. Si le premier jeton est de valeur supérieure au égale à s, on s'en contente. Sinon on tente de faire mieux avec le second jeton.

Le but de cet exercice est de trouver la valeur de s optimale.

On note X_1 le résultat du premier jeton et G le gain du joueur.

1. **Introduction**
   (a) Écrire une fonction `Python` prenant en entrée les entiers n et s et permettant de simuler le gain G du joueur.
   Indication : utiliser la fonction `rand()` qui renvoie un réel aléatoire de $[0, 1[$.
   (b) Écrire une fonction `Python` prenant en entrée :
   - les entiers n et s,
   - un entier `NbrExp` (le nombre d'expérience)

   et permettant de simuler l'expérience aléatoire `NbrExp` fois, en déterminant combien de fois chaque résultat est sorti. La sortie sera une liste `R` avec :

   $$\forall i \in [\![1, 2n]\!], \texttt{R[i]} \text{ est le nombre de tirages simulés vérifiant } (G = i)$$

   Indication : on pourra bien sûr utiliser la fonction précédente.
   (c) Dans cette question uniquement, on considère le cas $n = 5$ et $s = 3$. Déterminer la loi de G.
   (d) Dans cette question uniquement, on considère le cas $n = 5$ et $s = 7$. Déterminer la loi de G.
2. **Cas général**
   (a) Donner la loi de X_1 et son espérance.
   (b) Déterminer la probabilité des événements $(X_1 < s)$ et $(X_1 \geqslant s)$.
   (c) Déterminer la loi de G en fonction de s.
   (d) Vérifier (par un calcul) que $\sum_{k=1}^{2n} p(G = k) = 1$.
   (e) Déterminer l'espérance de G en fonction de s et de n.
   (f) Quelle valeur de s rend maximum l'espérance de G ?
   (g) Calculer l'espérance de G pour ce choix de s, comparer à $E(X_1)$ et interpréter.

Commentaire : Comme souvent dans les exercices de probabilités, il faut commencer par un exemple : si il y a 10 jetons, intuitivement le meilleur seuil probable est autour de 5. Si on choisit le seuil $s = 5$, il est clair que :

- les probabilité d'avoir $1, 2, 3, 4$ sont identiques (c'est la probabilité d'avoir au premier tour plus de 5, puis cette valeur),
- tandis que la probabilité d'avoir un gain égal à $5, 6, 7, 8, 9, 10$ sont aussi égales, mais plus élevé que le cas précédent, car on peut obtenir ces gains de deux manière : soit au premier tour soit au deuxième.

Correction :

1. **Introduction**
   (a) On peut écrire par exemple :

```python
def gain(n, s):
jeton1 = floor( rand()*2*n ) + 1
```

```
if jeton1 > s :
return jeton1
jeton2 = floor( rand()*2*n ) + 1
return jeton2
```

(b) On peut classiquement écrire :

```
def simule(NbrExp, n, s) :
R = [0] * (2*n+1) # de 0 à 2n
for exp in range(NbrExp):
i = gain(n,s)
R[i] += 1
return R
```

(c) Avec $n = 5$ (il y a 10 jetons) et $s = 3$, on a clairement : $G(\Omega) = [\![1, 10]\!]$.
Commençons par calculer $p(G = 1)$.
Pour avoir un gain de 1, c'est que le premier tirage a donné une valeur inférieur à 3, puis que l'on a obtenu 1. Cela s'écrit :

$$\begin{aligned}
(G = 1) =& (X_1 < 3) \cap (X_2 = 1) \\
\text{d'où } p(G = 1) =& p(X_1 < 3)p(X_2 = 1) && \text{par indépendance des lancers} \\
=& \frac{2}{10}\frac{1}{10} = \frac{2}{100}
\end{aligned}$$

Maintenant on constate que pour avoir un gain de 2, c'est que le premier tirage a donné une valeur inférieur à 3, puis que l'on a obtenu 2. Autrement dit : $(G = 2) = (X_1 < 3) \cap (X_2 = 2)$, on obtient donc de même : $p(G = 2) = \frac{2}{100}$.
On cherche maintenant à calculer $p(G = 3)$. Pour avoir un gain de 3, il y a deux possibilité : soit le premier tirage a donné 3, soit le premier est inférieur strictement à 3 et le deuxième tirage a donné 3.
Cela s'écrit :

$$\begin{aligned}
(G = 3) =& (X_1 = 3) \cup (X_1 < 3) \cap (X_2 = 3) && \text{union disjointe} \\
\text{ce qui donne : } p(G = 3) =& p(X_1 = 3) + p(X_1 < 3)p(X_2 = 3) && \text{par indépendance} \\
\text{au final : } p(G = 3) =& \frac{1}{10} + \frac{2}{10}\frac{1}{10} \\
=& \frac{12}{100}
\end{aligned}$$

On constate ensuite que : $(G = 4) = (X_1 = 4) \cup (X_1 < 3) \cap (X_2 = 4)$, ainsi, $p(G = 4) = \frac{12}{100}$. Puis facilement : $\forall k \geqslant 3$, $p(G = k) = \frac{12}{100}$. On obtient donc le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(G = k)$	$\frac{2}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{100}$

(d) Si $n = 5$ (toujours 10 jetons), et $s = 7$, On a : $G(\Omega) = [\![1, 10]\!]$.
On procède de même :

$$\begin{aligned}
(G = 1) =& (X_1 < 7) \cap (X_2 = 1) \\
\text{d'où } p(G = 1) =& p(X_1 < 7)p(X_2 = 1) && \text{par indépendance des lancers} \\
=& \frac{6}{10}\frac{1}{10} = \frac{6}{100}
\end{aligned}$$

Ce raisonnement est valable pour $(G = k)$, avec $k < 7$. Ainsi, $\forall k < 7$, $p(G = k) = \frac{6}{100}$.
Ensuite :

$$\begin{aligned}
(G = 7) =& (X_1 = 7) \cup (X_1 < 7) \cap (X_2 = 7) && \text{union disjointe} \\
\text{ce qui donne : } p(G = 7) =& p(X_1 = 7) + p(X_1 < 7)p(X_2 = 7) && \text{par indépendance} \\
\text{au final : } p(G = 7) =& \frac{1}{10} + \frac{6}{10}\frac{1}{10} \\
=& \frac{16}{100}
\end{aligned}$$

et de même : $\forall k \geqslant 7$, $p(G=k) = \frac{16}{100}$.
On obtient donc le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(G=k)$	$\frac{6}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{16}{100}$

2. **Cas général**
   (a) Comme tous les événements $X=k$ pour $k \in [\![1,2n]\!]$ sont équiprobables, on a : $X_1 \sim \mathscr{U}(2n)$. En particulier $E(X_1) = \frac{2n+1}{2}$. (La formule de l'espérance est du cours, inutile de la redémontrer).
   (b) **Méthode 1 :** Les tirages étant équiprobables, on a $2n$ tirages possibles et $s-1$ jetons inférieur strictement à s, donc $p(X_1 < s) = \frac{s-1}{2n}$. De même : $p(X_1 \geqslant s) = \frac{2n-s+1}{2n}$.
   Méthode 2 : On utilise le système complet d'événement associé à X_1 :

$$\begin{aligned} p(X_1 < s) &= \sum_{k=1}^{n} p(X_1 < s \cap X_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{s-1} p(X_1 = k) = \frac{s-1}{2n}. \end{aligned}$$

   Puis de même : $p(X_1 \geqslant s) = \frac{2n-s+1}{2n}$.
   NB : on peut vérifier que la somme des deux fait 1.
   (c) Déjà $G(\Omega) = [\![1,2n]\!]$.
   NB : il est clair qu'il faut séparer les cas $k \geqslant s$ et $k < s$.
   Cas 1 : Soit $k \in [\![1,s-1]\!]$. L'événement $G=k$ signifie alors que l'on a tiré un premier jeton X_1 en dessous (strictement) du seuil s, on l'a donc rejeté, puis que le deuxième jeton X_2 est k.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} p(G=k) &= p(X_1 < s \cap X_2 = k) \\ &= p(X_1 < s)p(X_2 = k), \text{ par indépendance} \\ &= \frac{s-1}{2n}\frac{1}{2n} \\ &= \frac{s-1}{4n^2}. \end{aligned}$$

   Cas 2 : Soit $k \in [\![s,2n]\!]$. L'événement $G=k$ est possible dans deux situations distinctes :
   - on a tiré un jeton $X_1 = k$, on l'a donc gardé,
   - on a tiré un jeton X_1 inférieur au seuil, puis on a tiré un jeton X_2 égal à k.

   Ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(G=k) &= p\left(X_1 = k \cup (X_1 < s \cap X_2 = k)\right) \\ &= p(X_1 = k) + p\left(X_1 < s \cap X_2 = k\right) \\ &= \frac{1}{2n} + p\left(X_1 < s\right) p\left(X_2 = k\right) \text{ par indépendance} \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{s-1}{2n}\frac{1}{2n} \\ &= \frac{2n+s-1}{4n^2} \end{aligned}$$

   Autre rédaction : Les événements $X_1 < s$ et $X_1 \geqslant s$ forment un SCE, ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(G=k) &= p(X_1 < s \cap G = k) + p(X_1 \geqslant s \cap G = k) \\ &= p(X_1 < s \cap X_2 = k) + p(X_1 \geqslant s \cap X_1 = k) \\ &= p(X_1 < s)p(X_2 = k) + p(X_1 \geqslant s \cap X_1 = k) \\ &= \frac{s-1}{2n}\frac{1}{2n} + p(X_1 \geqslant s \cap X_1 = k) \end{aligned}$$

   On voit qu'il y a deux cas :
   - si $k < s$, alors $(X_1 \geqslant s) \cap (X_1 = k)$ est impossible. Et donc :

$$p(G=k) = \frac{s-1}{(2n)^2}.$$

- si $k \geqslant s$, alors $p(X_1 \geqslant s \cap X_1 = k) = p(X_1 = k) = \frac{1}{2n}$ et donc :

$$p(G=k) = \frac{s-1}{(2n)^2} + \frac{1}{2n} = \frac{s-1+2n}{4n^2}.$$

En conclusion :

$$p(G=k) = \begin{cases} \dfrac{s-1}{4n^2} & \text{si } k < s \\ \dfrac{s-1+2n}{4n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) Il est évident que $\sum_{k=1}^{2n} p(G=k) = 1$ (c'est la somme sur des probabilités du système complet d'événements associé à G).
On le montre par le calcul comme cela est demandé :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} p(G=k) &= \sum_{k=1}^{s-1} p(G=k) + \sum_{k=s}^{2n} p(G=k) \\
&= \sum_{k=1}^{s-1} \frac{s-1}{4n^2} + \sum_{k=s}^{2n} \frac{s-1+2n}{4n^2} \\
&= \frac{1}{4n^2}\left((s-1)^2 + (2n-s+1)(s-1+2n)\right) \\
&= \frac{1}{4n^2}\left((s-1)^2 + (2n-(s-1))(2n+(s-1))\right) \\
&= \frac{1}{4n^2}\left((s-1)^2 + 4n^2 - (s-1)^2\right) = 1.
\end{aligned}$$

(e) On a :

$$\begin{aligned}
E(G) = \sum_{k=1}^{2n} kp(G=k) &= \sum_{k=1}^{s-1} kp(G=k) + \sum_{k=s}^{2n} kp(G=k) \\
&= \sum_{k=1}^{s-1} k\frac{s-1}{4n^2} + \sum_{k=s}^{2n} k\frac{s-1+2n}{4n^2} \\
&= \frac{s-1}{4n^2}\sum_{k=1}^{s-1} k + \frac{s-1+2n}{4n^2}\sum_{k=s}^{2n} k \\
&= \frac{s-1}{4n^2}\frac{s(s-1)}{2} + \frac{s-1+2n}{4n^2}\sum_{k=s}^{2n} k.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième somme on peut voir la somme des termes d'une suite arithmétique, ou faire un changement de variable.

$$\sum_{k=s}^{2n} k = \sum_{k=0}^{2n-s} (k+s) = \frac{(2n-s)(2n-s+1)}{2} + s(2n-s+1) = \frac{(2n-s+1)(2n+s)}{2}.$$

R C'est le nombre de termes multiplié par la moyenne des termes extrémaux.

On obtient :

$$\begin{aligned}
E(G) &= \frac{s-1}{4n^2}\frac{s(s-1)}{2} + \frac{s-1+2n}{4n^2}(2n-s+1)\frac{2n+s}{2} \\
&= \frac{1}{8n^2}\left[s(s-1)^2 + \Big(2n+(s-1)\Big)\Big(2n-(s-1)\Big)(2n+s)\right] \\
&= \frac{1}{8n^2}\left[s(s-1)^2 + \Big(4n^2-(s-1)^2)(2n+s)\Big)\right] \\
&= \frac{1}{8n^2}\left[-2n(s-1)^2 + 4n^2(2n+s)\right] \\
&= \frac{1}{4n}\left[-(s-1)^2 + 2n(2n+s)\right] \\
&= \frac{1}{4n}\left[-s^2 + 2(n+1)s + 4n^2 - 1\right]
\end{aligned}$$

(f) Il s'agit simplement de trouver le minimum de $s \longmapsto -s^2+2(n+1)s+4n^2-1$. C'est un polynôme de degré 2, dont le minimum est obtenu en « $-\frac{b}{2a}$ », ici : en $s=\frac{2(n+1)}{2}=n+1$. La valeur qui rend maximum l'espérance de gain est donc $s=n+1$.

(g) La valeur de ce minimum est :

$$\begin{aligned} E(G) &= \frac{1}{4n}\Big[-(n+1)^2+2(n+1)^2+4n^2-1\Big] \\ &= \frac{1}{4n}\Big[(n+1)^2+4n^2-1\Big] \\ &= \frac{1}{4n}\Big[5n^2+2n\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[5n+2\Big] > \frac{2n+1}{2} = E(X_1)=E(X_2) \end{aligned}$$

Ce qui montre qu'on a un gain meilleur avec cette stratégie que si l'on accepte / rejette systématiquement le jeton 1.

Exercice 4 Urne de composition aléatoire

On place dans une urne n boules qui sont soit rouges soit blanches (avec $n \geqslant 1$). On ne connaît pas *a priori* le nombre de boules blanches : c'est une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

1. On tire une boule dans l'urne. Calculer en fonction de l'espérance de X, la probabilité qu'elle soit blanche.
2. On note B_i l'événement « *la i-ième boule tirée est blanche* » (avec $i \in \{1,2\}$).

   On tire successivement et avec remise deux boules dans l'urne.
   (a) Calculer, en fonction de $E(X^2)$, la probabilité de l'événement $B_1 \cap B_2$.
   (b) Montrer que B_1 et B_2 sont indépendants si et seulement si X est de variance nulle.
   (c) Si $p(B_1) \neq 0$, montrer et interpréter l'inégalité $p(B_2|B_1) \geqslant p(B_2)$.

Correction : Le principe est que l'on a une expérience en deux étapes :

- la première étape est la composition de l'urne, *i.e.* la VAR X, (ici, on ne sait rien sur cette étape)
- la deuxième étape est le tirage des boules.

Pour ce type d'expérience les méthodes sont :

- Utiliser le système complet d'événements liés à la première étape, car étant donné le résultat de cette première étape, on peut faire des calculs de probabilité sur la deuxième étape.
- Utiliser la formule de Bayes pour, étant donné le résultat de la deuxième étape, faire des calculs de probabilités sur la première étape (pas utilisé ici).
- Si la deuxième étape consiste en plusieurs tirages, les résultats de ces tirages ne sont jamais indépendants (même si il y a remise). En effet, ces tirages donnent de l'information sur le résultat de la première étape et donc sur les conditions de l'étape 2.

1. On utilise les probabilités totales avec le système complet d'événement associé à la VAR X :

$$\begin{aligned} p(B) &= \sum_{k=0}^{n} p(B\cap X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} p_{X=k}(B)p(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}p(X=k) \end{aligned}$$

En effet, si $X=k$ il y a k blanches dans l'urne (qui contient n boules). On a alors :

$$\begin{aligned} p(B) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} kp(X=k) \\ &= \frac{1}{n}E(X). \end{aligned}$$

2. (a) On fait de même :

$$\begin{aligned} p(B_1\cap B_2) &= \sum_{k=0}^{n} p(B_1\cap B_2\cap X=k) = \sum_{k=0}^{n} p_{X=k}(B_1\cap B_2)p(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} p_{X=k}(B_1)p_{X=k\cap B_1}(B_2)p(X=k). \end{aligned}$$

Or on a : $p_{X=k}(B_1)=\frac{k}{n}$ et $p_{X=k\cap B_1}(B_2)=\frac{k}{n}$ puisque les tirages se font dans une urne contenant k blanches parmi

n boules. Ainsi :

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap B_2) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2 p(X=k) \\ &= \frac{1}{n^2}E(X^2). \end{aligned}$$

La dernière relation provient du théorème de transfert.

(b) Déjà on remarque que $p(B_2) = p(B_1) = \frac{1}{n}E(X)$ puisque les tirages se font dans la même urne avec remise.

R Attention cela ne signifie pas que B_1 et B_2 sont indépendants : juste que les conditions des tirages 1 et 2 sont les mêmes.

On a :

$$\begin{aligned} B_1 \text{ et } B_2 \text{ sont indépendantes} &\Leftrightarrow p(B_1)p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n^2}(E(X))^2 = \frac{1}{n^2}E(X^2) \\ &\Leftrightarrow E(X^2) - (E(X))^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow V(X) = 0 \end{aligned}$$

pour interpréter ce résultat, on peut voir que si X est certaine (ou quasi-certaine), le contenu de l'urne n'est plus aléatoire, et le premier tirage n'apprends alors rien sur le deuxième, puisqu'on connaît le contenu de l'urne.
Au contraire, si on ne connaît pas X, alors le fait d'avoir une boule au premier tirage donne de l'information sur le contenu de l'urne (il y a plus de chance que le deuxième tirage soit blanc).

(c) On a :

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap B_2) - p(B_1)p(B_2) &= \frac{1}{n^2}E(X^2) - \frac{1}{n^2}(E(X))^2 \\ &= \frac{1}{n^2}(V(X)) \geqslant 0. \end{aligned}$$

En divisant par $p(B_1) > 0$ on obtient :

$$p(B_2|B_1) = \frac{p(B_2 \cap B_1)}{p(B_1)} \geqslant p(B_2).$$

Interprétation : savoir que le premier tirage est blanc, indique une proportion probablement plus élevée de blanches et donc le second tirage a plus de chance d'être blanc.

✯ Tirages sans remise

Exercice 5

Une urne contient N boules ($N \geqslant 2$), dont Np sont blanches. On tire n boules de l'urne simultanément. On note X le nombre de boules blanches tirées.
La VAR X est dite hypergéométrique et $X \sim \mathscr{H}(N,n,p)$.
Le but de cette partie est de retrouver l'espérance de X et de calculer sa variance.
Donner la loi de X.

1. **Méthode 1 :** On suppose maintenant que les boules sont numérotées (de 1 à N), les blanches de 1 à Np, les noires ensuite. On note pour $i \in [\![1,N]\!]$, X_i la variable indicatrice de l'événement : *« la i-ième boule est tirée »*.
   (a) Calculer pour $i \in [\![1,N]\!]$, donner la loi de la variable aléatoire X_i, son espérance et sa variance.
   (b) Calculer pour $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, avec $i < j$ la covariance de (X_i, X_j).
   (c) Exprimer X en fonction des variables aléatoires X_i et retrouver ainsi son espérance.
   (d) Démontrer que $V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$.
2. **Méthode 2 :** Une urne contient N boules ($N \geqslant 2$), dont Np sont blanches. On tire toutes les boules de l'urne successivement et sans remise. Pour $i \in [\![1,N]\!]$, on pose Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ième boule tirée est blanche, 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de Y_i,
   (b) Soit $n \leqslant N$, on pose X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées dans les n premiers tirages, de sorte que d'après le cours : $X \sim \mathscr{H}(N,n,p)$.
   Exprimer X en fonction des Y_i et retrouver ainsi son espérance.
   (c) Soit $1 \leqslant i < j \leqslant N$, déterminer $p(Y_i = 1 \cap Y_j = 1)$, en déduire la covariance de (Y_i, Y_j).
   (d) Retrouver que $V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$.
3. Le but de cette partie est d'appliquer le résultat précédent à un cas particulier.
   Une urne contient N boules : a rouges, b blanches et c noires ($a+b+c=N$). On tire simultanément n boules dans

cette urne ($n \leqslant N$). On désigne par X (respectivement Y, Z) le nombre de boules rouges (respectivement blanches, noires) obtenues.

(a) Quelle est la loi de X ? celle de Y ? celle de Z ?

(b) Exprimer $X+Y$ en fonction de n et Z. En déduire $Var(X+Y)$.

(c) Sans calculer $E(XY)$, donner la valeur de $cov(X,Y)$.

Correction :

1. **Méthode 1 :**

(a) La variable aléatoire X_i est une variable de Bernoulli, puisqu'elle ne prend que les valeurs 0 ou 1. La question est donc de calculer $p(X_i = 1)$, *i.e.* la probabilité que la boule i soit prise.
Il y a plusieurs méthodes :

- La probabilité que la boule i soit tirée est égale à la proportion de boules que l'on extrait de l'urne (puisque toutes les boules sont identiques), donc à $\frac{n}{N}$.
- On raisonne par probabilité uniforme sur les tirages et on introduit un ordre arbitraire sur les tirages. On a alors $A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$ tirages possibles. Un tirage qui contient la boule i est prise est déterminé par :
  - la position de la boule i (n choix),
  - $n-1$ tirages parmi les $N-1$ autre boules, soit A_{N-1}^{n-1} choix.

  Il y a donc nA_{N-1}^{n-1} tirages tels que $X_i = 1$ La probabilité est alors : $\frac{nA_{N-1}^{n-1}}{A_N^n} = \frac{n}{N}$.
- On raisonne par probabilité uniforme sur les tirages, mais on n'introduit plus d'ordre arbitraires sur les tirages. On a alors : $\binom{N}{n}$ tirages possibles. un tirage qui contient la boule i est déterminé par une partie à $n-1$ éléments des $N-1$ autres boules. Il y en a donc $\binom{N-1}{n-1}$. La probabilité est $\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}$.

En conclusion : $p(X_i = 1) = \frac{n}{N}$, soit $X_i \sim \mathscr{B}(1, \frac{n}{N})$, on en déduit : $E(X_i) = \frac{n}{N}$, $Var(X_i) = \frac{n}{N}(1-\frac{n}{N}) = \frac{nN-n}{N^2}$.

(b) On a $cov(X_i,X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$, il reste donc à calculer $E(X_iX_j)$, qui vaut $p(X_i = 1 \cap X_j = 1)$, *i.e.* la probabilité que les boules i et j soient tirées.
NB : X_i et X_j ne sont évidement pas indépendante.
On procède de la même manière : il y a $A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$ tirages possibles. Ceux qui contiennent les boules i et j sont déterminées par :

- la position de la boule i : n choix,
- la position de la boule j : $n-1$ choix,
- les autres boules : $A_{N-2}^{n-2} = \frac{(N-2)!}{(N-n)!}$.

Il y a donc $n(n-1)A_{N-2}^{n-2}$ tirages possibles, ce qui donne une probabilité de $\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$.
Ou alors sans donner d'ordre arbitraire au tirage : il y a alors $\binom{N}{n}$ tirages possibles, le nombre de tirage qui contienne à la fois les boules i et j est $\binom{N-2}{n-2}$. On obtient le même résultat.
Au final on a :

$$cov(X_i,X_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \frac{n^2}{N^2} = -\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

(c) On a $X = \sum_{i=1}^{Np} X_i$, et donc

$$E(X) = \sum_{i=1}^{Np} E(X_i) = Np \times \frac{n}{N} = np.$$

(d) Pour la variance, on a :

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{Np} X_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{Np} V(X_i)}_{\text{terme 1}} + \underbrace{2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant Np} cov(X_i,X_j)}_{\text{terme 2}}.$$

Toutes les variances sont égales à $\frac{nN-n}{N^2}$, et il y en a Np. Le premier terme est donc $np\frac{N-n}{N}$. Toutes les covariances

sont égales à $-\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}$. et il y en a $\frac{Np(Np-1)}{2}$. Le deuxième terme est donc égal à $-np\frac{(Np-1)(N-n)}{N(N-1)}$. Au final :

$$\begin{aligned} V(X) &= np\frac{N-n}{N} - np\frac{(Np-1)(N-n)}{N(N-1)} \\ &= np\frac{N-n}{N}\left(1-\frac{Np-1}{N-1}\right) \\ &= np\frac{N-n}{N}\left(\frac{N-Np}{N-1}\right) \\ &= np(1-p)\frac{N-n}{N-1} \end{aligned}$$

2. **Méthode 2 :**
   (a) On a $p(Y_i = 1)$ signifie qu'une boule blanche est tirée au tirage i. Or un tirage est donné par la position des $Np-1$ blanches dans les N tirages, il y a donc : $\binom{N}{Np}$ tirages possibles.
   Un tirage qui vérifie $Y_i = 1$ est déterminé par la position des $Np-1$ blanches qui restent dans les autres $N-1$ tirages. Il y a donc $\binom{N-1}{Np-1}$ tirages tels que $Y_i = 1$.
   Au final, on a donc :

$$p(Y_1 = 1) = \frac{\binom{N-1}{Np-1}}{\binom{N}{Np}} = p.$$

   Donc $Y_i \sim \mathscr{B}(1,p)$.
   (b) X est le nombre de boules blanches tirées dans les n premiers tirages donc $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. On retrouve :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = np.$$

   (c) Soit $1 \leqslant i < j \leqslant N$, un tirage tel que $Y_i = 1$ et $Y_j = 1$, *i.e.* tel qu'il y ait une blanche au tirage i et j, est déterminé par la position des $Np-2$ boules blanches dans les $N-2$ autres tirages, et donc il y a $\binom{N-2}{Np-2}$ tirages de ce type. On a donc :

$$p(Y_i = 1 \cap Y_j = 1) = \frac{\binom{N-2}{Np-2}}{\binom{N}{Np}} = \frac{p(Np-1)}{(N-1)}.$$

   On en déduit la covariance :

$$\begin{aligned} cov(Y_i,Y_j) &= E(Y_iY_j) - E(Y_i)E(Y_j) \\ &= p(Y_i = 1 \cap Y_j = 1) - p^2 \\ &= \frac{p(Np-1)}{(N-1)} - p^2 \\ &= \frac{p}{N-1}(Np-1-Np+p) \\ &= \frac{p(p-1)}{N-1}. \end{aligned}$$

   (d) On a alors :

$$\begin{aligned} V(X) &= V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(Y_i,Y_j) \\ &= np(1-p) + n(n-1)\frac{p(p-1)}{N-1} \\ &= np(1-p)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right) \\ &= np(1-p)\frac{N-n}{N-1}. \end{aligned}$$

3. (a) Les variables aléatoires X, Y et Z sont hypergéométriques. On a :

$$X \sim \mathscr{H}(N,n,\frac{a}{N}) \qquad Y \sim \mathscr{H}(N,n,\frac{b}{N}) \qquad Z \sim \mathscr{H}(N,n,\frac{c}{N})$$

(b) On a $X+Y+Z=n$, puisque les boules sont soit rouges, soit noires, soit blanches. Donc $X+Y=n-Z$. Ainsi, $Var(X+Y)=Var(n-Z)=Var(Z)$.

(c) On a :

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2cov(X,Y),\ \text{soit : } cov(X,Y)=\frac{1}{2}\left(Var(Z)-Var(X)-Var(Y)\right)$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(n\frac{c}{N}(1-\frac{c}{N})\frac{N-n}{N-1}-n\frac{a}{N}(1-\frac{a}{N})\frac{N-n}{N-1}-n\frac{b}{N}(1-\frac{b}{N})\frac{N-n}{N-1}\right) \\ &= \frac{n}{2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N^2}\Big(c(N-c)-a(N-a)-b(N-b)\Big) \end{aligned}$$

Ce qui peut s'arranger en utilisant $a+b+c=N$.

✯ Exercices de concours

Exercice 6 **G2E 2012 problème 3** Soient p_1, p_2 et p_3 des réels strictement positifs.

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on considère $D_n=\left\{(i,j)\in\mathbf{N}^2\ :\ i+j\leqslant n\right\}$ et la fonction de deux variable f définie sur D_n par

$$f(i,j)=\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}p_1^ip_2^jp_3^{n-i-j}.$$

1. Montrer que, pour tout couple (i,j) de D_n, on a :

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}=\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}$$

et

$$\sum_{(i,j)\in D_n}f(i,j)=(p_1+p_2+p_3)^n.$$

Nous supposerons dans la suite du problème que : $p_1+p_2+p_3=1$.

On considère le couple de variables aléatoires (X,Y) dont la loi conjointe est définie pour tout $(i,j)\in D_n$ par :

$$\mathbf{P}(X=i,Y=j)=f(i,j).$$

1. Déterminer les lois marginales des variables aléatoires X et Y.
2. En déduire les espérances mathématiques $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$, ainsi que les variances $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$, des variables aléatoires X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifiez votre réponse.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $S=X+Y$.
5. En déduire la covariance de X et Y, ainsi que leur coefficient de corrélation.
6. Soient $n\in\mathbf{N}^*$ et $j\in[\![1,n]\!]$. On définit la variable aléatoire X_j par :

$$\mathbf{P}(X_j=i)=\mathbf{P}(X=i|Y=j).$$

   Déterminer la loi de probabilité de X_j.
   Reconnaître cette loi et en donner les paramètres. Déterminer en fonction de n, j, p_1 et p_2, l'espérance $\mathbf{E}(X_j)$ et la variance $\mathbf{V}(X_j)$ de la variable aléatoire X_j.
7. Soient $n\in\mathbf{N}^*$ et $i\in[\![1,n]\!]$. On définit la variable aléatoire Y_i par :

$$\mathbf{P}(Y_i=j)=\mathbf{P}(Y=j|X=i).$$

   Déterminer la loi de probabilité de Y_i. Reconnaître cette loi et en donner les paramètres. Déterminer en fonction de n, i, p_1 et p_2, l'espérance $\mathbf{E}(Y_i)$ et la variance $\mathbf{V}(Y_i)$ de la variable aléatoire Y_i.
   On définit sur $\mathbf{R}$ les fonctions affines u et v dont les restrictions à $[\![1,n]\!]$ sont définies, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, par :

$$u(i)=\mathbf{E}(Y_i)\quad\text{et}\quad v(i)=\mathbf{E}(X_i).$$

Le plan affine étant rapporté à un repère $(0;\vec{i},\vec{j})$, on appelle C et C' les courbes d'équations respectives $y=u(x)$ et $y=v(x)$.

8. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que C et C' se coupent en un seul point. Déterminer alors les coordonnées de ce point.

Correction :

1. Soit $(i,j)\in D_n$. On calcule

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}=\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\times\frac{(n-i)!}{(n-i)!}=\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}=\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j)\in D_n,\ \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}=\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}.}$$

On calcule ensuite, en utilisant cette nouvelle écriture :

$$\sum_{(i,j)\in D_n} f(i,j)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p_1^i\,p_2^j\,p_3^{n-i-j}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p_1^i\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}p_2^j\,p_3^{(n-i)-j}$$

En appliquant alors deux fois la formule du binôme de Newton, on trouve que

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in D_n} f(i,j)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p_1^i(p_2+p_3)^{n-i}=(p_1+p_2+p_3)^n.}$$

2. On remarque que, comme $(X,Y)(\Omega)=D_n$, on a $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![0;n]\!]$.

Soit alors $i\in[\![0;n]\!]$. On calcule, à l'aide du système complet associé à Y et de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=i)&=\sum_{j=0}^{n}\underbrace{\mathbf{P}(X=i,Y=j)}_{=0 \text{ si } j>n-i}=\sum_{j=0}^{n-i}f(i,j)=\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p_1^i\,p_2^j\,p_3^{n-i-j}\\&=\binom{n}{i}p_1^i\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}p_2^j\,p_3^{(n-i)-j}\\&=\binom{n}{i}p_1^i(p_2+p_3)^{n-i}\quad\text{en appliquant la formule du binôme}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On reconnaît que } X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p_1.}$$

En remarquant la symétrie entre i et j dans la question 1., on a aussi, pour $0\leqslant i+j\leqslant n$,

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{i}.$$

Soit alors $j\in[\![0;n]\!]$. On calcule comme précédemment,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=j)&=\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\mathbf{P}(X=i,Y=j)}_{=0 \text{ si } i>n-j}=\sum_{i=0}^{n-j}f(i,j)=\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i}p_1^i\,p_2^j\,p_3^{n-i-j}\\&=\binom{n}{j}p_2^j\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i}p_1^i\,p_3^{(n-j)-i}=\binom{n}{j}p_2^j(p_1+p_3)^{n-j}\ \text{en appliquant la formule du binôme}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On reconnaît que } X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p_2.}$$

3. De la question précédente, on a immédiatement

$$\boxed{\mathbf{E}(X)=np_1,\ \mathbf{E}(Y)=np_2,\ \mathbf{V}(X)=np_1(1-p_1)\ \text{et}\ \mathbf{V}(Y)=np_2(1-p_2).}$$

4. Comme $n\in\mathbf{N}^*$, $n+n>n$. On a donc $\mathbf{P}(X=n,Y=n)=0$.
Or, d'après 2., $\mathbf{P}(X=n)\neq 0$ et $\mathbf{P}(Y=n)\neq 0$.
On a donc $\mathbf{P}(X=n,Y=n)\neq\mathbf{P}(X=n)\mathbf{P}(Y=n)$ et $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

5. Comme $(X,Y)(\Omega) = D_n$, i.e. $0 \leqslant X+Y \leqslant n$, on a nécessairement $S(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.
Soit $k \in [\![0;n]\!]$. On décompose l'événement $S = k$ dans le système complet associé à X :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S=k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(S=k, X=i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X+Y=k, X=i) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\mathbf{P}(X=i, Y=k-i)}_{=0 \text{ si } k-i<0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!} p_1^i p_2^{k-i} p_3^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_3^{n-k} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} p_1^i p_2^{k-i} \\
&= \binom{n}{k} p_3^{n-k} (p_1+p_2)^k \text{ en appliquant la formule du binôme.}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On reconnaît que } S \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p_1+p_2.}$

6. On a donc $\mathbf{V}(S) = n(p_1+p_2)(1-p_1-p_2) = n(p_1+p_2)p_3$.
Mais on sait que $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + 2\mathbf{cov}(X,Y) + \mathbf{V}(Y)$.
On en déduit que $\mathbf{cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\big(n(p_1+p_2)p_3 - np_1(1-p_1) - np_2(1-p_2)\big)$.
On a donc $\boxed{\mathbf{cov}(X,Y) = -n\,p_1\,p_2 \text{ et donc } \rho(X,Y) = -\sqrt{\frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}.}$

7. Soit $i \in [\![0;n]\!]$. On calcule

$$\mathbf{P}(X_j = i) = \frac{\mathbf{P}(X=i, Y=j)}{\mathbf{P}(Y=j)}$$

Si $i > n-j$, on a $i+j > n$ et donc $\mathbf{P}(X_j = i) = 0$.
Si $i \leqslant n-j$, on a

$$\mathbf{P}(X_j = i) = \frac{\binom{n}{j}\binom{n-j}{i} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}}{\binom{n}{j} p_2^j (1-p_2)^{n-j}} = \binom{n-j}{i} \frac{p_1^i p_3^{n-i-j}}{(1-p_2)^{n-j}} = \binom{n-j}{i} \left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^i \left(\frac{p_3}{1-p_2}\right)^{(n-j)-i}$$

Remarquons enfin que $\frac{p_1}{1-p_2} + \frac{p_3}{1-p_2} = \frac{p_1+p_3}{1-p_2} = \frac{1-p_2}{1-p_2} = 1$.

$\boxed{\text{On reconnaît que } X_j \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n-j \text{ et } \frac{p_1}{1-p_2}.}$

On sait alors que $\boxed{\mathbf{E}(X_j) = \frac{(n-j)p_1}{1-p_2} \text{ et } \mathbf{V}(X_j) = \frac{(n-j)p_1(1-p_1-p_2)}{(1-p_2)^2}.}$

8. Soit $j \in [\![0;n]\!]$. On calcule

$$\mathbf{P}(Y_i = j) = \frac{\mathbf{P}(Y=j, X=i)}{\mathbf{P}(X=i)}$$

Si $j > n-i$, on a $i+j > n$ et donc $\mathbf{P}(Y_i = j) = 0$.
Si $j \leqslant n-i$, on a

$$\mathbf{P}(Y_i = j) = \frac{\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}}{\binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i}} = \binom{n-i}{j} \frac{p_2^j p_3^{n-i-j}}{(1-p_1)^{n-i}} = \binom{n-i}{j} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^j \left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{(n-i)-j}$$

Remarquons enfin que $\frac{p_2}{1-p_1} + \frac{p_3}{1-p_1} = \frac{p_2+p_3}{1-p_1} = \frac{1-p_1}{1-p_1} = 1$.

$\boxed{\text{On reconnaît que } Y_i \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n-i \text{ et } \frac{p_2}{1-p_1}.}$

On sait alors que $\boxed{\mathbf{E}(Y_i) = \frac{(n-i)p_2}{1-p_1} \text{ et } \mathbf{V}(Y_i) = \frac{(n-i)p_2(1-p_1-p_2)}{(1-p_1)^2}.}$

9. Les prolongements considérés sont

$$u : x \longmapsto \frac{(n-x)p_2}{1-p_1} \quad \text{et} \quad v : x \longmapsto \frac{(n-x)p_1}{1-p_2}.$$

Les droites qui représentent u et v se coupent en un unique point si et seulement si leurs coefficients directeurs sont distincts. On résout alors

$$-\frac{p_2}{1-p_1} = -\frac{p_1}{1-p_2} \Longleftrightarrow p_1(1-p_1) = p_2(1-p_2) \Longleftrightarrow (p_1-p_2)(1-p_1-p_2) = 0$$

Or, on sait que $1-p_1-p_2 = p_3 \neq 0$.

$\boxed{C \text{ et } C' \text{ se coupent en un seul point si et seulement si } p_1 \neq p_2.}$

On suppose alors $p_1 \neq p_2$. Pour trouver le point d'intersection de C et C', il faut résoudre

$$\frac{(n-x)p_2}{1-p_1} = \frac{(n-x)p_1}{1-p_2}$$

Ici, on sait qu'il n'y a qu'un seul x solution et $x = n$ l'est clairement.

$\boxed{\text{Si } p_1 \neq p_2, C \text{ et } C' \text{ se coupent uniquement au point } (n;0).}$

Exercice 7 On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On extrait successivement une à une toutes les boules de l'urne.
On note, pour $i \in [\![1,n]\!]$,

- Z_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du tirage i.
- $X_i = \max(Z_1, Z_2, \ldots, Z_i)$,
- B_i la variable aléatoire égale à 1 si le tirage i est un « *record* « , c'est-à-dire que le numéro de la boule tiré au tirage i est strictement supérieur à tous les précédents, *i.e.* si $Z_i > X_{i-1}$. On pose que B_1 est la variable certaine égale à 1.
- Enfin, on désigne par R la variable aléatoire : $R_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$.

1. Que représente R_n ?
2. Déterminer $E(B_i)$, puis $E(R_n)$.
3. Donner un équivalent de $E(R_n)$ lorsque n tends vers $+\infty$.
4. En déduire qu'il existe deux réels a et b tels que $E(R_n) = a \cdot \ln(n) + b + c_n$, avec $\lim_{n\infty} c_n = 0$.

Correction

1. R_n est le nombre de records dans les n premiers tirages.
2. Pour $i > 1$, on a : $E(B_i) = p(Z_i > X_{i-1})$.
   Méthode 1 : On calcule donc $p(Z_i > X_{i-1})$ par dénombrement : le nombre de tirage possible est $n!$ puisque l'univers Ω correspond aux permutations des n boules. Parmi ces tirages, pour construire un tirage pour qu'il y ait record au tirage i il faut choisir :
   - i boules parmi les n, soit $\binom{n}{i}$ choix,
   - $(i-1)!$ pour les placer de manière à ce que le plus grand numéro soit en dernier.
   - $(n-i)!$ pour remplir les derniers tirages.

   Au final, il y a $\binom{n}{i}(i-1)!(n-i)! = \frac{n!}{i}$ choix possible, donc $p(B_i = 1) = \frac{1}{i}$. Ainsi, $B_i \sim \mathscr{B}(\frac{1}{i})$. et $E(B_i) = \frac{1}{i}$. Cette formule est encore vraie si $i = 1$.
   Méthode 2 : On calcule donc $p(Z_i > X_{i-1})$ par dénombrement. Le nombre de tirage possible est $A_n^i = \frac{n!}{(n-i)!}$ puisque l'univers Ω correspond à tirer i boules successivement et sans remise dans l'urne qui en contient n.
   Un tirage tel qu'il y ait record au tirage i est construit par choix successif :
   - i boules parmi les n, soit $\binom{n}{i}$ choix, ces boules vont être placées dans les places 1 à i.
   - $(i-1)!$ pour placer ces boules dans les places 1 à i de manière à ce que le plus grand numéro soit en dernier.

   On retrouve le même résultat.
   Méthode 3 : On fait avec le SCE associé à Z_i :

   $$p(B_i = 1) = \sum_{l=1}^{n} p\left(B_i = 1 \cap Z_i = l\right)$$

   Pour $l \geqslant 1$, on doit donc calculer $p\left(B_i = 1 \cap Z_i = l\right)$, ie que la i-ième boule soit l et que ce soit un record. Clairement, il faut $l \geqslant i$ car on ne peut avoir un record que si le nombre tiré est supérieur au numéro du tirage.

On peut donc écrire :

$$p(B_i = 1) = \sum_{l=i}^{n} p\left(B_i = 1 \cap Z_i = l\right)$$

On considère donc $l \geqslant i$ et on procède par dénombrements. L'univers est l'ensemble des arrangements de longueur i des n boules (on considère en effet donc que l'on ne fait que i tirages).
Les tirages vérifiant les conditions : $B_i = 1 \cap Z_i = l$ sont déterminés par les $i-1$ premier tirages qui doivent tous être inférieurs à l (puisque l'on connaît la valeur du dernier qui est l et qui est un record). Cela correspond donc au choix d'un arrangement de longueur $i-1$ des $l-1$ boules (celles numérotées de 1 à $l-1$).
Ainsi :

$$\begin{aligned} p\left(B_i = 1 \cap Z_i = l\right) &= \frac{A_{l-1}^{i-1}}{A_n^i} \\ &= \frac{(l-1)!}{(l-i)!}\frac{(n-i)!}{n!} \end{aligned}$$

et donc :

$$p(B_i = 1) = \sum_{l=i}^{n} \frac{(l-1)!}{(l-i)!}\frac{(n-i)!}{n!}$$

Pour calculer cette somme, il faut faire apparaître des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned} p(B_i = 1) &= \left(\sum_{l=i}^{n} \frac{(l-1)!}{(l-i)!(i-1)!}\right)\frac{(i-1)!(n-i)!}{n!} \\ &= \left(\sum_{l=i}^{n} \binom{l-1}{i-1}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{i-1}} \end{aligned}$$

Il faut ensuite savoir calculer cette somme (somme verticale le long du triangle de Pascal) :

$$\begin{aligned} p(B_i = 1) &= \binom{n}{i}\frac{1}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{i-1}} \\ &= \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Méthode 4 : Toujours avec le SCE associé à Z_i (après retrait des termes nuls) :

$$\begin{aligned} p(B_i = 1) &= \sum_{l=i}^{n} p\left(B_i = 1 \cap Z_i = l\right) \\ &= \sum_{l=i}^{n} p\left(Z_1 < l \cap Z_2 < l \cap \ldots Z_{i-1} < l \cap Z_i = l\right) \end{aligned}$$

on fixe donc $l \geqslant i$ et on a par les probabilités composées :

$$\begin{aligned} & p\left(Z_1 < l \cap Z_2 < l \cap \ldots Z_{i-1} < l \cap Z_i = l\right) \\ =& p\left(Z_1 < l\right) p_{Z_1<l}\left(Z_2 < l\right) p_{Z_1<l\cap Z_2<l}\left(Z_3 < l\right) \ldots p_{Z_1<l\cap\cdots\cap Z_{-2}<l}\left(Z_{i-1} < l\right) p_{Z_1<l\cap\cdots\cap Z_{-1}<l}\left(Z_i = l\right) \\ =& \frac{l-1}{n}\frac{l-2}{n-1}\frac{l-3}{n-2}\cdots\frac{l-i+1}{n-i+2}\frac{1}{n-i+1} \\ =& \frac{(l-1)!}{(l-i)!}\frac{(n-i)!}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$p(B_i = 1) = \sum_{l=i}^{n} \frac{(l-1)!}{(l-i)!}\frac{(n-i)!}{n!}$$

On conclue comme dans la méthode précédente.

Fin de la question : On en déduit par linéarité de l'espérance que $E(R_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

3. On a :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [i, i+1],\ \frac{1}{i+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{i}$$

On intègre sur $[i, i+1]$, cela donne :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{i+1} \leqslant \int_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{i}$$

On somme l'inégalité de gauche pour pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Ce que l'on écrit : $\ln(n+1) \leqslant E(R_n)$. On somme ensuite l'inégalité de droite avec $i \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

ce que l'on écrit : $E(R_n) - 1 \leqslant \ln(n)$. Au final, on a l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant E(R_n) \leqslant 1 + \ln(n)$$

On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) \leqslant E(R_n) \leqslant 1 + \ln(n)$$

4. Étude de $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n)$: différence de deux termes montre qu'elle est décroissante, puis minorée par 0. donc convergente vers b.
Voir fiche sur la série harmonique.

Exercice 8 Oral ESCP

Une urne contient 2^n boules dont $\binom{n}{k}$ portent le numéro k, ceci pour k variant de 0 à n.

Un joueur puise une poignée de R boules dans l'urne. Le joueur gagne alors la somme G des nombres portés par les boules tirées.

1. **Question préliminaire :**
Montrer que, pour $n \neq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

2. Déterminer l'espérance et la variance de G pour :
   (a) $R = 1$ (ie le joueur tire une seule boule)
   (b) $R = 2^n$ (ie le joueur tire toutes les boules), .
   Indication : on pourra reconnaître des lois usuelles.

   On considère pour la suite le cas général $1 < R < 2^n$,
   on va monter que $E(G) = \frac{nR}{2}$ par deux méthodes.
   Les deux questions suivantes sont donc indépendantes.

3. **Méthode 1 :** On pose Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées de valeur k.
   (a) Donner l'univers image $Y_k(\Omega)$.
   (b) Justifier :

$$\forall i \in Y_k(\Omega),\ p(Y_k = i) = \frac{\binom{\binom{n}{k}}{i}\binom{2^n - \binom{n}{k}}{R-i}}{\binom{2^n}{R}}$$

   (c) Exprimer G en fonction des variables Y_k.
   (d) On admet : $E(Y_k) = \frac{R}{2^n}\binom{n}{k}$. Donner l'espérance de G.

4. **Méthode 2 :** Pour chaque numéro $i \in [\![0,n]\!]$, on numérote les boules portant le numéro i, et on note $B_{i,j}$ la j-ème boule portant le numéro i. L'indice j varie donc entre 1 et $\binom{n}{i}$.
   On note aussi $X_{i,j}$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement on a tiré la boule $B_{i,j}$, c'est-à-dire : $X_{i,j} = 1$ si on a tiré $B_{i,j}$ et $X_{i,j} = 0$ si on ne l'a pas tirée.
   Les variables aléatoire $X_{i,j}$ sont donc des variables de Bernoulli.
   (a) Calculer la loi de $X_{i,j}$.
   (b) Exprimer G en fonction des variables $X_{i,j}$.
   Indication : on pourra utiliser une somme double.
   (c) En déduire $E(G)$.
5. On considère maintenant que le joueur tire au hasard un nombre R entre 0 et 2^n, la variable aléatoire R suivant alors une loi uniforme. Puis le joueur tire R boules de l'urne précédente. Donner son espérance de gain.

Correction :

1. Lemme assez classique, il existe plusieurs démonstration :
   - en dérivant l'égalité de Newton :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
$$\text{donc} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$
$$\text{avec } x = 1 \text{ on obtient :} \quad n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$
   - en utilisant une variable aléatoire $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ et en calculant son espérance :
$$\sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n}{2}$$
   - ou en utilisant l'égalité d'Euler sur les binomiaux (ce qui revient à reprendre la démonstration de l'espérance d'une loi binomiale) :
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
2. (a) Pour $R = 1$, le joueur tire une seule boule, on note donc X le numéro de la boule tirée, et on a : $G = X$. Donc $G(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour $k \in [\![0,n]\!]$,
$$p(G = k) = p(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$
   L'énoncé dit : cherchez une loi usuelle ! !
   On reconnaît alors une loi usuelle : $G \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On a alors : $E(G) = \frac{n}{2}$ et $V(G) = \frac{n}{4}$.
   (b) Si $R = 2^n$, on tire toutes les boules, donc le gain est égal à la somme des numéros de toutes les boules de l'urne :
$$G = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$
   Ainsi, la variable G est certaine, égale à $n2^{n-1}$. Son espérance est égale à $n2^{n-1}$ et sa variance est nulle.
3. (a) L'univers image est une partie de $\mathbb{N}$ qui vérifie :
$$Y_k(\Omega) \subset \left[\!\left[0, \binom{n}{k}\right]\!\right] \qquad \text{et} \qquad Y_k(\Omega) \subset [\![0,R]\!]$$
   Les deux réponses ont été acceptée. La première est la plus naturelle.
   (b) On fixe i et k et on procède par dénombrement pour calculer $p(Y_k = i)$.
   On commence donc par donner l'univers (**c'est obligatoire et il ne faut pas confondre l'univers et son cardinal**).
   Ici on tire R boules parmi les 2^n, ainsi Ω s'identifie aux parties de cardinal R des 2^n boules. En particulier, $card(\Omega) = \binom{2^n}{R}$.
   Un tirage tel que $Y_k = i$ se construit par choix successifs :

- on prend i boules numérotées k parmi les $\binom{n}{k}$ boules de ce numéro,
- on prend $R-i$ boules parmi les $2^n - \binom{n}{k}$ qui portent un numéro diffférent.

On en déduit le résultat :

$$p(Y=i) = \frac{\binom{\binom{n}{k}}{i}\binom{2^n-\binom{n}{k}}{R-i}}{\binom{2^n}{R}}$$

REM : c'est une application de ce qui a été vu dans la fiche sur les tirages sans remise (et qui doit toujours être redémontré).

Soit $k \in [\![0,n]\!]$, Y_k est le nombre de boules de la valeur k, on distingue donc 2 types de boules :

- celles de valeur k (= les blanches)
- et celles de valeurs différentes (= les noires).

Ainsi, Y_k est le nombre de blanches dans ce tirage sans remise. On tire R boules dans une urne contenant 2^n boules.

On en déduit : $Y_k \hookrightarrow \mathscr{H}\left(2^n, R, \frac{\binom{n}{k}}{2^n}\right)$ (**Rappel : cette loi est hors-programme**).

On retrouve en particulier la valeur donnée dans l'énoncé : $E(Y_k) = \dfrac{R}{2^n}\dbinom{n}{k}$.

(c) G est égal à :

- 0 fois le nombre de boules numérotées 0,
- plus 1 fois le nombre de boules numérotées 1,
- plus 2 fois le nombre de boules numérotées 2, etc.
- plus n fois le nombre de boules numérotées n.

Autre rédaction : pour chaque boule numérotées k, on ajoute k à G.

Ainsi : $G = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kY_k$.

(d) On en déduit donc :

$$E(G) = \sum_{k=0}^{n} kE(Y_k) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{R}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{R}{2^n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{nR}{2}.$$

4. (a) Pour $i \in [\![0,n]\!]$ et $j \in \left[\!\left[1, \binom{n}{i}\right]\!\right]$, $X_{i,j}$ est une variable de Bernoulli. On a $(X_{i,j}=1)$ est l'événement « la boule $B_{i,j}$ est tirée ». Puisque toutes les boules sont identiques, il s'agit de la probabilité pour une boule d'être tirée, et donc $p(X_{i,j}=1) = \frac{R}{2^n}$ et donc $X_{i,j} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(1, \frac{R}{2^n}\right)$.

(b) D'autre part, G vérifie :

$$G = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} iX_{i,j},$$

puisqu'à chaque fois que l'on tire la boule (i,j), on ajoute i à la somme.

(c) On en déduit :

$$\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} iE\left(X_{i,j}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{\binom{n}{i}} i\frac{R}{2^n} \\
&= \frac{R}{2^n}\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} \\
&= \frac{nR}{2}.
\end{aligned}$$

5. L'expérience est maintenant en deux étapes : déterminer R (au hasard) puis tirer les boules et donc obtenir G. Commençons par remarquer que $G(\Omega) = \left[\!\left[0, n2^{n-1}\right]\!\right]$, puisque le cas le plus favorable arrive lorsque l'on tire toutes les boules (ie $R = 2^n$).

Puis pour $k \in G(\Omega)$, on exprime $p(G=k)$ en utilisant le système complet d'événements associé à la variable R :

$$\begin{aligned} p(G=k) &= \sum_{j=0}^{2^n} p\left((R=j)\cap(G=k)\right) \\ &= \frac{1}{2^n+1}\sum_{j=0}^{2^n} p_{(R=j)}(G=k). \end{aligned}$$

En effet, R suit une loi uniforme donc : $p(R=j)=\frac{1}{2^n+1}$.
Cela donne ensuite :

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^{n2^{n-1}} kp(G=k) \\ &= \frac{1}{2^n+1}\sum_{k=0}^{n2^{n-1}} k\sum_{j=0}^{2^n} p_{(R=j)}(G=k) \\ &= \frac{1}{2^n+1}\sum_{j=0}^{2^n}\sum_{k=0}^{n2^{n-1}} kp_{(R=j)}(G=k) && \text{on échange les sommes finies} \end{aligned}$$

Pour $j \in [\![1,2^n]\!]$, la somme $\sum_{k=0}^{n2^{n-1}} kp_{(R=j)}(G=k)$ correspond au calcul de l'espérance avec $R=j$ à la question précédente.
On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n2^{n-1}} kp_{(R=j)}(G=k) = \frac{jn}{2}.$$

La relation est aussi vrai pour $j=0$ (dans ce cas G est nulle).
Ce qui donne :

$$\begin{aligned} E(G) &= \frac{n}{2}\frac{1}{2^n+1}\sum_{j=0}^{2^n} j \\ &= \frac{n}{2}\frac{1}{2^n+1}\frac{2^n(2^n+1)}{2} \\ &= \frac{n2^n}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 9 On dispose de deux urnes A et B, de six boules numérotées de 1 à 6, et d'un dé à 6 faces équilibré. Initialement, l'urne A contient les boules numérotées de 1 à 2, et l'urne B contient les boules numérotées de 3 à 6. L'expérience aléatoire consiste à lancer le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro correspondant à la face du dé. On appelle **échange** une telle opération.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne A après n échanges successifs. En particulier X_0 est la variable certaine égale à 2.

1. Quel est le contenu de l'urne A si les cinq premiers lancers du dé donnent successivement : 1,3,2,3,5 ?
2. (a) Donner la loi de X_1, sa variance et son espérance.
   (b) Donner la loi du couple (X_1, X_2) (faire un tableau).
   (c) En déduire la loi de X_2 et son espérance.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   (a) Montrer que :
   $$p(X_{n+1}=0) = \frac{1}{6}p(X_n=1) \qquad p(X_{n+1}=6) = \frac{1}{6}p(X_n=5).$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1,5]\!], \quad p(X_{n+1}=k) = \frac{7-k}{6}p(X_n=k-1) + \frac{k+1}{6}p(X_n=k+1).$$
   On remarquera que cette relation reste valable pour $k=0$ et $k=6$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(d) Démontrer que

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{6}E\big((6-X_n)(X_n+1)\big) + \frac{1}{6}E\big((X_n-1)X_n\big)$$

et en déduire une expression de $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$.

(e) Déterminer $E(X_n)$ en fonction de n et préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, on note :
   - N_i la variables aléatoire égale au nombre de fois où la boule numérotée i a changé d'urne après les n échanges (c'est donc le nombre de fois où le lancé de dé a sorti la face i).
   - T_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule i est dans l'urne A après les n échanges, et qui vaut 0 dans le cas contraire.

   (a) Soit $i \in [\![1,6]\!]$. Quelle est la loi de N_i ? Que valent son espérance et sa variance ?

   (b) Soient :

$$\sigma_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \quad \text{et} \quad \tau_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

   En calculant $\sigma_n + \tau_n$ et $\sigma_n - \tau_n$, montrer que :

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right) \quad \text{et} \quad \tau_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)$$

   (c) Traduire l'événement $(T_1 = 1)$ en utilisant la parité (ou l'imparité) de la variable N_1. En déduire que T_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre σ_n.

   (d) Préciser les loi de T_2, T_3, T_4, T_5 et T_6.

   (e) En utilisant les résultats de la question précédente, retrouver l'espérance de X_n.

   (f) On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules se trouvant dans l'urne A à la fin de l'expérience. Déterminer l'espérance de Y_n et préciser la limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter : en moyenne, la somme des numéros des boules est-elle plus élevée dans l'urne A ou dans l'urne B ?

Correction :

1. on enlève la boule 1, on ajoute la 3, on enlève la 2, on enlève la 3, on ajoute la 5.
   Il ne reste que la boule 5.

2. (a) $X_1(\Omega) = \{1,3\}$, avec :

$$p(X_1 = 1) = \frac{2}{6} \qquad p(X_1 = 3) = \frac{4}{6}$$

   D'où $E(X_1) = \frac{14}{6}$ et $V(X_1) = \frac{32}{36}$.

   (b) On peut regarder par les probas composées :

$$\begin{aligned} p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) &= \frac{2}{6}\frac{1}{6} \\ p(X_1 = 1 \cap X_2 = 2) &= \frac{2}{6}\frac{5}{6} \\ p(X_1 = 3 \cap X_2 = 2) &= \frac{4}{6}\frac{3}{6} \\ p(X_1 = 3 \cap X_2 = 4) &= \frac{4}{6}\frac{3}{6} \end{aligned}$$

   Les autres termes sont nuls.
   Dans un tableau :

	$X_2 = 0$	$X_2 = 2$	$X_2 = 4$	loi de X_1
$X_1 = 1$	$\frac{2}{36}$	$\frac{10}{36}$	0	$\frac{12}{36}$
$X_1 = 3$	0	$\frac{12}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{24}{36}$
loi de X_2	$\frac{2}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	

   (c) En déduire la loi de X_2 et son espérance. On a :

$$p(X_2 = 0) = \frac{2}{36} \qquad p(X_2 = 2) = \frac{22}{36} \qquad p(X_2 = 5) = \frac{12}{36}$$

$$E(X_2) = \frac{23}{9} \qquad V(X_2) = \frac{101}{81}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   (a) Si $X_{n+1} = 0$, c'est nécessairement que $X_n = 1$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} p(X_{n+1} = 0) =& p\left((X_{n+1} = 0) \cap (X_n = 1)\right) \\ =& p\left((X_n = 1)\right) p_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{6} p(X_n = 1) \end{aligned}$$

   En effet, $p_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ est la probabilité que le dé tombe sur le numéro de l'unique boule de l'urne A. Donc, $p_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{6}$.
   De même :

$$\begin{aligned} p(X_{n+1} = 6) =& p\left((X_{n+1} = 6) \cap (X_n = 5)\right) \\ =& p\left((X_n = 5)\right) p_{(X_n=5)}(X_{n+1} = 6) = \frac{1}{6} p(X_n = 5) \end{aligned}$$

   De même, $p_{(X_n=5)}(X_{n+1} = 6) = \frac{1}{6}$.
   (b) Pour $k \in [\![1,5]\!]$, on a :

$$(X_{n+1} = k) \subset \left((X_n = k-1) \cup (X_n = k+1)\right)$$

   en effet, le nombre de boule dans l'urne A augmente ou diminue de 1 à chaque tirage, comme l'union est disjointe, cela s'écrit :

$$p(X_{n+1} = k) = p\left((X_{n+1} = k) \cap (X_n = k-1)\right) + p\left((X_{n+1} = k) \cap (X_n = k+1)\right)$$

   (autre rédaction : probas totales et uniquement 2 termes non nuls dans la somme).
   Cela donne :

$$\begin{aligned} p(X_{n+1} = k) =& p(X_n = k-1) p_{(X_n=k-1)}\left((X_{n+1} = k)\right) + p(X_n = k+1) p_{(X_n=k+1)}\left((X_{n+1} = k)\right) \\ =& \frac{7-k}{6} p(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6} p(X_n = k+1). \end{aligned}$$

   En effet :

$$p_{(X_n=k-1)}\left((X_{n+1} = k)\right) = \frac{6-(k-1)}{6} \qquad \text{et} \qquad p_{(X_n=k+1)}\left((X_{n+1} = k)\right) = \frac{k+1}{6}.$$

   (c) On part de :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) =& \sum_{k=0}^{6} k p(X_{n+1} = k) \\ =& \sum_{k=0}^{6} k \frac{7-k}{6} p(X_n = k-1) + k \frac{k+1}{6} p(X_n = k+1) \\ =& \sum_{k=0}^{6} k \frac{7-k}{6} p(X_n = k-1) + \sum_{k=0}^{6} k \frac{k+1}{6} p(X_n = k+1) \\ =& \sum_{k=1}^{6} k \frac{7-k}{6} p(X_n = k-1) + \sum_{k=0}^{5} k \frac{k+1}{6} p(X_n = k+1) && \text{en enlevant les termes nuls} \\ =& \sum_{k=0}^{5} (k+1) \frac{6-k}{6} p(X_n = k) + \sum_{k=1}^{6} (k-1) \frac{k}{6} p(X_n = k) \\ =& \sum_{k=0}^{5} (k+1) \frac{6-k}{6} p(X_n = k) + \sum_{k=0}^{6} (k-1) \frac{k}{6} p(X_n = k) && \text{en ajoutant des termes nuls} \\ =& \frac{1}{6} E\left((6-X_n)(X_n+1)\right) + \frac{1}{6} E\left((X_n-1)X_n\right) && \text{Thm de transfert.} \end{aligned}$$

On développe :

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}E\big((6-X_n)(X_n+1)\big)+\frac{1}{6}E\big((X_n-1)X_n\big) =&\frac{1}{6}E\left(6+5X_n-X_n^2\right)+\frac{1}{6}E\left(X_n^2+X_n\right)\\ =&\frac{1}{6}\left(6+4E(X_n)\right)\end{aligned}$$

D'où :

$$E(X_{n+1})=1+\frac{2}{3}E(X_n)$$

(d) suite arithmético géométrique.
Attention : pour $n=0$ la relation est fausse puisque $E(X_0)=1$ et $E(X_1)=\frac{14}{6}\neq 1+\frac{2}{3}$. Il faut donc commencer à 1.
On résout : $l=1+\frac{2}{3}l$ ainsi, $l=3$. Cela donne :

$$\begin{aligned}E(X_n) =&\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\left(E(X_1)-3\right)+3\\ =&\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\left(\frac{14}{6}-3\right)+3\\ =&\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\left(-\frac{2}{3}\right)+3\\ =&-\frac{2^n}{3^n}+3\end{aligned}$$

On obtient :

$$\lim_{n\infty}E(X_n)=3$$

Ainsi, on s'attend au bout d'un très grand nombre d'échange d'avoir 3 boules dans l'urne A et 3 dans l'urne B, c ce qui est assez naturel.

4. (a) $N_i\sim\mathscr{B}\left(n,\frac{1}{6}\right)$ puisque c'est le nombre de fois que le dé donne la valeur i.
(b) On calcule donc :

$$\begin{aligned}\sigma_n+\tau_n =&\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair et impair}}}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}\\ =&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}=1\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sigma_n-\tau_n =&\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair et impair}}}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}\\ =&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}=\frac{4^n}{6^n}=\frac{2^n}{3^n}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\sigma_n+\tau_n =&1\\ \sigma_n-\tau_n =&\frac{2^n}{3^n}\end{aligned}$$

cela donne facilement le résultat.
(c) $T_i=1$ signifie que la boule i est dans la boîte A. Donc :

$$p(T_1=1)=\sigma_n$$

et donc $T_1\sim\mathscr{B}(\sigma_n)$.

(d) Pour les boules 1 et 2, elles ont donc changé un nombre pair de fois. Donc :

$$p(T_1 = 1) = \sigma_n \qquad p(T_2 = 1) = \sigma_n$$

et donc $T_1 \sim \mathscr{B}(\sigma_n)$ et $T_2 \sim \mathscr{B}(\sigma_n)$ Pour les boules 3,4, 5 et 6, elles ont donc changé un nombre impair de fois.

$$p(T_1 = 1) = \tau_n \qquad p(T_2 = 1) = \tau_n$$

et donc $T_1 \sim \mathscr{B}(\tau_n)$ et $T_2 \sim \mathscr{B}(\tau_n)$.

(e) On a la relation :

$$X_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_6$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} E(X_n) =& 2\sigma_n + 4\tau_n \\ =& \left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right) + 2\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) \\ =& 3 - \frac{2^n}{3^n} \end{aligned}$$

(f) On a :

$$Y_n = T_1 + 2T_2 + 3T_3 + \cdots + 6T_6$$

donc :

$$\begin{aligned} E(Y_n) =& 3\sigma_n + 18\tau_n \\ =& \frac{3}{2}\left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right) + 9\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) \\ =& \frac{21}{2} - \frac{15}{2}\frac{2^n}{3^n} \end{aligned}$$

On en déuduit que :

$$\lim_{n\infty} E(Y_n) = \frac{21}{2}$$

Or la somme des valeurs des boules faits $1 + 2 + \ldots 6 = 21$.
La somme des numéros des boules est donc en moyenne équilibrée dans les deux boîtes au bout d'un grand nombre de tirage.

Un peu de théorie des ensembles
Probabilités
Conditionnement et indépendance
Exercices
Les séries numériques à connaître pour le calcul des probabilités
Étude de la série harmonique
Fiche trigonométrie
Fonctions usuelles
Rappels et compléments sur les séries numériques

1 — Espaces probabilisés

Dans ce chapitre, on reprend les notions vues en première année en étudiant maintenant le cas d'un univers infini.

La motivation est de pouvoir considérer des expériences aléatoires comme

- un tirage de pile / face de longueur infinie, pour lequel $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est un ensemble non dénombrable.
- un tirage d'une boule dans une urne qui contient une infinité de boules numérotées sur les entiers naturels, pour lequel $\Omega = \mathbb{N}$ est dénombrable mais $P(\Omega) = P(\mathbb{N})$ est un ensemble encore non dénombrable.

I Un peu de théorie des ensembles

Le but de cette partie est la mise en place du cadre général de la théorie des probabilités permettant d'aborder l'étude de processus stochastiques à temps discret.

> Conformément au programme :
> - la notion de tribu ne doit donner lieu à aucun développement théorique autre que sa définition ;
> - la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme.

I.1 Rappel sur la notion de famille

Si I est un ensemble (l'ensemble des **indices**) et E un autre ensemble (l'ensemble des **éléments**), alors on peut définir les familles de E indexées sur I : une famille est une application $\varphi : I \to E$.

On peut la noter : $(\varphi(i))_{i\in I}$ ou encore $(\varphi_i)_{i\in I}$

Par exemple, si $I = [\![1,n]\!]$ on a une famille de n éléments de E : $(\varphi(1),\dots,\varphi(n))$ notée $(x_1,\dots,x_n)$. On parle alors de **famille finie** puisque I est finie (ou encore de liste de longueur finie).

Si $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ on a une **suite d'éléments** de E $(\varphi(1),\dots,\varphi(n),\dots) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Si I est un autre ensemble infini, on peut faire de même et indexer la famille sur un ensemble quelconque. On parle alors de **famille infinie**.

R Si la fonction φ est injective alors les éléments de la famille sont distincts (deux à deux).

On se sert de cette notion pour parler de famille finie libre / génératrice de vecteurs.

Le lien entre les fonctions et les listes a déjà été vu au chapitre dénombrements : il y a autant d'applications de l'ensemble fini E dans l'ensemble F que de liste d'éléments de F de longueur $\mathrm{Card}(E)$.

■ **Exemple I.1** Lorsqu'on écrit : la famille de polynômes

$$\left(X^i\right)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est libre dans } \mathbb{R}[X].$$

On considère implicitement la fonction $\varphi : i \mapsto X^i$ définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}[X]$. La famille considérée est l'image par φ de $\mathbb{N}$. ■

■ **Exemple I.2** On peut parler de la famille de polynômes :

$$\left((X-i)^j\right)_{i,j\in\mathbb{N}^2} \text{ indexée sur deux indices.}$$

On considère alors implicitement l'application $\varphi : (i,j) \mapsto (X-i)^j$ définie sur $\mathbb{N}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$. ■

■ **Exemple I.3** On peut parler de la famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\left(x \mapsto |x-a|\right)_{a\in\mathbb{R}} \text{ indexée sur les réels.}$$

On considère alors implicitement l'application $\varphi : a \longmapsto f_a$ où f_a est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_a : x \mapsto |x-a|$.

L'application φ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. ■

Si une famille est indexée sur I et si I est en bijection avec J, alors on peut toujours indexer la famille sur J.

C'est en fait ce que l'on fait lorsqu'on fait un changement de variable dans une somme de réels : on fait la somme des éléments d'une famille, donc peu importe comment on les numérote. Ainsi :

$$\text{écrire : } \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$$

revient à indexer la famille $(a_0,\dots,a_n)$, sous la forme :

$$(a_{1-1}, a_{2-1}, \dots, a_{n+1-1})$$

ou encore si la première numérotation corresponds à une fonction :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![0,n]\!] & \to & \mathbb{R} \\ k & \longmapsto & a_k \end{array} \right.$$

alors la deuxième numérotation corresponds à la fonction :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,n+1]\!] & \to & \mathbb{R} \\ k & \longmapsto & a_{k-1} \end{array} \right.$$

On peut donc dire que pour un ensemble fini I, on calcule $\sum_{i\in I} x_i$ peu importe comment on numérote les éléments de I. On généralisera cette notion un peu plus loin.

I.2 Rappel sur les symboles union et intersection

Les symboles $\cup$ et $\cap$ sont étendus au cas d'une famille finie et infinie d'ensembles.

Pour une famille finie pour $(A_i)_{i\in[1,n]}$ une famille finie d'ensembles de Ω :

$$\bigcup_{i\in[1,n]} A_i = \left\{ x \in \Omega \middle| \exists i \in [\![1,n]\!], x \in A_i \right\}$$
$$\bigcap_{i\in[1,n]} A_i = \left\{ x \in \Omega \middle| \forall i \in [\![1,n]\!], x \in A_i \right\}$$

Pour une famille finie, on note :

$$\bigcup_{i\in[1,n]} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \bigcap_{i\in[1,n]} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Pour une suite pour $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de Ω :

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \left\{ x \in \Omega \middle| \exists i \in \mathbb{N}, x \in A_i \right\}$$
$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \left\{ x \in \Omega \middle| \forall i \in \mathbb{N}, x \in A_i \right\}$$

pour une suite, on peut noter :

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \qquad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$$

! Il n'y a aucune notion de limite dans ce symbole, c'est simplement une notation !

En effet, on ne sait pas définir la limite d'ensemble, donc on ne peut pas écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Pour une famille quelconque On fait de même en remplaçant $\mathbb{N}$ par l'ensemble des indices I.

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left\{x \in \Omega \middle| \exists i \in I, x \in A_i\right\}$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \left\{x \in \Omega \middle| \forall i \in I, x \in A_i\right\}$$

Dans les faits, on utilisera très peu une telle notation dans le cas où I n'est pas dénombrable.

■ **Exemple I.4** On peut considérer l'ensemble :

$$E = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i\neq j} A_i \cap A_j = \left\{x \in \Omega \middle| \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } i \neq j,\ x \in A_i \cap A_j\right\}$$

C'est une union d'une famille d'ensembles indicée sur deux indices. Si A_i signifie « succès au tirage i », alors E signifie : au moins deux succès.

On peut aussi considérer :

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$$

C'est union des familles d'ensemble : $F_k = \bigcup_{k\geqslant n} A_k$. Toujours avec l'idée que A_i signifie « succès au tirage i », alors F_k signifie : il y a au moins un succès après le tirage k, et donc F signifie : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il y a au moins un succès après le tirage k. Ce qui signifie donc qu'il n'y a pas de dernier succès, et donc qu'il y en a une infinité. ■

Ces notations vérifient les propriétés naturelles vues pour deux ensembles :

$$\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_i}$$
$$B \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (B \cap A_i) \qquad B \cup \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (B \cup A_i)$$

I.3 Ensembles dénombrables

Définition I.1 Un ensemble E est dit dénombrable si il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Un ensemble E est dit fini si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$. On rappelle alors que n est unique : c'est le **cardinal** de E.

Un ensemble E est dit au plus dénombrable si il est fini ou dénombrable c'est-à-dire si il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.

Un ensemble E est dénombrable si il peut s'écrire :

$$E = \left\{x_k \middle| k \in \mathbb{N}\right\}$$

Un ensemble E est fini de cardinal n si il peut s'écrire :

$$E = \left\{x_k \middle| k \in [\![1,n]\!]\right\}$$

Ainsi, un ensemble dénombrable contient une infinité d'éléments mais qui peuvent être comptés un à un jusqu'à l'infini. Ces éléments constituent donc une suite.

C'est un intermédiaire entre ensemble fini et ensemble infini non dénombrable.

Un ensemble dénombrable s'identifie toujours à $\mathbb{N}$. Si E est dénombrable, une bijection de $\mathbb{N}$ dans E est une numérotation des éléments de E.

En particulier, si I est dénombrable, une famille indexée sur I peut toujours être indexée sur $\mathbb{N}$, c'est donc toujours une suite.

■ **Exemple I.5** $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N} \setminus \{1,4,5\}$ sont dénombrables.

L'ensemble des entiers pairs est dénombrables, l'ensemble des entiers impairs est dénombrables. ■

Soit Ω un ensemble.

Une **famille dénombrable** d'éléments de Ω est une famille indexée sur un ensemble I dénombrable. Cela s'identifie à une suite d'éléments de Ω que l'on peut noter $\left(x_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$.

Une **famille finie** d'éléments de Ω est une famille indexée sur un ensemble I fini.

Si E est dénombrable et E est une partie de Ω, c'est que E est une famille dénombrable d'éléments de Ω.

■ **Exemple I.6**

$$\left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\} \text{ est une famille dénombrable de } \mathbb{R}.$$

■

Tout ensemble inclus dans un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

On peut dire qu'un ensemble est au plus dénombrable si il existe un injection de cet ensemble dans $\mathbb{N}$.

On a le théorème fondamental : Si E est dénombrable et que F est en bijection avec E, alors F est aussi dénombrable.

Proposition I.1 Soit E un ensemble.

Si il existe une suite d'ensembles E_n telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E_n \text{ est un ensemble au plus dénombrable,} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$$

alors E est dénombrable.

On dit que une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration. La démonstration est admise.

L'idée est que l'on peu supposer les (E_n) disjoints ce qui ne change rien. On note $E_i = \left\{x_j^i | j \in \mathbb{N}\right\}$et que l'on compte les éléments de E ainsi :

Le premier élément de E_1 : x_1^1,

puis le deuxième de E_1 et le premier de E_2 : x_1^2, x_2^1,

etc. d'une manière générale, on compte à l'étape n les éléments x_i^j avec $i+j=n$.

On compte comme cela tous les éléments.

■

En particulier : si on peut écrire E comme une union dénombrable d'ensembles finis, alors E est dénombrable.
C'est la méthode principale pour montrer qu'un ensemble est dénombrable : on le découpe en une suite de parties finies.

Proposition I.2 L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ i \in \mathbb{Z} \middle| |i| \leqslant n \right\}$$

or $\{i \in \mathbb{Z} \mid |i| \leqslant n\}$ est de cardinal $2n+1$. On a ainsi découpé l'ensemble $\mathbb{Z}$ en une suite de parties finies.

Autrement dit, on compte les éléments de $\mathbb{Z}$ ainsi : d'abords 0, puis 1 et -1, puis 2 et -2, etc. ■

On peut aussi expliciter une bijection :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \end{array} \right.$$

Si n est pair, on a : $\Phi(n) = \frac{n}{2}$ et si n est impair, on a : $\Phi(n) = -\frac{n+1}{2}$. Ainsi :

$$\Phi(0) = 0 \quad \Phi(1) = -1 \quad \Phi(2) = 1 \quad \Phi(3) = -2, \text{ etc.}$$

Proposition I.3 Si A et B sont deux ensembles dénombrables, alors $A \times B$ est aussi dénombrable.

En conséquence, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensemble dénombrable est dénombrable.

Démonstration. On note

$$A = \left\{ a_i \middle| i \in \mathbb{N} \right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{ b_j \middle| j \in \mathbb{N} \right\}$$

On écrit alors :

$$A \times B = \left\{ (a_i, b_j) \middle| i + j \leqslant n \right\}$$

On compte ainsi les éléments de $A \times B$ « en diagonale ». D'abords (a_0, b_0), puis (a_1, b_0) et (a_0, b_1), puis (a_2, b_0), (a_1, b_1) et (a_0, b_2) (faire un dessin). ■

Corollaire I.4 L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration. $\mathbb{Q}$ est en bijection avec $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. ■

Proposition I.5 L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. La démonstration est hors programme.

On va montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable. Pour cela, on raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe une suite de réels $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que $[0,1] = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$. On donne le développement décimal de chaque (x_i). On obtient un tableau avec un nombre infini de ligne et colonne.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0, a_1 ********** \\
x_1 &= 0, *a_2 ********** \\
x_2 &= 0, **a_3 **********
\end{aligned}$$

Les termes écrits avec des * sont des entiers de $[\![0,9]\!]$ sans intérêt. Seul nous intéresse la « diagonale » de ce tableau. Cela donne une suite (a_i) d'entiers de $[\![0,9]\!]$. On construit une autre suite (b_i) d'entiers de $[\![0,9]\!]$ avec

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ b_i = a_i + 1 \text{ si } a_i \leqslant 8 \qquad \text{et} \qquad b_i = 0 \text{ si } a_i = 9.$$

Ainsi, on a modifié tous les a_i, ie : $\forall i \in \mathbb{N},\ a_i \neq b_i$. On considère alors le nombre y dont le développement décimale est : $y = 0, b_1 \dots b_i \dots$. On a $y \in [0,1]$ et y ne peut être l'un des (x_i). Puisque pour tout $i \in \mathbb{N}$, la i-ième décimale de y et de x_i est différente.

Ainsi, on a construit un élément de $[0,1]$ qui n'est pas un élément de la suite des (x_i), cad : $[0,1] \neq \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$ et donc $[0,1]$ n'est pas dénombrable. ■

Proposition I.6 L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.
L'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. La démonstration est aussi hors programme.

Pour $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ cad l'ensemble des suite à valeurs dans $\{0,1\}$, on utilise le même procédé qu'à la démonstration précédente. On suppose que :

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \left\{ x_i \middle| i \in \mathbb{N} \right\}$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, un élément x_i corresponds à une suite de 0 et de 1. On les écrits par ligne comme précédemment :

$$\begin{aligned}
x_0 &= a_1, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, \\
x_1 &= *, a_2, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, \\
x_2 &= *, *, a_3, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *, *,
\end{aligned}$$

chaque ligne contient une suite de 0 et de 1, les a_i sont les éléments qui nous intéressent. on change les a_i (en les passant de 1 à 0 et réciproquement) en posant

$$\forall i \in \mathbb{N},\ b_i = (a_i - 1)^2$$

et on considère la suite $y = \left(b_i\right)$ c'est la suite des b_i qui n'est égale à aucune des suites (x_i). D'où la contradiction.

Enfin, on peut constater que les parties de $\mathbb{N}$ sont en bijection avec les suites à valeurs dans $\{0,1\}$. Selon un procédé classique :

$$\left\{\begin{array}{ccc} P(\mathbb{N}) & \to & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \{0,1\} \\ i & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } i \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Comme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable, on en déduit que $P(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. ■

On rappelle que pour tout ensemble E, $P(E)$ (l'ensemble des parties de E) est en bijection avec $\{0,1\}^E$ (l'ensemble des fonctions de E dans $\{0,1\}$).
Cela permet de démontrer que si E est fini, $P(E)$ est fini et $\text{Card}(P(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$.
On peut aussi montrer que E et $P(E)$ ne sont jamais en bijection.
Ainsi, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, mais $P(\mathbb{R})$ est un ensemble « plus gros » que $\mathbb{R}$ (au sens où $\mathbb{R}$ s'injecte dans $P(\mathbb{R})$, mais qu'il n'existe pas de bijection entre les deux).
Dans le même sens $\mathbb{N}$ est dénombrable, mais l'ensemble des ces parties $P(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Ainsi, si on considère un tirage de pile / face de longueur infini, on a $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui est un ensemble non dénombrable.

De plus, si on considère un tirage dans une urne de taille infinie contenant toutes les boules numérotées sur $\mathbb{N}$, alors $\Omega = \mathbb{N}$ est bien dénombrable, mais $P(\Omega)$ n'est pas dénombrable.

✯ Retour sur le symbole somme

Conformément au programme, on ne soulève pas de difficulté théorique dans cette partie.

Pour une famille finie $(x_i)_{i\in I}$ de réels, $\sum_{i\in I} x_i$ désigne la somme des éléments. Cela ne dépend bien sûr pas de l'ordre dans lequel on fait la somme.

Pour une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs, $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ désigne la valeur de la limite des sommes partielles :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)$$

Si la série converge, c'est un réel, sinon c'est $+\infty$, car la suite des sommes partielles est croissante.

Dans les deux cas, on a une autre définition :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = \sup_{A\subset\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in A} x_i\right)$$

Puisque si $A \subset \mathbb{N}$, on a nécessairement $\sum_{i \in A} x_i \leqslant \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$.

Cette dernière définition a l'avantage de ne pas prendre en compte l'ordre dans lesquels on lit les termes de la suite.

On peut par exemple, ajouter tous les termes d'indices pairs, puis tous les termes d'indice impair :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i = \sum_{i \in \mathbb{N} | i \text{ pair}} x_i + \sum_{i \in \mathbb{N} | i \text{ impair}} x_i$$

Les deux sommes convergent puisqu'elles sont inférieures à la somme de tous les éléments.

Ainsi, pour une série à termes positifs, $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ désigne naturellement la valeur de la somme des éléments de la famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Si on change la manière dont la famille est indexée, on ne change pas la valeur de cette somme.

Si la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est constituée de réels de signe quelconque, les choses sont plus compliqués.

Par exemple, si on prends $x_i = \frac{(-1)^{i-1}}{i}$, les séries $\sum_{i \in \mathbb{N} | i \text{ pair}} x_i$ et $\sum_{i \in \mathbb{N} | i \text{ impair}} x_i$ divergent tandis que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ converge.

On peut aussi faire :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi, en changeant l'ordre des termes :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$$

Ainsi, la valeur de la série et sa convergence dépendent donc de l'ordre dans lequel on ajoute les termes.

Dans ce cas, le symbole $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ désigne toujours la limite des sommes partielles :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} x_i = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i \right)$$

mais c'est la seule définition possible.

En conséquence, la notation $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ est normalement réservée au cas d'une série à termes positifs ou d'une série absolument convergente.

Soit maintenant I un ensemble d'indices et $\left(x_i\right)_{i\in I}$ une famille de réels indicée sur I.

On souhaite déterminer les conditions pour pouvoir définir : $\sum_{i\in I} x_i$. Par exemple pour pouvoir parler de $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i^j$ pour une famille $\left(a_i^j\right)$ indexée sur deux indices d'éléments positifs.

Déjà, la notation $\sum_{i\in I} x_i$ n'est utilisable que si I est dénombrable.

En effet, supposons que la série $\sum_{i\in I} x_i$ converge avec (x_i) une suite de réels strictement positifs, on note alors pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E_n = \left\{ i \in I \middle| x_i \geqslant \frac{1}{n} \right\}$$

On a alors :

$$\sum_{i\in I} x_i \geqslant \sum_{i\in E_n} x_i \geqslant \frac{\mathrm{Card}(E_n)}{n}$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n est un ensemble fini. On a de plus :

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

et donc I est une union d'ensemble fini, donc I est dénombrable.

Il est ainsi impossible de faire la somme d'une série de réels indexée sur un ensemble non dénombrable.

On suppose donc que I est dénombrable, on considère une numérotation de I, c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{N}$ dans I. On a donc envie de poser :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{l\in\mathbb{N}} x_\varphi(l)$$

pour retomber sur la définition d'une série usuelle. Le problème c'est que cela dépends donc de la numérotation choisie, ie de l'ordre choisi pour ajouter les termes. Ce n'est donc possible que pour une série à termes positifs. La valeur est alors : $+\infty$ ou une valeur finie.

En conséquence : la notation $\sum_{i\in I} x_i$ n'est utilisable que si I est dénombrable et si (x_i) est une suite à termes positifs.

Cela désigne alors :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{l\in\mathbb{N}} x_{\varphi(l)}$$

où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans I. La valeur de la somme ne dépends pas de la

bijection choisie.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments positifs est SOMMABLE si $\sum_{i\infty I} x_i < +\infty$. Cela ne dépend pas de l'ordre des termes (ie de la numérotation choisie).

On peut donc définir par exemple des sommes doubles infinies :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i^j \text{ comme somme des éléments de la famille dénombrable } \left(a_i^j\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$$

à condition que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, a_i^j \geqslant 0$.

On peut définir aussi des sommes triangles infinies :

$$\sum_{i\leqslant j} a_i^j \text{ comme somme des éléments de la famille dénombrable } \left(a_i^j\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$$

On peut manipuler les sommes infinies de manière naturelle : c'est-à-dire que pour tout découpage en paquet $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (union disjointe), on a :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$$

Au sens où, si la famille est sommable, ie terme de gauche fini alors toutes les séries du terme de droite convergent. Et si toutes les séries du terme de droite convergent, alors la famille est sommable.

Ces sommes vérifient les propriétés naturelles des sommes, en particulier :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i^j = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_i^j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^j\right)$$

Extrait du programme : *En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.*

I.4 Tribus

Lorsqu'on travaille avec des univers non finis, on ne va pas pouvoir définir la probabilité de tous les événements, on va se restreindre aux événements d'un certain type.

On ne pourra définir la probabilité que des événements qui vérifient certaines condition. Ces événements seront les éléments d'une tribu.

Définition I.2 Soit Ω un ensemble (un univers).

Une tribu sur Ω est une partie $\mathscr{A}$ de l'ensemble des parties $P(\Omega)$ de Ω vérifiant :

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$.

(ii) La tribu est **stable par complémentaire** : pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A} \in \mathscr{A}$.

(iii) La tribu est **stable par réunion dénombrable** : pour toute suite $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

d'ensembles appartenant à $\mathscr{A}$ (d'éléments de $\mathscr{A}$), on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$$

Les éléments de la tribu $\mathscr{A}$ sont appelés des événements.

Les événements sont donc les parties de Ω qui vérifient la propriété d'appartenir à la tribu. On dira aussi que ces événements sont **mesurables**, puisqu'on peut leur associer une probabilité comme on va le voir plus bas.

En utilisant $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$, on voit qu'en mélangeant réunion et complémentaire, on obtient l'intersection, ce qui donne :

Proposition I.7 Pour toute suite $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles appartenant à $\mathscr{A}$ (d'éléments de $\mathscr{A}$), on a

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$$

Ainsi, une tribu est **stable par intersection dénombrable**.

En conséquence immédiate, une tribu est stable par réunion et intersection finie. Ainsi, si $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille d'événements, alors $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ sont des événements.

Démonstration. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{A_n} \in \mathscr{A}$, et donc :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathscr{A}$$

donc :

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \in \mathscr{A} \text{ c'est-à-dire } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$$

■

■ **Exemple I.7** $P(\Omega)$ est une tribu, c'est la plus grande des tribu de Ω.

$\left\{\emptyset,\Omega\right\}$ est aussi une tribu (c'est la plus petite, tribu grossière).

Si $A \subset \Omega$, on a : $\left\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ est une tribu.

Si A et B sont des parties de Ω et que A et B sont éléments de la tribu $\mathscr{A}$, alors :

$$\begin{aligned}
&\emptyset, A, \overline{A}, B, \overline{B},\\
&A\cap B, A\cap\overline{B}, A\cup B, A\cup\overline{B},\\
&\overline{A}\cap B, \overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A}\cup B, \overline{A}\cup\overline{B},\\
&\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\\
&\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup\left(A\cap B\right)\\
&\Omega\\
&\text{ sont des éléments de la tribu } \mathscr{A}.
\end{aligned}$$

(on peut voir qu'il y a 2^4 parties dans cette tribu). ■

II Probabilités

La notation Ω désigne un ensemble appelé univers : c'est l'ensemble des issus possibles de l'expérience aléatoire. La plupart du temps, cet ensemble n'est pas précisé.

II.1 Définition

Définition II.1 Soit Ω un ensemble (l'univers) et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.
Une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \to & [0,1] \\ A & \longmapsto & p(A) \end{array} \right.$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) $p(\Omega) = 1$

(ii) pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$, deux à deux incompatibles, la série à termes positifs $\sum p(A_i)$ est convergente et :

$$p\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(A_i).$$

On appelle espace probabilisé le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, p)$.

La suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ est constituée d'événements deux à deux incompatibles si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

On retrouve donc la définition dans le cas d'un ensemble fini : une probabilité permet **de mesurer les ensembles** de Ω.
Avec une exception de taille : on ne peut mesurer que les événements qui sont dans la tribu $\mathscr{A}$ et non toutes les parties de Ω.
Ainsi, on ne peut mesurer que certains ensembles (ceux qui vérifient la condition « appartenir à $\mathscr{A}$ »). On dit que ces ensembles sont **mesurables**.

Cette tribu contient l'univers complet, l'ensemble vide, si elle contient un élément, alors elle contient son complémentaire, elle est stable par réunion (dénombrable) et par intersection.

En pratique, on suppose que la tribu contient tous les événements dont on a besoin.

La définition est donc la même qu'en première année :

$$\text{si } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles, } p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

on l'étend simplement à une somme infinie (et donc une série au second membre).

On a le même lien entre le vocabulaire ensembliste et le vocabulaire probabiliste (sur l'intersection, le complémentaire, la réunion).
Par exemple, deux ensembles disjoints correspondent à deux événements incompatibles (qui ne peuvent pas se produire ensemble).
L'événement Ω est l'événement certain, $\emptyset$ est l'événement impossible.
On dit qu'un événement A implique B si $A \subset B$.

On en profite pour revoir (et généraliser) la notion de **système complet dénombrable d'événements** : il s'agit d'une famille dénombrable d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega \text{ union disjointe}$$

Union disjointe signifiant deux à deux disjoints c'est-à-dire tels que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

II.2 Propriétés des probabilités

Proposition II.1 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ un espace probabilisé, A et B deux événements, on a :

Probabilité de l'événement contraire : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Croissance de la probabilité : si $A \subset B$ alors $p(A) \leqslant p(B)$

Probabilité d'une union : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Pour une famille finie (A_i) d'événements deux à deux incompatibles, on a :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} p(A_k)$$

Pour une famille finie (A_i) d'événements quelconques, on a :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p(A_k)$$

C'est les même propriétés que dans le cas fini et les démonstration sont identiques. On a mis en avant la propriété de sous-additivité (la dernière) qui restera valable dans le cas d'une réunion dénombrable.

Démonstration. On montre la dernière propriété (la seule nouvelle).

Méthode 1 : On peut le montrer par récurrence, en utilisant $p(A \cup B) \leqslant p(A) + p(B)$. On considère une suite d'événements (A_i) et on note :

$$\mathscr{P}(n) : \qquad p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p(A_k)$$

La propriété est vraie pour $n = 1$.

Soit n fixé, tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai, on a alors :

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) \\ &\leqslant p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + p\left(A_{n+1}\right) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} p(A_k) + p\left(A_{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} p(A_k) \end{aligned}$$

D'où hérédité et conclusion.

Méthode 2 :

On peut aussi utiliser une suite (B_i) d'événements, définie par :

$$B_i = A_i \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k} = A_i \cap \bigcap_{k=1}^{i-1} \overline{A_k}$$

(faire un dessin).

Ainsi, les événements (B_i) sont obtenus à partir des événement (A_i) en enlevant les éléments déjà présents dans les termes précédents.

On voit bien que les événements (B_i) sont disjoints car si $i < j$, on a $B_j \subset \overline{A_i}$ et $B_i \subset A_i$. Ainsi :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i)$$

or d'une part :

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ (faire un dessin pour le voir puis le démontrer)}$$

d'autre part :

$$B_i \subset A_i \text{ donc } p(B_i) \subset p(A_i).$$

D'où :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

■

La propriété suivante est la plus importante du chapitre et la seule vraie nouveauté de deuxième année.

Proposition II.2 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ un espace probabilisé, alors on a :

- **Continuité croissante**
  Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements vérifiant :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1} \qquad \text{(on parle de suite croissante d'événements)}$$

  alors :

  $$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

  au sens où la suite $(p(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est égale à $p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
- **Continuité décroissante**
  Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements vérifiant :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n \qquad \text{(on parle de suite décroissante d'événements)}$$

  alors :

  $$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

  au sens où la suite $(p(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est égale à $p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
- **Sous additivité**
  Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors :

  $$p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n)$$

  au sens où soit la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n)$ diverge, soit sa somme est supérieure à $p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

Pour la première propriété, il faut avoir compris la notion de suite croissante d'événements (faire un dessin). On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$$

Ainsi, la propriété peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} p(A_n) &= \lim_{n\to+\infty} p\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\\ &= p\left(\text{"}\lim_{n\to+\infty}\text{"} \bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\end{aligned}$$

Bien évidemment, cela n'a pas de sens puisqu'on fait une limite d'ensemble, mais cela permet d'expliquer pourquoi on parle de continuité de la probabilité : on échange les symboles limites et p.

On doit démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

On a donc à gauche du signe égal la limite d'une suite de réels, à droite la probabilité de l'événement : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ qui est bien un événement de la tribu $\mathscr{A}$ et qui a donc bien une probabilité.

La suite $\left(p(A_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels de $[0,1]$ (car c'est une suite croissante d'événements). En conséquence, cette suite converge. Il faut donc montrer que sa limite est : $p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

Démonstration. **Continuité croissante**

On considère donc une suite (A_n) d'événements vérifiant : $A_n \subset A_{n+1}$.

On souhaite appliquer la propriété de la définition, qui concerne des ensembles disjoints.

On considère donc la suite d'événements (B_n)

$$B_0 = A_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n = A_{n+1} \cap \overline{A_n}$$

(voir sur le dessin).

On a immédiatement pour $n \in \mathbb{N}$: $A_{n+1} = B_{n+1} \cup A_n$. En effet :

$$\begin{aligned}B_{n+1} \cup A_n &= \left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right) \cup A_n\\ &= \underbrace{\left(A_{n+1} \cup A_n\right)}_{=A_{n+1}} \cap \underbrace{\left(A_n \cup \overline{A_n}\right)}_{=\Omega}\\ &= A_{n+1}\end{aligned}$$

On montre aussi facilement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k.$$

(on peut voir ces propriétés sur le dessin ou les démontrer).

On voit que les (B_n) sont une suite d'événements disjoints deux à deux.

(Cela se voit bien sur le dessin et peut se démontrer facilement)
On a donc :

$$p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(B_n).$$

or :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

(ici aussi, on utilise le dessin, et on peut le montrer avec une égalité d'ensemble).
On a aussi :

$$\forall n \geqslant 1,\ p(B_n) = p(A_n) - p(A_{n-1}) \text{ puisque } A_n = A_{n-1} \cup B_n \text{ union disjointe.}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} p(B_k) &= \sum_{k=1}^{n} p(A_k \setminus A_{k-1}) + p(A_0)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} p(A_k) - p(A_{k-1})\right) + p(A_0)\\ &= p(A_n) && \text{par somme téléscopique}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{n\infty} p(A_n) &= \lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{n} p(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(B_n)\\ &= p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).\end{aligned}$$

■

De même pour la deuxième propriété, il faut avoir compris la notion de suite décroissante d'événements (faire un dessin).
C'est de nouveau une propriété de continuité, puisque l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$$

Ainsi, la propriété peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} p(A_n) &= \lim_{n\to+\infty} p\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)\\ &= p\left(\text{"}\lim_{n\to+\infty}\text{"} \bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\end{aligned}$$

Toujours avec l'abus d'écrire une limite d'ensemble.

On doit montrer :

$$\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

À gauche du signe égal, on peut voir de même la limite d'une suite décroissante de réels de $[0,1]$ (qui existe donc) et à droite la limite d'un événement de $\mathscr{A}$.

Démonstration. **Continuité décroissante**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$ (suite décroissante d'événements).

On construit alors la suite (B_n) définie par $B_n = \overline{A_n}$. Cette suite est croissante, car la relation $A_{n+1} \subset A_n$ donne par complémentaire : $\overline{A_{n+1}} \supset \overline{A_n}$, ie $B_{n+1} \supset B_n$

On utilise alors le résultat précédent qui donne :

$$\lim_{n\infty} p(B_n) = p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$

or on a :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} \quad \text{donc} \quad p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = 1 - p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

et aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(B_n) = 1 - p(A_n) \quad \text{donc} \quad \lim_{n\infty} p(B_n) = 1 - \lim_{n\infty} p(A_n)$$

l'égalité $\lim_{n\infty} p(B_n) = p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$ assure donc :

$$\lim_{n\infty} p(A_n) = p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

■

La propriété de sous-additivité est valable quelque soit la suite d'événements. C'est une généralisation de ce qui a été vu dans le cas d'une liste finie d'événements.

Démonstration. **Sous additivité**

Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, on doit montrer :

$$p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n)$$

À gauche du signe égal on a une probabilité d'un événement de $\mathscr{A}$, donc un objet parfaitement défini. À droite, on a une série à termes positifs.

Supposons donc que cette série $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n)$ converge.

On considère alors la suite d'événement (B_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \bigcup_{k\in[\![0,n]\!]} A_k$$

il s'agit d'une suite croissante d'événement vérifiant : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On applique alors le résultat précédent :

$$p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\infty} p(B_n)$$

or en appliquant :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{A},\ p(A\cup B) \leqslant p(A) + p(B)$$

on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(B_n) = p\left(\bigcup_{k\in[\![0,n]\!]} A_n\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} p(A_k) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n).$$

Ainsi :

$$\lim_{n\infty} p(B_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n).$$

Au final :

$$p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n).$$

■

■ **Exemple II.1** On joue indéfiniment avec une pièce équilibrée.

Montrer que la probabilité de n'obtenir que des piles est nulle.

Ici l'univers est $\{P,F\}^{\mathbb{N}}$. Il ne s'agit pas d'un ensemble dénombrable.

Pour cela, on considère les événements :

$$A_n = \{\text{les } n \text{ premiers lancers sont tous piles}\} = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} P_i$$

$$A = \{\text{ tous les lancers sont piles}\} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} P_i$$

Clairement $A_{n+1} \subset A_n$, on a donc une suite décroissante d'événements avec $A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$.

De plus, $p(A_n) = \frac{1}{2^n}$. Ainsi,

$$p(A) = \lim_{n\infty} p(A_n) = 0.$$

■

L'exemple précédent montre qu'il existe des événements non vide de probabilité nulle. De tels événements sont dits **quasi impossible** (on dit aussi presque impossible ou encore négligeable).
On définit de même les événements **quasi certain** / presque certain / presque sûr comme les événements de probabilité 1 qui ne sont pas l'univers.

Proposition II.3 — Application au cas d'une suite quelconque d'événements. On considère maintenant une suite quelconque d'événements.

On a alors :

$$\lim_{n\infty} p\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

et :

$$\lim_{n\infty} p\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

Démonstration. On note $E_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$. On a alors : (E_n) est une suite croissante d'événements. de plus :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

On peut donc écrire :

$$\lim_{n\infty} p(E_n) == p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

et donc :

$$\lim_{n\infty} p\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

Pour l'autre propriété, on pose : $E_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$. On a alors : (E_n) est une suite décroissante d'événements. de plus :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

On peut donc écrire :

$$\lim_{n\infty} p(E_n) == p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

et donc :

$$\lim_{n\infty} p\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

■

II.3 Construction d'une probabilité sur un univers dénombrable

Sur un univers infini, il ne peut y avoir de probabilité uniforme (puisque la somme des probabilité ne fait pas 1).

On a une généralisation de la construction de probabilité à partir de la probabilité des singletons dans le cas d'un univers dénombrable :

Proposition II.4 On suppose l'univers $\Omega = \left\{x_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ dénombrable.

Considérons une suites p_n de réels positifs tels que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \text{ converge et } \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1.$$

On peut alors construire une probabilité sur $P(\Omega)$ par :

$$\forall A \subset \Omega,\ p(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}|x_i\in A} p_i.$$

Cette probabilité est la seule à vérifier :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ p(\{x_i\}) = p_i.$$

On a ainsi construit une probabilité à partir de la probabilité des événements élémentaires. Cette probabilité est construite sur la tribu $P(\Omega)$, donc tout événements est dans ce cas mesurable !

Remarquons que $\sum_{i\in\mathbb{N}|x_i\in A} p_i$ a bien un sens car il s'agit d'une partie d'une série à termes positifs.

■ **Exemple II.2** On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Pour montrer que l'on défini ainsi une probabilité sur $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$, il suffit de vérifier que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} p(\{n\}) = 1 \text{ au sens converge et la somme fait } 1.$$

ce qui est immédiat (série géométrique).

Pour calculer la probabilité de :

$$B = \{n \in \mathbb{N} | n \geqslant 10\}.$$

Il suffit de faire :

$$\begin{aligned} p(B) &= \sum_{n\in B} p(\{n\}) = \sum_{n\geqslant 10} p(\{n\}) \\ &= \sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{11}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{10}} \end{aligned}$$

Pour calculer la probabilité de $2\mathbb{N}$ ensemble des nombres pairs, il suffit de faire :

$$\begin{aligned} p(2\mathbb{N}) &= \sum_{n\in 2\mathbb{N}} p(\{n\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p(\{2k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

On peut aussi calculer la probabilité d'avoir un nombre plus grand que 10 :

$$p(E) = \sum_{n\geqslant 10} p(\{n\}) = \sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{11}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{10}}$$

■

Si Ω est infini non dénombrable, alors cette technique n'est plus valable : on ne peut pas construire d'espaces probabilisés sur Ω à partir des probabilités des événements élémentaires ! En effet, l'écriture :

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\{\omega\}) = 1$$

n'a aucun sens si Ω n'est pas dénombrable !
En fait pour gérer par exemple le cas d'un tirage P/F de longueur infinie, on procède en considérant la tribu engendrée par les événements $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (avec P_i : pile au tirage i). Cette tribu contient tous les événements que l'on peut mesurer et dont on a besoin en pratique.

III Conditionnement et indépendance

Ce paragraphe étend rapidement les concepts et résultats vus en première année dans le cadre des univers finis.

III.1 Probabilité conditionnelle

Définition III.1 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ un espace probabilisé.
Soit B un événement tel que $p(B) > 0$.
Pour un événement A de Ω, on définit la probabilité conditionnelle de A sachant B :

$$p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

Notation III.1. *On note $p_B(A)$ ou $p(A|B)$ la probabilité conditionnelle.*

Proposition III.1 L'application :

$$p_B : A \longmapsto p_B(A)$$

est une probabilité sur Ω muni de la tribu $\mathscr{A}$.

Démonstration. Déjà, on voit que si A est un événement de Ω (ie un élément de la tribu $\mathscr{A}$), alors $A \cap B$ est aussi élément de la tribu $\mathscr{A}$, donc $p_B(A)$ est bien défini. De plus clairement $p_B(A) \in [0,1]$

Il reste à vérifier les propriétés.

On a clairement $p_B(\Omega) = 1$.

Considérons une suite d'événements (A_i) de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles. Alors on doit démontrer la convergence de la série à termes positifs : $\sum p_B(A_i)$.

On a :

$$p_B(A_i) = \frac{1}{p(B)} p(A_i \cap B)$$

or $\forall i \in \mathbb{N},\ p(A_i \cap B) \leqslant p(A_i)$ or comme p est une probabilité, la série $\sum p(A_i)$ converge. Ainsi, la série $\sum p_B(A_i)$ est une série à termes positifs majorées dont chaque terme est majorée par le terme d'une série convergente donc elle converge.

De plus, on sait :

$$\begin{aligned} p_B\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &= \frac{1}{p(B)} p\left(\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \cap B\right) \\ &= \frac{1}{p(B)} p\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \cap B\right) \end{aligned}$$

La suite d'événement $(A_i \cap B)$ est constituée d'événements disjoints deux à deux. On en déduit donc puisque p est une probabilité :

$$p\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \cap B\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p\left(A_i \cap B\right) \text{ cette somme étant convergente}$$

Ce qui donne en divisant par $p(B)$:

$$\begin{aligned} p_B\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &= \frac{1}{p(B)} \sum_{i\in\mathbb{N}} p\left(A_i \cap B\right) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} p_B\left(A_i\right) \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que p_B est une probabilité. ■

En conséquence les continuités croissantes et décroissante ainsi que la sous-additivité sont valables pour p_B

III.2 Formule des probabilités composées

Proposition III.2 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, un espace probabilisé.

Si $n \geqslant 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements qui vérifient :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0,$$

alors on a :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1)p_{A_1}(A_2)p_{A_1 \cap A_2}(A_3)\ldots p_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

C'est la même formule, la même démonstration (par récurrence) et la même utilisation que dans le cas d'univers fini.

III.3 Formule des probabilités totales

On rappelle que l'on ne considère que des systèmes complet d'événements dénombrables. C'est-à-dire une suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements vérifiant :

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega \text{ union disjointe}$$

On a alors :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} p(A_i) = 1 \text{ au sens où elle converge et est égale à } 1$$

R En aucun cas on pourra considérer un système complet d'événement non dénombrable, car il est impossible de faire une somme d'une famille non dénombrable d'éléments.

Proposition III.3 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, un système complet dénombrable d'événements.
Alors, pour tout événement B, on a :

$$p(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p(A_i \cap B).$$

au sens où cette série (à termes positifs) converge et on a l'égalité.
Si de plus pour tout $i \in \mathbb{N},\ p(A_i) \neq 0$, alors :

$$p(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p(A_i)p_{A_i}(B)$$

C'est la même interprétation que dans le cas fini, mais ici, on s'autorise ainsi des séries plutôt que des sommes finies.

Démonstration. On a :

$$B = \Omega \cup B = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cap B)$$

il s'agit d'une union disjointe, donc d'après la définition d'une probabilité : la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} p(A_i \cap B)$ est convergente et :

$$p(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p(A_i \cap B)$$

En conditionnant, on obtient le résultat final. ■

On adopte souvent la convention que $p_{A_i}(B)p(A_i) = 0$ si $p(A_i) = 0$, ce qui permet de ne pas s'embarrasser de l'hypothèse $p(A_i) \neq 0$.

La formule des probabilités totales reste vraie si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles vérifiant :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} p(A_i) = 1.$$

Un tel système est appelé système quasi-complet d'événements.
En fait dans ce cas si on rajoute à la famille l'événement (quasi impossible) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_i}$, alors on a un système complet d'événements.

■ **Exemple III.1** Dans un tirage P/F infini, les événements $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec E_i « le premier pile arrive au i-ième tirage » forment un système quasi complet d'événements, on peut donc s'en servir pour les probabilités totales. ■

III.4 Formule de Bayes

Proposition III.4 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, un système dénombrable complet d'événements tel que pour tout $i \in \mathbb{N},\ p(A_i) \neq 0$.
Soit B un autre événement tel que $p(B) \neq 0$, alors :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ p_B(A_j) = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{p(B)} = \frac{p_{A_j}(B)p(A_j)}{\sum_{i\in\mathbb{N}} p_{A_i}(B)p(A_i)}$$

En particulier soit A un événement avec $0 < p(A) < 1$, alors

$$p_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p(B)} = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\overline{A}}(B)p(\overline{A})}$$

Même résultat, même démonstration et même interprétation (formule des causes) que dans le cas fini. En particulier, il est plus simple de retrouver cette formule que de la retenir.

III.5 Indépendance

⋆ Cas de deux événements

Définition III.2 Deux événements A et B sont dits indépendants, si on a :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Autrement dit si la probabilité de l'intersection est égale aux produite des probabilités.
Dans le cas où $p(A) \neq 0$, on a : $p(B|A) = p(B)$. Cette condition est alors équivalente à la définition.

Ici encore même remarque que dans le cas fini :

- l'interprétation est : *la réalisation de A n'influe pas sur la probabilité d'apparition de B.*
- Cela peut se démontrer ou être une conséquence de l'énoncé
- C'est parfois contre intuitif.

On rappelle le résultat suivant :

Proposition III.5 Soit A et B deux événements indépendants, alors les événements :
- A et $\overline{B}$,
- $\overline{A}$ et B,
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

sont indépendants.

✯ Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements

Définition III.3 Soit $A_1, \dots A_n$, n évenements d'un espace probabilisé.

On dit que ces évenements sont **deux à deux indépendants**, si pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j).$$

Ces événements sont **mutuellement indépendants** si pour tout sous-ensemble non vide I de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$p\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} p(A_i)$$

R Si on ne précise pas c'est l'indépendance mutuelle que l'on utilise.

L'indépendance des événements (A_i) deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

L'indépendance deux à deux corresponds à la propriété d'indépendance uniquement dans le cas où J contient deux éléments et non un nombre quelconque d'événements.

■ **Exemple III.2** Si on considère deux dés équilibrés, et ainsi la probabilité uniforme sur $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, supposons que l'on considère les événements
- A : « *le premier dé est pair* »,
- B : « *le second dé est pair* »,
- C : « *les deux dés ont même parité* ».

Alors, on a clairement : $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$. Puis l'événement C correspond aussi à un tirage sur 2. On peut les expliciter pour s'en convaincre, ou utiliser la formule des probabilité totales en utilisant comme système complet le résultat du premier tirage. Ainsi $p(C) = \frac{1}{2}$. Puis on a : $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Simplement parce que les deux tirages sont clairement indépendants.

De même, on a : $p(A \cap C) = \frac{1}{4}$.

Pourtant ces trois événements ne sont pas indépendants entre eux, puisque si on sait que A et C se produisent, on est sûr que B se produit.

De plus : $p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq p(A)p(B)p(C)$. ■

Sur l'exemple, on voit bien ce qui se passe : l'indépendance deux à deux c'est $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions, l'indépendance mutuelle, c'est $2^n - n - 1$ conditions (toutes les parties de $[\![1,n]\!]$ sauf l'ensemble vide et les singletons).

Pour démontrer qu'une famille d'événements $(A_1,\dots,A_n)$ est mutuellement indépendante, il faut prendre $k \in [\![2,n]\!]$, et k entiers distincts $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ dans $[\![1,n]\!]$ et vérifier :

$$p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = p(A_{i_1})p(A_{i_2})\dots p(A_{i_k})$$

En pratique, c'est plutôt une conséquence de la modélisation.

On rappelle la proposition :

Proposition III.6 Soit $A_1, A_2, \dots A_n$, une famille d'événements (mutuellement) indépendants.

Soit $(B_i)_{i=1\dots n}$ une famille d'événements, telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!], B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Alors les événements $(B_i)_{i=1\dots n}$ sont indépendants.

Démonstration. Admis. ■

On peut éventuellement étendre la notion d'indépendance à une famille quelconque d'événements $(A_i)_{i\in I}$. On se contente du cas d'une suite.

Définition III.4 Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'évenements.

Ces événement sont alors indépendants deux à deux si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \implies p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j)$$

Ces événements sont alors mutuellement indépendants si : pour tout partie J finie non vide incluse dans $\mathbb{N}$, on a :

$$p\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} p(A_j)$$

Autrement dit si toute sous-famille finie est indépendante au sens précédent.

Conformément au programme, cette notion sert uniquement à décrire le fait que pour un tirage Pile / face de longueur infinie, la suite des événements $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est constituée d'événements indépendants.

Espaces probabilisés

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Ensemble dénombrables

Exercice 1 Soit $A = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $B = \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ deux ensembles dénombrables.

on considère l'application Ψ définie par :

$$\Psi : \begin{cases} A\times B & \to & \mathbb{N} \\ (x_i, y_j) & \longmapsto & \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i \end{cases}$$

Démontrer que Ψ est une bijection.
Quel résultat du cours, a-t-on retrouvé ?

Indication : on peut écrire : $\Psi(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{i+j} k + i$. On pourra donc considérer la suite $(u_l)_{l\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{l} k\right)_{l\in\mathbb{N}}$.

Indication : construire un tableau donnant pour $(i,j) \in [\![[,0]\!],5]^2$ la valeur de $\Psi(x_i, y_j)$.

Correction : Montrons tout d'abords que Ψ est surjective.

Considérons $n \in \mathbb{N}$.

Analyse : Supposons que (i,j) existe, alors on constate que $n = u_{i+j} + i$, on a donc l'idée de poser $l = i+j$, on a alors :

$$n = u_l + i \qquad \text{donc } u_l \leqslant n < u_{l+1}$$

ce qui définit l et permet de poser $i = n - u_l$ puis $j = l - i$.

Synthèse :

Comme la suite $u_l : l \mapsto \sum_{k=1}^{l} k = \dfrac{l(l+1)}{2}$ est croissante et tends vers $+\infty$, il existe un unique $l \in \mathbb{N}$, tel que :

$$(*) \qquad u_l = \sum_{k=1}^{l} k \leqslant n < \sum_{k=1}^{l+1} k = u_{l+1}$$

on note alors $i = n - \sum_{k=1}^{l} k$ et $j = l - i$.

La relation $(*)$ donne alors :

$$0 \leqslant i < l+1 \qquad \text{ainsi : } i \in [\![0,l]\!] \text{ et donc } j \geqslant 0$$

i et j sont donc des entiers naturels. De plus, on a :

$$n = \sum_{k=1}^{i+j} k + i = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i = \Psi(i,j)$$

ce qui montre que Ψ est surjective.

Montrons ensuite que Ψ est injective.

Considérons deux couples (i,j) et (i',j') vérifiant $\Psi(i,j) = \Psi(i',j')$.

On a alors :

$$\frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i = \frac{(i'+j')(i'+j'+1)}{2} + i'$$

ce que l'on écrit :

$$\sum_{k=1}^{i+j} k + i = \sum_{k=1}^{i'+j'} k + i'$$

On note de plus $l = i + j$ et $l' = i' + j'$.

Supposons $i = i'$, on a alors : $u_l = u_{l'}$ et comme la suite (u_l) est strictement croissante, on obtient $l = l'$, donc $j = j'$.

Par l'absurde supposons maintenant $i > i'$. on a alors : $u_{l'} > u_l$ donc $l' > l$ (toujours parce que la suite est strictement croissante. Comme c'est des entiers, on a $l' \geqslant l + 1$, donc :

$$\begin{aligned} u_{l'} &\geqslant u_l + (l+1) \\ &\geqslant u_l + i + j + 1 \\ &\geqslant u_{l'} + j + 1 + i' \end{aligned}$$

D'où $j + 1 + i' \leqslant 0$, ce qui n'est pas possible car c'est des entiers naturels.

Exercice 2 Le but de cet exercice est de démontrer que que $P(\mathbb{N})$ (ensemble des parties de $\mathbb{N}$) n'est pas dénombrable.

Par l'absurde, on suppose donc l'existence d'une bijection f de $\mathbb{N}$ dans $P(\mathbb{N})$. On note $A = \{n \in N | n \notin f(n)\}$. En introduisant l'antécédent q de A aboutir à une contradiction.

Conclure.

Commentaire : exercice assez théorique, peut être laissé pour une deuxième lecture.

Correction : On note donc q l'antécédent de A. On a :

- Supposons : $q \in A$, ie $q \in f(q)$, on a alors par définition de A : $q \notin A$, contradiction.
- Supposons : $q \notin A$, ie $q \notin f(q)$, on a alors $q \in A$, contradiction.

Dans les deux cas nous avons une contradiction, c'est donc impossible !

✯ Propriétés des espaces probabilisés

Exercice 3 Inégalités de Bonferroni

On suppose donné un univers $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ un espace probabilisé.

On considère $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n événements. Montrer les inégalités suivantes :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p(A_i \cap A_j)$$

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} p(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

Correction :

R Exercice qu'il faut savoir refaire (et qui est faisable en première année), parce que la formule générale de la probabilité de la somme est hors-programme, donc ce genre de raisonnement peut être posé à l'écrit.

Le même raisonnement est valable pour les cardinaux.

Notons enfin que le résultat est clair sur un dessin.

On démontre par récurrence :

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{pour toute famille } (A_i) \text{ d'événements} \qquad p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p(A_i \cap A_j)$$

Pour l'initialisation à $n = 2$, c'est $p(A \cup B) \geqslant p(A) + p(B)$, qui est classique.

Considérons n fixé, tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai. Considérons $n+1$ événements. On a :

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) \\ &= p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + p(A_{n+1}) - p\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p(A_i \cap A_j) + p(A_{n+1}) - p\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n+1} p(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p(A_i \cap A_j) - p\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \end{aligned}$$

Il faut donc travailler sur le dernier terme :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}p(A_i\cap A_{n+1})$$

En utilisant la propriété de sous-additivité.

Cela donne :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n+1}p(A_i)-\sum_{i<j}p(A_i\cap A_j)-\sum_{i=1}^{n}p(A_i\cap A_{n+1})$$

LE dernier terme corresponds au terme pour $j=n+1$de la somme double.

Ainsi :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n+1}p(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}p(A_i\cap A_j)$$

D'où l'hérédité et la conclusion.

Exercice 4

On suppose donné un univers $(\Omega,\mathscr{A},p)$ un espace probabilisé.

On considère $(A_i)_{i\in[1,n]}$, n événements indépendants.

Montrer que la probabilité pour qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}p(A_i)\right)$.

Application : on joue indéfiniment à P/F. Montrer que la probabilité de n'obtenir que des piles est nulle.

Indication : utiliser la relation $1-x<e^{-x}$.

Correction : On regarde :

$$\begin{aligned}p\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)&=\prod_{i=1}^{n}(1-p(A_i)) && \text{par indépendance et complémentaire}\\&\leqslant\prod_{i=1}^{n}\exp(-p(A_i)) && \text{en utilisant } 1-x<e^{-x}\\&\leqslant\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}p(A_i)\right)\end{aligned}$$

En utilisant E_n l'événement « pile jusqu'au tirage n », on a :

$$p(E_n)=p\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{F_i}\right)\leqslant\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\right)=\exp\left(-\frac{n}{2}\right)$$

On en déduit :

$$\lim_{n\infty}p(E_n)=0$$

or E_n est une suite décroissante d'événements (puisque $E_{n+1}\subset E_n$). Ainsi :

$$\lim_{n\infty}p(E_n)=p\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}E_n\right)=0$$

Or l'événement n'avoir que des piles est : $\bigcap_{n=0}^{+\infty}E_n$. Ainsi, la probabilité de n'avoir que des piles est nulle.

Exercice 5 On suppose donné un univers $(\Omega,\mathscr{A},p)$ un espace probabilisé.

On considère $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un suite d'événements, tels que la série $\sum_{i\in\mathbb{N}}p(A_i)$ converge.

Montrer que la probabilité qu'une infinité des événements (A_n) se produisent est nulle.

Indication : une infinité des événements (A_n) se produit est l'événement :

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\geqslant n} A_i$$

puisque cela signifie que quelque soit $n \in \mathbb{N}$ il y a un événement A_i qui se réalise avec $i \geqslant n$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons les événements : On a :

$$p\left(\bigcup_{i\geqslant n} A_i\right) \leqslant \sum_{i\geqslant n} p(A_i) \text{ par sous additivité.}$$

Comme la série : $\sum_{i\in\mathbb{N}} p(A_i)$ converge, on a : $\sum_{i\geqslant n} p(A_i)$ est convergente. Ainsi :

$$\lim_{n\infty} p\left(\bigcup_{i\geqslant n} A_i\right) = 0$$

Or la suite d'événements $\left(\bigcup_{i\geqslant n} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc :

$$p(E) = p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\geqslant n} A_i\right) = \lim_{n\infty} p\left(\bigcup_{i\geqslant n} A_i\right) = 0$$

✯ **probabilité sur les entiers naturels**

Exercice 6 Soit p une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

Montrer que $\lim_{n\infty} p(\{n\}) = 0$.

Correction :

On note $p_n = p(\{n\})$, on sait alors que la série à termes positifs On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ converge et est de somme 1 .
Ainsi le terme général tend vers 0.

Exercice 7

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$E_n = \mathbb{N} \setminus [\![0, n-1]\!] = \{n, n+1, \dots\}$$

Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité p sur $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(E_n) = \lambda a_n$$

Correction :

On suppose qu'une telle proba existe, alors : $p(E_0) = p(\mathbb{N}) = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{a_0}$. D'autre part, on voit que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p(\{k\}) = \lambda (a_k - a_{k+1})$$

On vérifie que c'est bien positif et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda (a_k - a_{k+1})$ converge et vaut 1.
Prenons donc cette valeur pour λ et posons pour p l'unique proba vérifiant :

$$p(\{k\}) = \lambda (a_k - a_{k+1})$$

On peut le faire avec le thm du cours.
On vérifie alors que $p(E_k) = \lambda a_k$.

Exercice 8 Soit $a > 1$. On note $\xi(a)$ la somme de la série de Riemann convergente :

$$\xi(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$$

On définit une probabilité p_a sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_a(\{n\}) = \frac{1}{\xi(a) n^a}$$

Calculer $p_a(2\mathbb{N}^*)$. Généraliser à $p_a(m\mathbb{N}^*)$.

REM : la notation $2\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers pairs strictement positifs

$$2\mathbb{N}^* = \{2k | k \in \mathbb{N}^*\}$$

de même $m\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers multiples de m strictement positifs :

$$m\mathbb{N}^* = \{mk | k \in \mathbb{N}^*\}$$

Correction : On a :

$$\begin{aligned} p_a(2\mathbb{N}^*) &= \frac{1}{\xi(a)} \sum_{n=1 \text{ pair}}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \\ &= \frac{1}{\xi(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^a} = \frac{1}{2^a} \frac{1}{\xi(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = \frac{1}{2^a}. \end{aligned}$$

R Le changement de variable doit se justifier sur une somme finie PUIS passage à la limite.

Exercice 9 Soit $c \in]0,1[$. On considère l'espace probabilisé $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), p)$ où p est la probabilité vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p(\{k\}) = A_c \frac{c^k}{k!}$$

où A_c est une réel.

1. Déterminer le réel A_c.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Indication : on rappelle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c^k}{k!} = e^c$.

Correction : $A_c = e^{-c}$.

$$p(2\mathbb{N}) = e^{-c} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c^{2k}}{(2k)!} \text{ même remarque que exo précédent.}$$

On doit alors utiliser la fonction ch puisque :

$$\operatorname{ch}(c) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}(e^c + e^{-c}).$$

✯ Calculs des probabilités

Exercice 10 Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un premier Pile.

Si il lui a fallu n lancers pour obtenir pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

Quel est la probabilité que le joueur gagne ?

Correction : On considère la VAR X qui donne le temps d'attente du premier Pile. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et :

$$\forall n \geqslant 1,\ p(X = k) = pq^{k-1}$$

On utilise les probas totales avec le SCE sur X.

Cela donne :

$$p(G) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p(G \cap X = k) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} pq^{k-1}\frac{1}{k} = \frac{p}{q}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{q^k}{k}$$

ce qui se calcule !

Exercice 11 Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. La pièce amène Face avec la probabilité $p \in]0,1[$.

Le joueur A commence. Le premier joueur qui obtient Face gagne le jeu, le jeu s'arrête alors.

On notera pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

- F_k l'événement « *le lancer k donne Face* », et P_k l'événement « *le lancer k donne Pile* »,
- A_k l'événement « *le joueur A gagne au lancer k* », et B_k l'événement « *le joueur B gagne au lancer k* ».

Enfin, on note A l'événement « *le joueur A gagne* », et B l'événement « *le joueur B gagne* ».

1. Vérifier que

$$A_{2n+1} = \left(\bigcap_{k=1}^{2n}\overline{F_k}\right) \cap F_{2n+1}$$

   Quelle est la probabilité pour que le joueur A gagne lors de son $n+1$-ième lancer ?
2. Vérifier :

$$p(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_{2n+1}).$$

   Quelle est la probabilité pour que le joueur A gagne ?
3. Vérifier :

$$B_{2n} = \bigcap_{k=1}^{2n-1}\overline{F_k} \cap F_{2n}$$

   Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p qui assure que le jeu est équitable ?

Correction :

1. Le jour A gagne au $2n+1$ tirages si il n'y a que des F puis une pile. Au final :

$$p\left(A_{2n+1}\right) = q^{2n}p$$

   On a alors :

$$\begin{aligned} p(A) &= p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_{2n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n}p = p\frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{2-p} \end{aligned}$$

2. On procède de même :

$$p\left(B_{2n}\right) = q^{2n-1}p$$

   Ainsi :

$$p(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n-1}p = \frac{p}{q}q^2\frac{1}{1-q^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

   On vérifie alors que $p(A) + p(B) = 1$, ainsi, la probabilité que le jeux dure indéfiniment est nulle.
3. On a toujours $1 - p < 1$ donc le jeu est toujours défavorable au joueur B !

✯ Exercices de concours

Exercice 12 Dans une boîte B1 , on a mis un jeton N°1 et un jeton N°2. Dans une boîte B2, on a mis un jeton N°1 et 3 jetons N°2.

On prend successivement, indéfiniment et avec remise des jetons.

1. On prend les jetons selon le protocole suivant :
   - le 1 er jeton est pris dans la boîte n°1.
   - Si on prend un jeton n°1 à un tirage, le jeton suivant est pris dans la boîte n°1
   - Si on prend un jeton n°2 à un tirage, le jeton suivant est pris dans la boîte n°2

   On note U_n l'événement, on a pris un jeton n°1 au n-ième tirage.
   Calculer $P(U_n)$.
2. On prend les jetons selon le protocole suivant :
   - le 1 er jeton est pris dans la boîte n°1.
   - Si on prend un jeton n°1 à un tirage, le jeton suivant est pris dans la même boîte
   - Si on prend un jeton n°2 à un tirage, on change de boîte au tirage suivant

   On note W_n l'événement le n-ième tirage est effectué dans la boîte N°1. Calculer $P(W_n)$.
   On note U_n l'événement, on a pris un jeton n°1 au n-ième tirage Calculer $P(U_n)$ en utilisant W_n.

Correction :

1. On utilise le système complet d'événements : $(U_{n-1}, \overline{U_{n-1}})$:

$$\begin{aligned} p(U_n) =& p(U_{n-1})p_{U_{n-1}}(U_{n-1}) + (1-p(U_{n-1}))\, p_{\overline{U_{n-1}}}(U_{n-1}) \\ =& \frac{1}{2}p(U_{n-1}) + (1-p(U_{n-1}))\,\frac{1}{4} \\ =& \frac{1}{4}p(U_{n-1}) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   on raconnaît une suite arithmético-géométrique.
   Avec $\frac{1}{3}$ solution de $\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
   Avec $p(U_1) = \frac{1}{2}$, donc on peut poser $p(U_0) = 1$. D'où :

$$p(U_n) = \frac{1}{4^n}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

2. On utilise le SCE $\left(W_{n-1}, \overline{W_{n-1}}\right)$.

$$\begin{aligned} p\left(W_n\right) = p\left(W_{n-1}\right) p_{W_{n-1}}(W_n) + \left(1-p\left(W_{n-1}\right)\right) p_{\overline{W_{n-1}}}(W_n) \\ =& \frac{1}{2}p\left(W_{n-1}\right) + \left(1-p\left(W_{n-1}\right)\right)\frac{3}{4} \\ =& -\frac{1}{4}p\left(W_{n-1}\right) + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

   On a encore une suite arithméticogéométrique. Avec : $\frac{3}{5} = -\frac{1}{4}\frac{3}{5} + \frac{3}{4}$ Et $p(W_1) = 1$ D'où :

$$p(W_n) = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{3}{5}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned} p(U_n) =& p(W_n \cap U_n) + p\left(\overline{W_n} \cap U_n\right) \\ =& p(W_n)p_{W_n}(U_n) + (1-p(W_n))\, p_{\overline{W_n}}(U_n) \\ =& p(W_n)\frac{1}{2} + (1-p(W_n))\,\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 13 On considère une pièce truquée, on note $p \in]0,1[$, la probabilité d'avoir Pile. On notera aussi $q = 1-p$.

1. Un joueur décide d'effectuer une partie de P/F avec les règles suivantes :
   - Il a gagné dès que Pile est sorti deux fois de plus que Face,
   - Il a perdu dès que Face est sorti deux fois de plus que Pile,
   - La partie ne s'arrête que lorsque l'une des deux éventualités précédentes est réalisée.

   NB : cela signifie que l'on gagne au tirage i si le nombre de piles à l'issue du tirage i est égal au nombre de face plus 2.

Exemple : Si on sort (P,F,F,P,P,P) on gagne au tirage 6.
On note U (respectivement V) l'événement »le joueur gagne (respectivement perde) la partie ». On note $u = p(U)$ et $v = p(V)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la probabilité que la partie contienne plus de $2n$ lancers de pièce est $(2pq)^n$.
(b) Calculer U et V.
(c) Montrer que la probabilité pour que la partie dure indéfiniment est nulle.

2. Le joueur décide maintenant d'effectuer une partie de P/F avec les règles suivantes :
   - Il a gagné dès que Pile est sorti deux fois de plus que Face,
   - Il a perdu dès que Face est sorti trois fois de plus que Pile,
   - La partie ne s'arrête que lorsque l'une des deux éventualités précédentes est réalisée.

   On note encore U (respectivement V) l'événement « le joueur gagne (respectivement perde) la partie » et toujours $u = p(U)$ et $v = p(V)$.
   Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note :
   - a_n la probabilité de A_n : « *la partie contient plus de n lancers, et à l'issue du n-ième lancer il est sorti une Pile de plus que de Face* »
   - b_n la probabilité de B_n :« *la partie contient plus de n lancers, et à l'issue du n-ième lancer il est sorti autant de Pile que de Face* »
   - c_n la probabilité de C_n :« *la partie contient plus de n lancers, et à l'issue du n-ième lancer il est sorti un Pile de moins que de Face* »
   - d_n la probabilité de D_n :« *la partie contient plus de n lancers, et à l'issue du n-ième lancer il est sorti deux Pile de moins que de Face* »

   (a) Pour tout entier naturel n, exprimer (a_n, b_n, c_n, d_n) en fonction de $(a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1})$
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $a_{2n} = 0$ et $c_{2n} = 0$ puis $b_{2n-1} = 0$ et $d_{2n-1} = 0$.
   (c) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer une matrice M telle que :
   $$\forall n \geqslant 2,\ X_n = MX_{n-1}.$$
   Montrer que la matrice M^2 est diagonalisable.
   (d) Montrer la convergence des séries de termes généraux a_n, b_n, c_n, d_n.
   On note a, b, c et d la valeur des sommes de ces séries.
   (e) Montrer que $u = pa$ et $v = qb$. En déduire U et V.
   (f) Montrer que la probabilité que la partie dure indéfiniment est nulle.
   (g) Montrer que la partie est équitable (ie $p(U) = p(V)$) si et seulement si $p^4 = (1-p)(1-2p)$.
   Montrer qu'une seule valeur de p convient.

Correction :

1. (a) On note T_n l'événement la partie contient plus de $2n$ lancers.
   On note A_i l'événement avoir PF ou FP au tirages $2i-1$, $2i$, on a alors : $p(A_i) = 2pq$ et
   $$T_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$
   d'où par indépendance des A_i (pas de tirage en commun), $p(T_n) = (2pq)^n$.
   (b) On ne peut gagner ou perdre qu'à un tirage pair. On note U_{2n} l'événement « gagner au tirage $2n$ ». On a :
   $$U_{2n} = T_{n-1} \cap P_{2n-1} \cap P_{2n}$$
   Comme T_{n-1} est fonction des tirages 1 à $2n-2$, on a indépendance mutuelle de : $(T_{n-1}, P_{2n-1}, P_{2n})$. D'où $p(U_{2n}) = (2pq)^{n-1}p^2$.
   De plus $U = \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_{2n}$ union disjointe. D'où :
   $$p(U) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2pq)^{n-1}p^2 = \frac{p^2}{1-2pq}$$

de même

$$p(V) = \frac{q^2}{1-2pq}$$

(il faut vérifier que $2pq < 1$).

(c) On peut vérifier que $p(U) + p(V) = 1$ car $p^2 + q^2 = 1 - 2pq$.

2. (a) On écrit :

$$A_n = (A_{n-1} \cap A_n) \cup (B_{n-1} \cap A_n) \cup (C_{n-1} \cap A_n) \cup (D_{n-1} \cap A_n)$$

On remarque alors que le nombre de pile (et de face) évolue nécessairement de 1 unité à chaque tirage :

$$(A_{n-1} \cap A_n) \qquad (C_{n-1} \cap A_n) \qquad (D_{n-1} \cap A_n) \text{ sont des événements impossibles}$$

Enfin : $(B_{n-1} \cap A_n) = (B_{n-1} \cap P_n)$.
Ce qui donne :

$$p(A_n) = p(B_{n-1} \cap P_n) = p(B_{n-1})p$$

en effet, B_{n-1} est fonction des tirages 1 à $n-1$ et donc indépendants de P_n. On a trouvé la relation :$a_n = b_{n-1}p$.
On trouve de même :

$$\begin{aligned} b_n &= qa_{n-1} + pc_{n-1} \\ c_n &= qb_{n-1} + pd_{n-1} \\ d_n &= qc_{n-1} \end{aligned}$$

(b) Si A_n a lieu, alors on a k piles, et $k+1$ faces, ainsi, le nombre de tirages est $n = 2k+1$ impair. On en déduit que A_n ne se réalise qu'à des tirages impairs. Ce qui sécrit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n} = 0$.
Si C_n a lieu, alors on a eu $k-1$ piles et k faces, ainsi, on a $n = 2k-1$ est impair. Si B_n a lieu, alors on a eu k piles et k faces, ainsi, on a $n = 2k$ est pair. Si D_n a lieu, alors on a eu $k-2$ piles et k faces, ainsi, on a $n = 2k-2$ est pair.
On en déduit les relations demandées.

(c) Avec les relations vues prédemment :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$M^2 = \begin{pmatrix} pq & 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 2pq & 0 & p^2 \\ q^2 & 0 & 2qp & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & qp \end{pmatrix}$$

Il faut calculer le polynôme caractéristique de cette matrice. Il semble difficile de trouver des valeurs propres évidentes, mais on voit une forme de symétrie :

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X-pq & 0 & -p^2 & 0 \\ 0 & X-2pq & 0 & -p^2 \\ -q^2 & 0 & X-2qp & 0 \\ 0 & -q^2 & 0 & X-qp \end{vmatrix}$$

On fait les opérations : $C_2 \leftrightarrow C_3$ puis $l_1 \leftrightarrow l_3$ (chacune de ces opérations multiplient le déterminant par -1).

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X-pq & -p^2 & 0 & 0 \\ -q^2 & X-2qp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2pq & -p^2 \\ 0 & 0 & -q^2 & X-qp \end{vmatrix}$$

On refait les opérations : $C_3 \leftrightarrow C_4$ puis $l_3 \leftrightarrow l_4$ (chacune de ces opérations multiplient le déterminant par -1) :

$$\begin{aligned}\chi_M(X) =& \begin{vmatrix} X-pq & -p^2 & 0 & 0 \\ -q^2 & X-2qp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-pq & -q^2 \\ 0 & 0 & -p^2 & X-2qp \end{vmatrix} \\ =& \chi_A(X)\chi_{A^T}(X) = (\chi_A(X))^2\end{aligned}$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} pq & p^2 \\ q^2 & 2pq \end{pmatrix}$$

On a alors facilement :

$$\chi_A(X) = X^2 - 3pq + p^2q^2$$

Les racines sont :

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}pq \qquad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}pq$$

On a donc :

$$Sp(M^2) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

La matrice A est donc diagonalisable. On note :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ un vecteur propre associé à } \lambda_1$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ un vecteur propre associé à } \lambda_2$$

On a en utilisant le fait que (x_1, y_1) est vecteur propre de A :

$$\begin{aligned} M^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} =& \begin{pmatrix} pq & 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 2pq & 0 & p^2 \\ q^2 & 0 & 2qp & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & qp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

De même :

$$M^2 \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$E_{\lambda_1}\left(M^2\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right)$$

et donc $dim\left(E_{\lambda_1}\left(M^2\right)\right) = 2$, de même, on constate que :

$$E_{\lambda_2}\left(M^2\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$

et donc que : $dim\left(E_{\lambda_2}\left(M^2\right)\right) = 2$.
On en déduit que la matrice M^2 est diagonalisable.

(d) On écrit donc :

$$M^2 = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & y_2 \\ y_1 & 0 & y_2 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

Si bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^{2n} = PD^nP^{-1}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \\ d_{2n} \end{pmatrix} = X_{2n} = M^{2n}X_0 = PD^nP^{-1}X_0$$

et donc le terme (b_{2n}) s'écrit sous la forme :

$$b_{2n} = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$

Comme $|\lambda_2| < \lambda_1 < 1$, cela donne :

$$b_{2n} \underset{n\infty}{\sim} \alpha\lambda_1^n \text{ si } \alpha \neq 0$$

et donc $\sum b_n$ converge. Si $\alpha = 0$, on a aussi : $b_{2n} \underset{n\infty}{\sim} \beta\lambda_2^n$ et donc convergence aussi.
On en déduit de même la convergence des séries $\sum a_n$, $\sum c_n$ et $\sum d_n$.
Autre méthode : vérifier que (b_{2n}) est récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{2n+4} = 3pqb_{2n+2} + p^2q^2b_{2n}$$

On conclue alors avec la même idée.

(e) Le joueur ne peut gagner qu'à un tirage de numéro pair la forme. On note U_{2n+2} l'événement : « le joueur gagne au tirage $2n+2$ ». Et on a :

$$U_{2n+2} = A_{2n+1} \cap P_{2n+2}$$

Ainsi : $p(U_{2n+2}) = pa_{2n+1}$. De plus :

$$U = \bigcup_{n=0}^{+\infty} U_{2n+2} \qquad \text{union disjointe}$$

et donc :

$$p(U) = \sum_{n=0}^{+\infty} pa_{2n+1} = pa.$$

et donc $u = pa$. De même en notant V_{2n+3} : « perdre au tirage $2n+3$ ». On a :

$$U_{2n+3} = D_{2n+2} \cap F_{2n+3}$$

et donc :

$$p(U_{2n+3}) = d_{2n+2}q$$

et toujours avec :

$$V = \bigcup_{n=0}^{+\infty} V_{2n+3} \qquad \text{union disjointe}$$

on a bien : $v = qd$

(f)

Exercice 14

PREMIÈRE PARTIE :

Dans une boite, on a mis une boule jaune, une boule grise et une boule verte, on prend indéfiniment successivement et avec remise des boules dans la boite.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les suites d'événements (A_n), (B_n) et (C_n) par :

- A_n : « on n'a pris aucune boule jaune au cours des n premiers tirages »
- B_n : « la 1ère boule jaune est prise au n-ième tirage »
- C_n : « on a pris au moins 3 boules jaunes au cours des n premiers tirages »

1. Dire si les suites (A_n), (B_n) et (C_n) sont croissantes décroissantes ou suite d'événements 2 à 2 incompatibles.
2. Calculer la probabilité de chacun de ces événements.
3. Définir les événements :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n,\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n,\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} C_n$$

4. Calculer leur probabilité.

DEUXIÈME PARTIE :

Dans une boite, on a mis une boule jaune, une boule grise et une boule verte, on prend indéfiniment successivement des boules. Si elle est jaune ou grise, on la remet, la verte n'est pas remise dans la boite.

On note V_k l'événement « la boule verte est prise au k-ième tirage ». On admet que la suite (V_k) définit un système complet d'événements.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les suites d'événements (A'_n), (B'_n) et (C'_n) :
A'_n : « on n'a pris aucune boule jaune au cours de n premiers tirages »
B'_n : « la 1ère boule jaune est prise au n-ième tirage »
C'_n : « on a pris au moins 3 boules jaunes au cours des n premiers tirages »

5. Calculer la probabilité de chacun de ces événements.

TROISIÈME PARTIE :

Dans une boite, on a mis une boule jaune, une boule grise et une boule verte, on prend indéfiniment successivement des boules. Si elle est jaune, on la remet, la verte et la grise ne sont pas remises.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les suites d'événements (U_n), (D_n) et (T_n) :
U_n : « au n-ième tirage, il y a une seule boule dans la boîte »
D_n : « au n-ième tirage, il y a 2 boules dans la boîte »
T_n : « au n-ième tirage, il y a 3 boules dans la boîte »

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} P(U_n) \\ P(D_n) \\ P(T_n) \end{pmatrix}$$

6. Déterminer une matrice A telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$$

7. À l'aide d'une diagonalisation calculer X_n en fonction de n.

---

correction :

1. $A_{n+1} \subset A_n$, donc (A_n) est décroissante.
   les (B_n) sont disjoints (à cause de « pour la première fois »).
   $C_n \subset C_{n+1}$ donc (C_n) est croissante.
2. On a :

$$p(A_n) = \frac{2^n}{3^n}$$
$$p(B_n) = \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\frac{1}{3} \qquad \text{loi géométrique}$$

Pour $p(C_n)$, on peut compter le nombre X de boules jaunes au cours des n premiers tirages (loi binomiale de paramètre

$\frac{1}{3}$)

$$\begin{aligned}p(C_n) =& 1 - p(X=0) - p(X=1) - p(X=2)\\ =& 1 - \frac{2^n}{3^n} - n\frac{2^{n-1}}{3^n} - \frac{n(n-1)}{2}\frac{2^{n-2}}{3^n}\end{aligned}$$

3. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ signifie que l'on ne prend jamais de boules jaunes. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$ signifie que l'on a au moins une boule jaune. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} C_n$ signifie que l'on prend plus de 3 boules blanches pour des tirages infinis.
4. Continuité décroissante :

$$p\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n\infty} p(A_n) = 0$$

Somme des probas (car union disjointe) :

$$\begin{aligned}p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right) =& \sum_{n=1}^{+\infty} p(B_n)\\ =& \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Continuité croissante :

$$p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} C_n\right) = \lim_{n\infty} p(C_n) = 1$$

5.

$$p(A'_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(A'_n \cap V_k)$$

On considère $k \leqslant n$, on a alors :

$$(A'_n \cap V_k) = J_1 \cap \cdots \cap J_{k-1} \cap V_k \cap J_{k+1} \cap \cdots \cap J_n$$

Cela donne par les proba composées :

$$\begin{aligned}p(A'_n \cap V_k) =& \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}\frac{1}{2}^{n-k} = \frac{1}{3^k}\frac{1}{2^{n-k}}\\ =& \left(\frac{2}{3}\right)^k 2^{-n}\end{aligned}$$

Pour $k > n$, on a :

$$(A'_n \cap V_k) = J_1 \cap \cdots \cap J_n \cap \overline{V_{n+1}} \cap \cdots \cap \overline{V_{k-1}} \cap V_k$$

et :

$$\begin{aligned}p(A'_n \cap V_k) =& \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{2}{3}^{k-n-1}\frac{1}{3}\\ =& \frac{1}{3^k}2^{k-n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^k 2^{-n-1}\end{aligned}$$

Il reste à faire la somme :

$$\begin{aligned}p(A'_n) =& \sum_{k=1}^{+\infty} p(A'_n \cap V_k)\\ =& \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k 2^{-n} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k 2^{-n-1}\\ =& 2^{-n}\frac{2}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} + 2^{-n-1}\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\\ =& 2^{-n+1}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + 2^{-n}\end{aligned}$$

Exercice 15 On lance un pièce équilibrée jusqu'à ce que l'une des combinaisons « PPF » ou « FPP » apparaît. Paola et François s'affrontent. Si PPF apparaît sans que FPP ne soit apparu Paola gagne. Si FPP apparaît sans que PPF ne soit apparu François gagne.

Calculer la probabilité que Paola gagne, que François gagne.

Correction :

Les séries numériques à connaître pour le calcul des probabilités

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Le but de cette fiche est de donner les valeurs des séries entières, que l'on verra plus tard dans le cours. L'avantage est de pouvoir les utiliser pour le calcul des probabilités.

Les plus utiles sont les séries géométrique, logarithme et exponentielle.

✯ Série géométrique

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

On peut dériver cette relation pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\
\frac{2}{(1-x)^3} &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} \\
\frac{6}{(1-x)^4} &= \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) x^{n-3}
\end{aligned}$$

✯ Logarithme

En intégrant la relation précédente (on verra que cela a bien un sens), on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

On peut éventuellement remplacer x par $-x$ pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

✯ Arctangente

En repartant de la série géométrique, en remplaçant x par x^2 puis en intégrant :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

✯ Exponentielle, cosinus et sinus hyperbolique

On a les relations (obtenues par la formule de Taylor) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En prenant les parties paires et impaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\mathrm{sh}\,(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

✯ **Cosinus et sinus**

Toujours avec la formule de Taylor, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

✯ **Fonction puissance**

Moins utilisé dans le cadre du calcul des probabilités on a : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha =& 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 \\ &+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \\ =& 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\end{aligned}$$

Étude de la série harmonique

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Définition III.5 On appelle série harmonique la série $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$.

Comme on le sait cette série diverge. Elle sert de repère pour le critère de Riemann : si $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge, tandis que si $\alpha \leqslant 1$, la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ diverge.

On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

✯ **Équivalent de H_n**

On veut montrer que $H_n \underset{n\infty}{\sim} \ln n$.

En effet, on a :

$$\forall k \geqslant 1,\ \forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

ce qui donne par comparaison à une intégrale :

$$\forall k \geqslant 1,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

Si on somme pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ H_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$$

On a donc : $H_n \underset{n\infty}{\sim} \ln(n+1)$ et au final : $H_n \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$.

✯ **Constante d'Euler**

On étudie alors la suite (u_n) définie par $\forall n \geqslant 1,\ u_n = H_n - \ln(n)$, pour avoir un ordre supplémentaire.

On a déjà vu $H_n \geqslant \ln(n+1) \geqslant \ln(n)$, ainsi $u_n \geqslant 0$. On a aussi :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Or on sait : $\forall x > -1, \ln(1+x) < x$, ainsi :

$$u_{n+1} - u_n < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} < 0$$

La suite (u_n) est ainsi décroissante.

Comme la suite est décroissante et minorée elle converge, vers une constante notée γ est appelée **constante d'Euler.** On a donc :

$$H_n \underset{n\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

✯ Deux résultats intermédiaires

Ces deux résultats (dits de sommation des relations de comparaison) ne sont pas au programme de PSI, mais sont au programme de MP.

Proposition III.7 Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs telles que $\sum v_n$ converge.

Si $u_n \underset{n\infty}{=} o\ (v_n)$ alors on sait que $\sum u_n$ converge. On a plus l'estimation sur les restes :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$$

Si $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$ alors on sait que $\sum u_n$ converge. On a plus l'estimation sur les restes :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe un rang N tel que $\forall k \geqslant N, u_k \leqslant \varepsilon v_k$, Considérons $n \geqslant N$, on peut donc sommer les inégalités précédentes pour $k \geqslant n$, ce qui donne :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon v_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

On a bien :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.

Pour le deuxième, on procède de même : soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe un rang N, tel que :

$$\forall k \geqslant N, (1-\varepsilon)v_k \leqslant u_k \leqslant (1+\varepsilon)v_k$$

On considère donc $n \geqslant N$, et on somme les inégalités pour $k \geqslant n$, cela donne

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

On a bien :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \left|\frac{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} v_k} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$. ■

Exercice 1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs telles que $\sum v_n$ diverge.

Si $u_n \underset{n\infty}{=} o\ (v_n)$ montrer qu'on a l'estimation sur les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

Si $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$ alors on sait que $\sum u_n$ diverge. Montrer que l'on a de plus l'estimation sur les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Correction : On suppose donc $u_n = \underset{n\infty}{o}(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \varepsilon v_n$$

donc en sommant les inégalités :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n} v_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Il reste donc à majorer les premiers termes. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_n = +\infty$ et que n_0 est fixé, on a :

$$\exists N \geqslant n_0,\ \forall n \geqslant N,\ \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Ainsi, pour $n \geqslant N$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant (2\varepsilon) \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Ainsi, comme ε est quelconque :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{+n} v_k\right)$$

On suppose maintenant que $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n$. On a alors :

$$u_n - v_n = \underset{n\infty}{o}(v_n)$$

et donc avec le résultat précédent :

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k - v_k) = \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \underset{n\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

Ce qui signifie : $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On retiendra que :
- dans le cas d'une série divergente, on conserve les relations de comparaison sur les sommes partielles,
- dans le cas d'une série convergente, on conserve les relations de comparaison sur les restes.

Ces résultats sont hors programme, il faut donc les redémontrer.

Proposition III.8 Soit $\alpha > 1$, alors on a l'estimation du reste de la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{k^\alpha}$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Démonstration. C'est de nouveau une comparaison à une intégrale. On part d'une comparaison sur l'intervalle $[k,k+1]$:

$$\forall k \geqslant 1,\ \forall t \in [k,k+1],\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

On intègre :

$$\forall k \geqslant 1,\ \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \qquad (E)$$

En sommant de n à N, on obtient pour la minoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall N \geqslant n,\ \int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \qquad (1)$$

On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} &= \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_n^{N+1} \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

En passant à la limite lorsque N tends vers $+\infty$, dans l'encadrement (1), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

On revient à (E) et cette fois on somme pour $k \in [\![n-1, N-1]\!]$, cela donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall N \geqslant n,\ \sum_{k=n-1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{dt}{t^\alpha}$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall N \geqslant n,\ \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\right)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n-1^{\alpha-1}}$$

On a ainsi démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n-1^{\alpha-1}}$$

Ce qui montre bien que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

■

✯ **Développement asymptotique**

On procède de même pour avoir un ordre supplémentaire : on considère maintenant la suite (t_n) définie par

$$\forall n \geqslant 1,\ t_n = H_n - \ln(n) - \gamma$$

On sait que $\lim\limits_{n\infty} t_n = 0$ puisque $H_n \underset{n\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.
Pour avoir un équivalent de t_n, on cherche un équivalent de $t_{n+1} - t_n$:

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n =& H_{n+1} - H_n + \ln(n) - \ln(n+1) \\ =& \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

On utilise alors le DL de $\ln(1+u)$:

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$$

donc :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{=} -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ce qui donne donc :

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n =& -\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \underset{n\infty}{\sim}& -\frac{1}{2n^2} \text{ terme général d'une série convergente} \end{aligned}$$

On en déduit que la série $\left(\sum\limits_{n\geqslant 1}(t_{n+1} - t_n)\right)$ converge (ce que l'on savait déjà puisque (t_n) converge), mais on a surtout une estimation du reste :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(t_{k+1} - t_k) \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2n} \qquad \text{en utilisant le résultat précédent}$$

Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall N \geqslant n,\ \sum_{k=n}^{N}(t_{k+1} - t_k) = t_{N+1} - t_n$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{N\infty}\sum_{k=n}^{N}(t_{k+1} - t_k) = -t_n$$

ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=n}^{+\infty}(t_{k+1} - t_k) = -t_n$$

On a donc une valeur du reste. Ainsi :

$$t_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

et donc un terme supplémentaire dans le développement asymptotique :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Fiche trigonométrie

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Dans cette fiche, on revoit ce qu'il faut savoir sur les fonctions trigonométriques.

✯ Le cercle trigonométrique

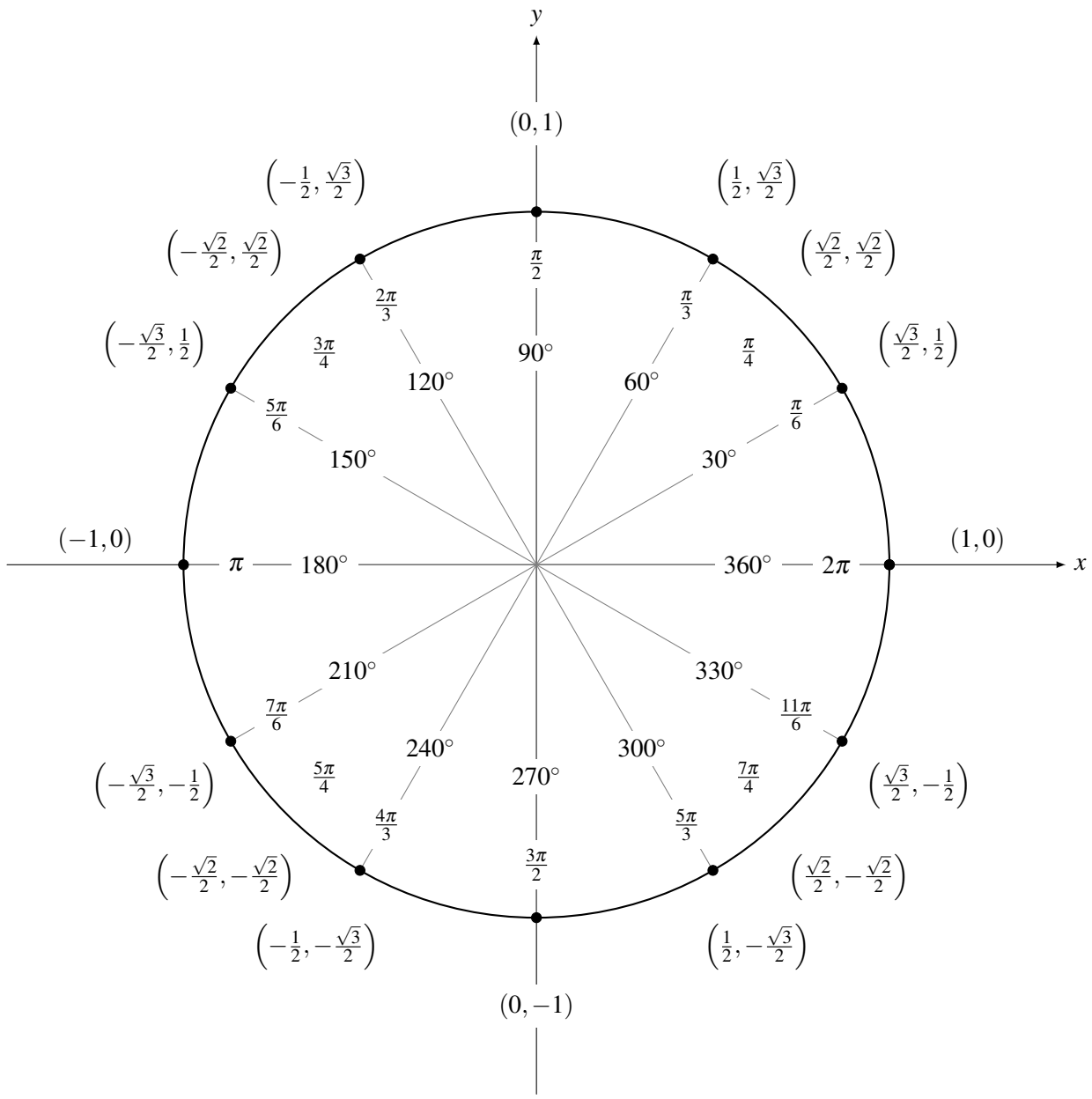


FIGURE 1.1 – Cercle trigonométrique

✯ Fonction sinus

La fonction sinus est

- définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1,1]$, 2π périodique et impaire,
- sa dérivée $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$.
- La tangente en 0 a pour coefficient directeur 1.
  On en déduit la limite usuelle :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

- Position par rapport à la tangente en l'origine : la fonction est en-dessous de sa tangente en 0 pour $x > 0$ donc $\forall x > 0, \sin(x) < x$.
- Tangente horizontale aux points tels que $\frac{\pi}{2}[\pi]$.

✯ Fonction cosinus

La fonction cosinus est
- définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1,1]$, 2π périodique et paire,
- sa dérivée vaut : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)$.
- La tangente en 0 : est horizontale.
- On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Représentation graphique

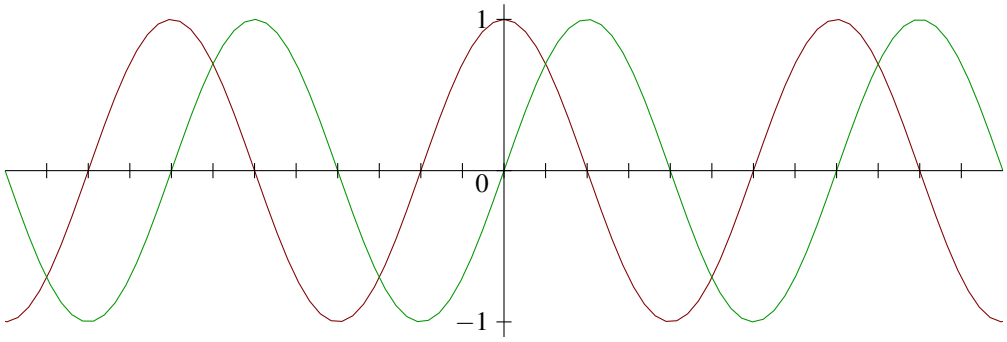


FIGURE 1.2 – Fonctions cosinus et sinus

✯ Fonction tangente

La fonction tangente est égale à $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Elle est définie sur l'ensemble des x tel que $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. L'ensemble de définition est donc : $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

- La fonction tangente est π périodique impaire,
- la tangente en 0 est $\Delta : y = x$,
  on en déduit la limite usuelle :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

- les limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
- La dérivée : $\forall x \in \mathscr{D},\ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Représentation graphique

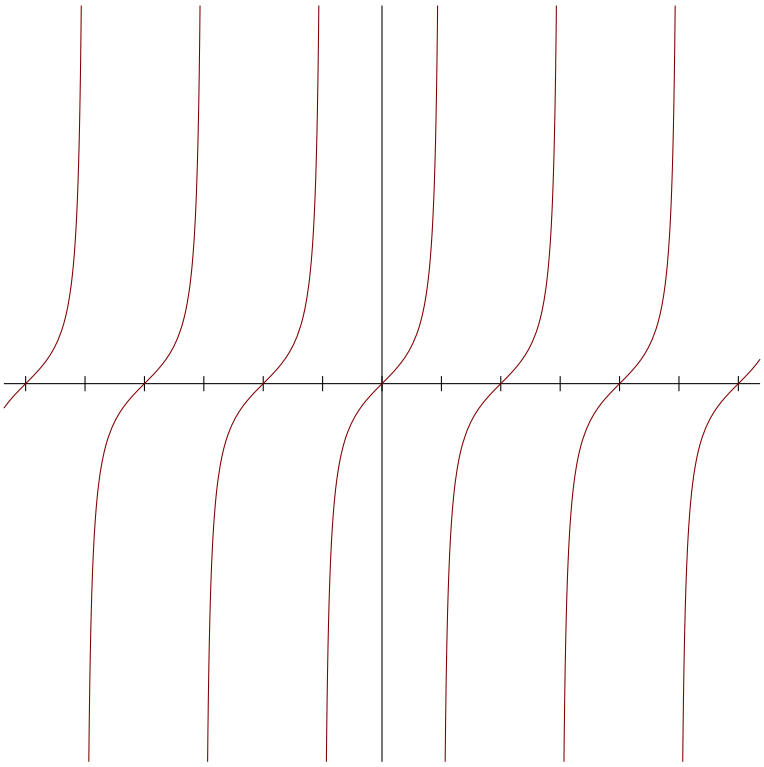


FIGURE 1.3 – Fonction tangente

Valeurs usuelles

Le tableau 1.1 résume les valeurs à savoir. Il est aussi important de savoir retrouver ces valeurs sur le cercle trigonométrique.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

TABLE 1.1 – Valeurs trigonométriques à savoir

Faire le dessin du quart de cercle.

Notation III.2. *Pour les fonctions trigonométriques, si il n'y a pas d'ambiguïté, on utilise* $\sin\theta$ *à la place de* $\sin(\theta)$. *De même, la notation* $\sin^2(x)$ *désigne* $\sin(x)\times\sin(x)$.

✯ Angles opposés, complémentaires, supplémentaires

On a :

$$\begin{cases}\sin(-x) = -\sin(x)\\ \cos(-x) = \cos(x)\\ \tan(-x) = -\tan(x)\end{cases} \qquad \begin{cases}\sin(\pi - x) = \sin(x)\\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)\\ \tan(\pi - x) = -\tan(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi+x) = -\sin(x) \\ \cos(\pi+x) = -\cos(x) \\ \tan(\pi+x) = \tan(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan(x)} \end{cases}$$

Formule à retrouver rapidement sur un cercle, plutôt qu'à apprendre par cœur

✯ Sinus, cosinus et tangente d'une somme et d'une différence, angle double

$$\begin{cases} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \tan(a+b) &= \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{cases}$$

Formule que l'on peut retrouver par Moivre :

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= \cos(a+b) + i\sin(a+b) \\ &= e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b). \end{aligned}$$

Pour la tangente, il faut penser à diviser par le terme « en bas à gauche » (*i.e.* $\cos a \cos b$) pour obtenir 1 :

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\sin a + b}{\cos a + b} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}\frac{\sin b}{\cos b}} \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{aligned}$$

En appliquant à la différence :

$$\begin{cases} \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ \tan(a-b) &= \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{cases}$$

En appliquant à l'angle double :

$$\begin{cases} \cos(2x) = & \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \\ \sin(2x) = & 2\sin(x)\cos(x) \\ \tan(2x) = & \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{cases}$$

que l'on peut retrouver directement par $e^{2ix} = (e^{ix})^2$ et en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$:

$$\begin{aligned} e^{2ix} &= \cos(2x) + i\sin(2x) \\ &= (\cos(x) + i\sin(x))^2 \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x). \end{aligned}$$

On a aussi les formules qui relient l'angle de moitié au carré :

$$\begin{cases} \cos^2(a) &= \frac{1+\cos(2a)}{2} \\ \sin^2(a) &= \frac{1-\cos(2a)}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-\cos(x) &= 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ 1+\cos(x) &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

On peut retrouver ces formules en utilisant Euler :

$$\begin{aligned} \cos^2(a) &= \frac{1}{4}(e^{ia}+e^{-ia})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2ia}+2+e^{-2ia}) \\ &= \frac{1}{2}(1+\cos(2a)). \end{aligned}$$

On peut retrouver les deuxièmes en utilisant deux factorisations par l'angle de moitié :

$$\begin{aligned} 1+\cos(x) =& 1+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ =& \frac{1}{2}(1+e^{ix}+1+e^{-ix}) \\ =& \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{x}{2}}2\cos(\frac{x}{2})+e^{-i\frac{x}{2}}2\cos(-\frac{x}{2})\right) \\ =& \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}\right) \\ =& 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

✯ Transformation de produit en somme

$$\begin{aligned} \sin a\cos b =& \frac{1}{2}\Big[\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big] \\ \cos a\cos b =& \frac{1}{2}\Big[\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big] \\ \sin a\sin b =& \frac{1}{2}\Big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big] \end{aligned}$$

On peut retrouver ces formules avec Euler :

$$\begin{aligned} \sin a\cos b =& \frac{1}{4i}\Big[(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})\Big] \\ =& \frac{1}{4i}\Big[e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}+e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}\Big] \\ =& \frac{1}{2}\Big[\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big]. \end{aligned}$$

✯ Transformation de somme en produit

Ces formules ne sont pas à savoir par cœur.

$$\begin{cases} \sin(p)+\sin(q) = & 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p)+\cos(q) = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p)-\sin(q) = & 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \\ \cos(p)-\cos(q) = & -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right). \end{cases}$$

Ces formules proviennent de la factorisation par l'angle de moitié :

$$\begin{aligned}
\sin(p)+\sin(q) =& \frac{1}{2i}\left[e^{ip}-e^{-ip}+e^{iq}-e^{-iq}\right]\\
=& \frac{1}{2i}\left[e^{ip}+e^{iq}-(e^{-iq}+e^{-ip})\right]\\
=& \frac{1}{2i}\left[e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}})-e^{-i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}})\right]\\
=& \frac{1}{2i}\left[e^{i\frac{p+q}{2}}2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)-e^{-i\frac{p+q}{2}}2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right]\\
=& \frac{\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}{i}\left[e^{i\frac{p+q}{2}}-e^{-i\frac{p+q}{2}}\right]\\
=& 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)
\end{aligned}$$

⋆ Équation trigonométrique

Il faut dessiner systématiquement le cercle trigonométrique, de manière à éviter toute erreur

Cosinus égaux

$$\begin{aligned}
\cos x=\cos\alpha \iff& \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\alpha+2k\pi \text{ ou } x=-\alpha+2k\pi\\
\iff& x\equiv\alpha\,[2\pi] \text{ ou } x\equiv-\alpha\,[2\pi]
\end{aligned}$$

Sinus égaux

$$\begin{aligned}
\sin x=\sin\alpha \iff& \exists k\in\mathbb{Z}, x=\alpha+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\alpha+2k\pi\\
\iff& x\equiv\alpha\,[2\pi] \text{ ou } x\equiv\pi-\alpha\,[2\pi]
\end{aligned}$$

Tangentes égales

$$\begin{aligned}
\tan x=\tan\alpha \iff& \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\alpha+k\pi\\
\iff& x\equiv\alpha[\pi]
\end{aligned}$$

⋆ Propriété fondamentale

Enfin, il ne faut pas oublier la relation

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

C'est la seule relation à « angle constant » entre les fonctions cos et sin.
Elle relie les carrées, on en déduit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |\cos(x)|=\sqrt{1-\sin^2 x}$$

Ainsi si on connaît le sinus, alors on connaît le cosinus *au signe près*.

En divisant par $\cos^2 x$ (respectivement par $\sin^2 x$), on en déduit les relations entre la fonction tangente et cosinus (respectivement sinus) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 x} &= 1+\tan^2 x && \text{et} && \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\tan^2 x}+1\\
\cos^2 x &= \frac{1}{1+\tan^2 x} && \text{et} && \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x+1}\\
|\cos x| &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} && \text{et} && |\sin x| = \frac{|\tan x|}{\sqrt{\tan^2+1}}
\end{aligned}$$

Là encore, il faut un argument de signe pour enlever la valeur absolue.

✯ **Résolution de** $a\cos x + b\sin x = c$

On s'intéresse à la résolution de l'équation (E) d'inconnue x :

$$(E): \qquad a\cos x + b\sin x = c, \qquad \text{avec } (a,b) \neq (0,0)$$

La première étape consiste à poser $z = a + ib$. On a $z \neq 0$ (si a et b sont nuls, et le problème a peu d'intérêt). On peut donc écrire ce nombre complexe sous forme trigonométrique : $z = \rho e^{i\alpha}$.

On divise alors par ρ pour avoir :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin y &= \frac{c}{\rho} \\ \cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin y &= \frac{c}{\rho} \\ \cos(x-\alpha) &= \frac{c}{\rho}. \end{aligned}$$

Deux cas sont alors possibles :

- si $\left|\frac{c}{\rho}\right| > 1$, l'équation (E) n'a pas de solution dans ce cas.
- sinon, il existe un angle θ tel que $\cos(\theta) = \frac{c}{\rho}$. Dans ce cas l'équation (E) est équivalente avec ces nouvelles notations à

$$(E'): \qquad \cos(x-\alpha) = \cos(\theta).$$

Cette dernière équation se résout de manière classique.

Comme souvent : apprenez la technique et non les formules.

■ **Exemple III.3** On veut résoudre :

$$(E): \qquad \sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{3}.$$

On considère donc le nombre complexe :

$$z = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} (E) &\Longleftrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos x - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (E) &\Longleftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

On résout alors classiquement :

$$\begin{aligned} (E) &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ ou} \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \\ (E) &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = 2k\pi, \text{ ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Interprétation géométrique : si on considère le nombre complexe $z = a + ib$ et le nombre complexe $X = \cos x + i\sin x$ (qui est sur le cercle unité). On identifie ces nombres complexes à des vecteurs du plan.

L'équation peut alors s'écrire : $z \cdot X = c$. En effet, $a\cos x + b\sin x$ est le produit scalaire du vecteur z et X.

En géométrie, on sait que le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit des normes par le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs. Appliqué ici, cela donne : $z \cdot X = |z|\cos(x-\alpha)$. En effet, $|X| = 1$ et l'angle formé par les deux vecteurs est $x - \alpha$. On obtient donc bien l'équation : $|z|\cos(x-\alpha) = c$.

✯ Transformation de $a\cos x + b\sin x$ en $A\cos(x-\varphi)$

En mathématiques, on utilise souvent l'expression : $a\cos x + b\sin x$ (somme de deux fonctions trigonométriques de même pulsation) à la place de l'expression physique : $A\cos(x-\varphi)$, qui met en avant **l'amplitude** A et la **phase** φ.

En fait ces deux expressions sont équivalentes dans le sens où si $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ a\cos x + b\sin x \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ A\cos(x-\varphi) \,\middle|\, A \in \mathbb{R}^+,\ \varphi \in [0, 2\pi[\right\}$$

Dans cette partie, on voit comment on peut passer de l'une à l'autre. Il est inutile d'apprendre par cœur les relations, mais il faut savoir les retrouver rapidement.

$\boxed{\supset}$ Soit $A \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} A\cos(x-\varphi) &= A\cos(\varphi)\cos(x) + A\sin(\varphi)\sin(x) \\ &= a\cos(x) + b\sin(x) \qquad \text{en posant } a = A\cos(\varphi) \text{ et } b = A\sin(\varphi) \end{aligned}$$

$\boxed{\subset}$ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: On pose $A = \sqrt{a^2+b^2}$, et $\varphi \in [0, 2\pi[$ l'argument principal de $a+ib$.
On a alors :

$$a + ib = A\cos(\varphi) + iA\sin(\varphi).$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} a\cos(x) + b\sin(x) &= A\cos(\varphi)\cos(x) + A\sin(\varphi)\sin(x) \\ &= A\cos(x-\varphi) \end{aligned}$$

✯ Autres équations trigonométriques

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
2. $\sin^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$
3. $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
4. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0.$

Correction :

1. on se ramène à $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et donc à une égalité de cosinus.
2. En utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$, cela devient : $-\cos^2(x) + 3\cos(x) = 0$.
3. C'est équivalent à : $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ou $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
   On utilise alors les relations entre $\cos(\alpha)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ pour se ramener à une égalité de cosinus.
4. Très classique, on calcule :

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + i\left(\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)\right) = e^{ix} + e^{2ix} + e^{i3x}.$$

   On utilise alors la somme des termes d'une suite géométrique et la factorisation par l'angle de moitié.

Fonctions usuelles

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Notation x^a

La notation x^a désigne plusieurs objets selon le contexte. Il est très important de comprendre la différence entre ces différentes définitions.

- x^a pour $a \in \mathbb{N}$, qui désigne $x \times x \times \cdots \times x$ (a fois), *i.e.* $\prod_{k=1}^{a} x$.
  Cette quantité existe dès que l'on peut faire le produit (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$, x matrice carrée).
- x^a pour $a \in \mathbb{Z}$, qui étends la définition précédente au cas où $\frac{1}{x}$ existe par la formule : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$
  Cette quantité existe dès que x est inversible (si $x \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{C}^*$, x matrice inversible).
- x^a pour $a \in \mathbb{R}$, qui désigne alors $e^{a\ln(x)}$ qui est bien défini si $x > 0$, et seulement dans ce cas.

Remarque : On peut distinguer un dernier cas : x^a avec a qui s'écrit sous la forme $a = \frac{1}{n}$, que l'on note plutôt $\sqrt[n]{x}$ la solution de $y^n = x$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$

Cette quantité bien définie si cette équation admets une unique solution, elle n'a pas de sens si $x \in \mathbb{C}$. On peut noter $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ que dans le cas où $x \geqslant 0$.

Conséquence :

- Lorsque l'on écrit x^a avec $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on vérifie que $x > 0$. Dans ce cas la notation x^a désigne $e^{a\ln(x)}$.
- lorsque l'on étudie une fonction du type $f(x) = u(x)^{v(x)}$, *i.e.* la puissance varie en fonction de x, on commence par écrire : $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$. Tout autre méthode de calcul (limite, dérivée, etc.) aboutira à une erreur. Idem pour une suite du type $u_n = v_n^{w_n}$.
- Dans tous les cas, on a les formules :

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad x^{n+m} = x^n x^m \qquad (x^n)^m = x^{nm}$$

✯ Fonctions puissance d'exposant entier naturel

Les fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- réalisent une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ si n pair,
- réalisent une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si n impair,
- En $+\infty$: divergent vers $+\infty$ d'autant plus vite que n est grand, ce qui signifie que si $n \geqslant m$ et x est grand, x^n est très grand devant x^m (on note en physique : $x^n \gg x^m$). On a donc :

$$\text{lorsque } x \to +\infty \qquad 1 \ll x \ll x^2 \ll x^3$$

- En 0 :
  - « *s'écrasent* » sur l'axe horizontal d'autant plus que n est grand, ce qui signifie que si $n \geqslant m$ et $x \approx 0$, x^n est négligeable devant x^m (on note en physique : $x^n \ll x^m$). On a donc :

$$\text{lorsque } x \to 0^+ \qquad x^3 \ll x^2 \ll x \ll 1.$$

  - la dérivée en 0 est nulle (tangente horizontale),
  - un point d'inflexion en 0, si n est impair.

R La notation $x^2 \ll x$ ne doit pas être utilisée en mathématiques. On doit utiliser la notation $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$.

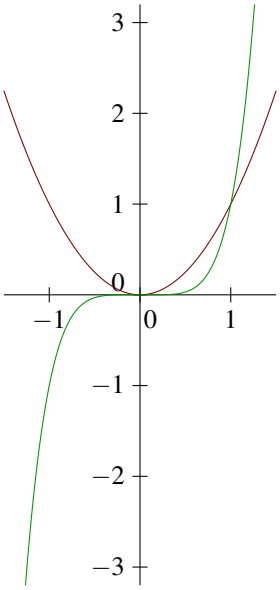


FIGURE 1.4 – Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^5$

✯ Fonction puissance d'exposant entier relatif

Les fonctions $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{-n} \end{array} \right.$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- sont strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
- En $+\infty$: on a $\lim\limits_{+\infty} x^{-n} = 0$, tendent vers 0 d'autant plus vite que n est grand, ce qui signifie que si $n \geqslant m$ et x grand, x^{-n} est négligeable devant x^{-m} (on note : $\frac{1}{x^n} \ll \frac{1}{x^m}$).
  On a donc :

$$\text{lorsque } x \to +\infty \qquad 0 < \frac{1}{x^3} \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x}$$

- En 0^+ : on a $\lim\limits_{0^+} x^{-n} = +\infty$ d'autant plus vite que n est grand, ce qui signifie que si $n \geqslant m$ et $x \approx 0$, x^{-m} est négligeable devant x^{-n} (on note : $\frac{1}{x^m} \ll \frac{1}{x^n}$).
  On a donc :

$$\text{lorsque } x \to 0^+ \qquad 1 \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x^3}$$

  (en 0^- le signe dépend de la parité de n),

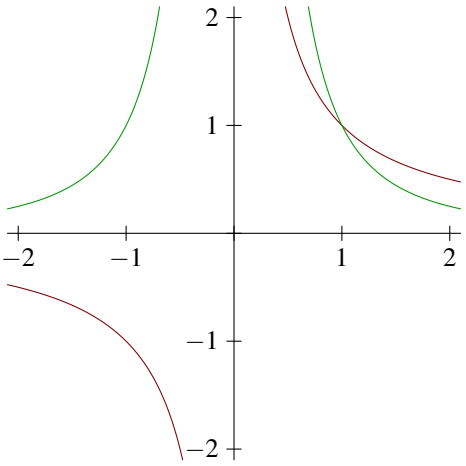


FIGURE 1.5 – Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

✯ Fonction racine carrée

L'équation $(E) : x^2 = y$ admets une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ pour tout $y \geqslant 0$. Cette solution est notée $\sqrt{y}$. On dispose donc de l'application :

$$\sqrt{\cdot} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{y} : \text{ la solution de l'équation } x^2 = y \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

On a les formules :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}.$$

✯ Fonction racine n-ième

cas pair Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, elle est donc bijective. On peut donc définir une fonction réciproque :

$$\sqrt[n]{\cdot} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto & \sqrt[n]{y} : \text{ la solution de l'équation } x^n = y \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

Cette fonction est croissante et continue. Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}.$$

cas impair Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc bijective . On peut donc définir une fonction réciproque, cette fois-ci définie sur $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[n]{\cdot} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \sqrt[n]{y} : \text{ la solution de l'équation } x^n = y \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Cette fonction est croissante et continue. Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}.$$

Les propriétés de ces fonctions sont :

- en 0 : elles vérifient $\sqrt[n]{0} = 0$, avec de plus tangente verticale en 0, plus n est grand, plus les fonctions sont verticales,
- en $+\infty$: elles vérifient $\lim_{+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$, d'autant plus vite que n est petit. Ce qui signifie que si $n \geqslant m$, $\sqrt[n]{x}$ est négligeable devant $\sqrt[m]{x}$ (on note : $\sqrt[n]{x} \ll \sqrt[m]{x}$).
- en 1, on a $\sqrt[n]{1} = 1$ et elles sont d'autant plus plates que n est grand.

! La notation x^a est réservée au cas où $x > 0$ et désigne dans ce cas $\exp(a \ln(x))$. Car on ne peut pas définir : $(-1)^{\frac{2}{2}}$. En

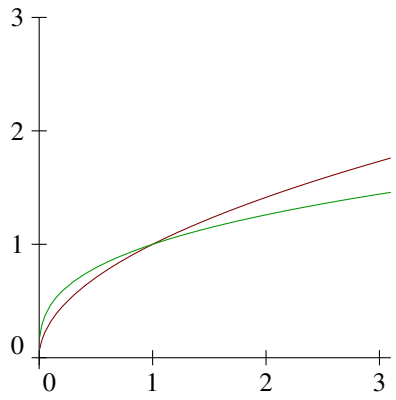


FIGURE 1.6 – Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

effet, on a

$$\text{d'un côté } \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = 1$$
$$\text{de l'autre côté } (-1)^{\frac{2}{2}} = (-1)^1 = -1$$

✯ Logarithme et exponentiel

Définition III.6 Le LOGARITHME NÉPÉRIEN est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, qui s'annule en 1. C'est donc l'application $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 0, \qquad \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Le logarithme népérien est donc une application continue, strictement croissante et indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

En particulier, on a

$$\forall x > 0, \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Théorème III.9 — propriété fondamentale du logarithme. Le logarithme d'un produit est la somme des logarithme.

$$\forall x > 0, \qquad \forall y > 0, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y). \tag{1.1}$$

Démonstration. Soit $x > 0$, la fonction $y > 0 \mapsto \ln(xy) - \ln(y)$ admet pour dérivée $\frac{x}{xy} - \frac{1}{y} = 0$. Donc cette fonction est constante et égale à $f(1) = \ln(x)$. ■

Dans une expression avec un ln, il faut toujours se demander si on peut utiliser la propriété fondamentale.

Attention : à bien vérifier que x et y sont strictement positifs.

Proposition III.10 Comme $\ln(1) = 0$, le logarithme de l'inverse est l'opposé du logarithme.

$$\forall x > 0, \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

Plus généralement, le logarithme d'un quotient est la différence des logarithmes.

$$\forall x > 0, \qquad \forall y > 0, \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

et la logarithme d'une puissance est

$$\forall x > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \ln(x^n) = n\ln(x).$$

- On dispose aussi du logarithme en base 10 :

$$\forall x > 0, \qquad \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)},$$

  le logarithme en base 10 est utilisé en physique.
- En informatique, le logarithme népérien est la fonction `log` du module `math`

Proposition III.11 On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$. La fonction ln est strictement croissante et continue. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.

On a le tableau de variation

x	0	1	e	$+\infty$
variation de $\ln(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

La fonction ln est en-dessous de sa tangente en 1 :

Proposition III.12 On a : $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

R C'est une conséquence de la concavité de la fonction logarithme

Démonstration. En effet les fonctions

$$\phi : x \mapsto \ln(1+x) - x, \text{ et } \psi(x) : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

sont dérivables, avec

$$\phi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0, \text{ et } \psi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0.$$

On a donc ϕ strictement décroissante $\phi(0) = 0$, tandis que ψ est strictement croissante avec $\psi(0) = 0$, donc $\forall x > 0, \phi(x) > 0$, et $\psi(x) < 0$. ■

R On verra une autre démonstration par le théorème des accroissements finis.

Représentation graphique

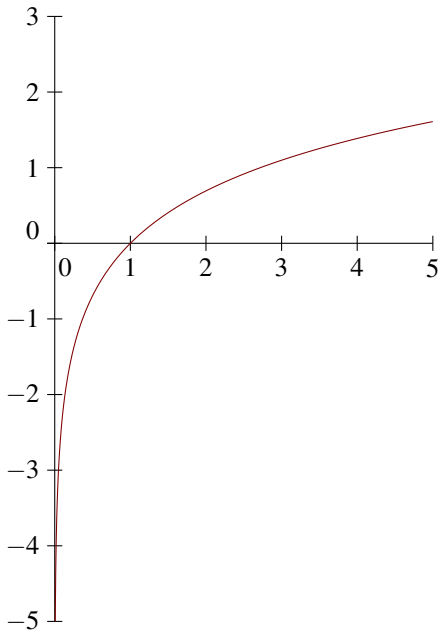


FIGURE 1.7 – Fonction $x \mapsto \ln(x)$

Définition III.7 L'exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est la bijection réciproque du logarithme népérien $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Notation III.3. *Pour simplifier, on introduit le nombre e défini par* $e = \exp(1)$*, e est donc l'unique solution de* $\ln(x) = 1$*. On a la valeur numérique* $e = 2.718281828$*, puis on introduit la notation :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \exp(x).$$

Cette notation est justifié car on a $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \ln(e^x) = x.$

Théorème III.13 L'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{x+y} = e^x \times e^y. \tag{1.2}$$

Démonstration. e^{x+y} est l'unique solution de $\ln(e^{x+y}) = x+y$, or on voit que $e^x e^y$ est une solution de cette équation. ■

Proposition III.14 En, conséquence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

Et plus généralement, l'exponentielle d'une différence est le quotient des exponentielles.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

Proposition III.15 L'exponentielle réelle est une application continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp'(x) = \exp(x).$$

En conséquence, l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

On a le tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variation de $exp(x)$	0^+ ↗	1 ↗	$+\infty$

Proposition III.16 Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors la fonction $g : x \mapsto e^{f(x)}$ est dérivable en a et on a

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)})(a) = g'(a) = f'(a)e^{f(a)}.$$

Cette formule est souvent apprise sous la forme $(e^u)' = u'e^u$.

La fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente :

Proposition III.17 On a : $\forall x \neq 0,\ 1 + x < e^x$.

Démonstration. On pose $\phi(x) = e^x - 1 - x$, alors $\phi'(x) = e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$ et $\phi'(x) < 0$ pour $x < 0$, donc $\forall x \neq 0 \phi(x) > \phi(0) = 0$. ■

Proposition III.18 **Croissance comparée logarithme/exponentielle/puissances**

Pour $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0.$$

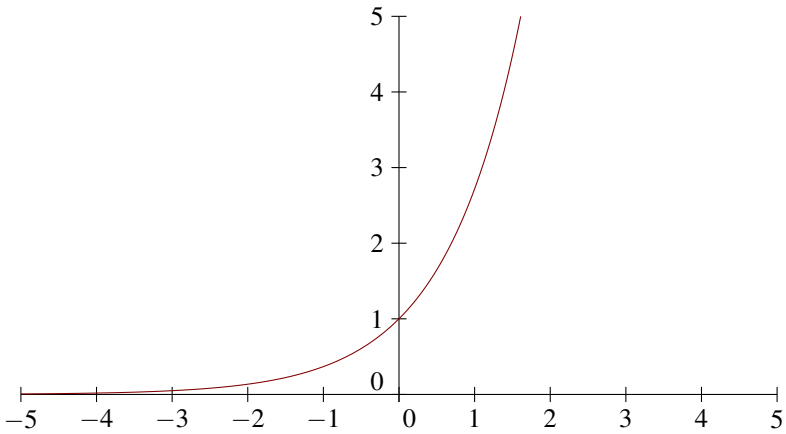


FIGURE 1.8 – Fonction exponentielle

Définition III.8 Si $z \in \mathbb{C}$, avec $z = a + ib$, on appelle **exponentielle du nombre complexe** z, le nombre complexe $e^a e^{ib}$ noté e^z. Cette définition permet donc de prolonger l'exponentielle au nombres complexes, en gardant la propriété $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Attention, si $a \in \mathbb{C}$, $e^a = e^{a+2\pi i}$, on ne peut donc pas définir le logarithme d'un nombre complexe non nul en posant $\ln(\rho e^{i\theta}) = \ln(\rho) + i\theta$, parce que θ est défini à 2π près.

On peut ajouter dans cette liste de fonctions usuelles les fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques.

⋆ Autres fonctions

Fonction partie entière

La fonction partie entière :

$$\lfloor\cdot\rfloor : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor = \text{ l'unique } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1. \end{array} \right.$$

Proposition III.19 On peut renverser l'inégalité précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Représentation graphique :

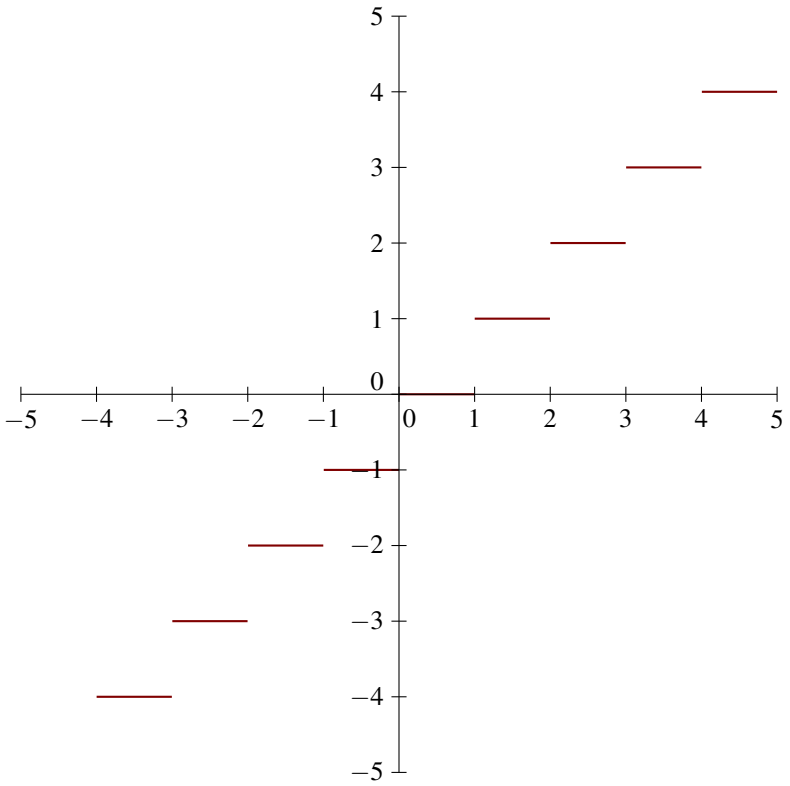


FIGURE 1.9 – La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(x,-x) = \sqrt{x^2}$$

Théorème III.20 — Inégalité triangulaire. La valeur absolue vérifie **l'inégalité triangulaire** :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

et **l'inégalité triangulaire renversée** ;

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \Big| |x| - |y| \Big| \leqslant |x-y|$$

R Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si x et y sont de même signe.

Représentation graphique :

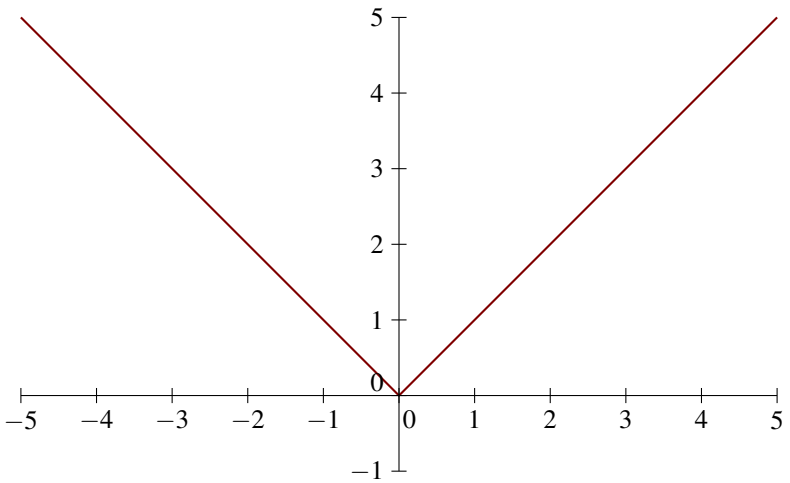


FIGURE 1.10 – La fonction $x \mapsto |x|$

Soient a et b deux réels, alors $|b-a|$ est la **distance** entre a et b sur la droite réelle.

Soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$, vérifiant l'inégalité $|x-a| \leqslant \varepsilon$ est l'ensemble des points sur la droite réelle situés à une distance inférieure à ε de a.

✯ Exercices à savoir faire

Exercice 1 Soit la fonction $f : x \longmapsto x^x$. Déterminer l'ensemble de définition, justifier la dérivabilité, puis construire le tableau de variation. Vérifier la dérivabilité en 0.

Correction : écrire sous forme exponentielle : $f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$. C'est donc la composée :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(x) & & \\ & & y & \longmapsto & e^y \\ x & & \longmapsto & & e^{x\ln(x)} \end{array}$$

On voit donc que la fonction est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut la prolonger en 0, en posant $f(0) = 1$. En effet, on a :

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \qquad \text{donc } \lim_{x\to 0} e^{x\ln(x)} = 1$$

La dérivée est donc : $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$

la fonction est décroissante pour $x \leqslant \frac{1}{e}$ puis croissante.

Pour la dérivabilité en 0, on a :

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{x\ln x}-1}{x} = \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\ln(x)$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(t) = -\infty$. D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$$

On a donc une demi-tangente verticale.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Correction : On a les équivalences :

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \iff e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln(\sqrt{x})}$$

On voit déjà que l'équation est définie pour $x > 0$. On continue l'équivalence :

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x &\iff \sqrt{x}\ln(x) = \frac{1}{2}x\ln(x) \\ &\iff \ln(x)(\sqrt{x})(1-\frac{1}{2}\sqrt{x}) = 0 \\ &\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = 0 \text{ ou } 1-\frac{1}{2}\sqrt{x} = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

On peut ajouter que 0 est aussi solution.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^{x^3} = (x^x)^3$.

Correction : Par équivalence :

$$\begin{aligned} x^{x^3} = (x^x)^3 &\iff e^{x^3\ln(x)} = \left(e^{x\ln(x)}\right)^3 \\ &\iff e^{x^3\ln(x)} = e^{3x\ln(x)} \end{aligned}$$

L'équation est définie pour $x > 0$, on continue l'équivalence :

$$\begin{aligned} x^{x^3} = (x^x)^3 &\iff x^3\ln(x) = 3x\ln(x) \\ &\iff \ln(x)x\left(x^2-3\right) = 0 \end{aligned}$$

D'où $x = \sqrt{3}$ ou $x = 1$. On peut ajouter que 0 est aussi solution.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2e^{6x+1} + 9e^{4x+1} \geqslant 5\sqrt{e^{4x+2}}$

Correction : l'équation est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} 2e^{6x+1} + 9e^{4x+1} \geqslant 5e^{2x+1} &\iff 2e^{6x} + 9e^{4x} \geqslant 5e^{2x} \\ &\iff 2X^3 + 9X^2 \geqslant 5X \text{ avec } X = e^x \\ &\iff X\left(2X^2 + 9X - 5\right) \geqslant 0 \text{ avec } X = e^x \\ &\iff 2X^2 + 9X - 5 \geqslant 0 \end{aligned}$$

On retombe sur une inéquation du second ordre. On calcule les racines : $\Delta = 81 + 4 \times 2 \times 5 = 41$.

Exercice 5 Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$.

Correction : On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2} &\iff e^{x\ln(x)}e^{(1-x)\ln(1-x)} \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff e^{x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)} \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2) \end{aligned}$$

Il faut donc étudier la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f : x \mapsto x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) = x\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \ln(1-x)$$

(c'est la fonction Entropie de Shannon qui sert en physique).

Il faut vérifier que la fonction f admet un minimum en $x = \frac{1}{2}$, Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,1[, \quad f(x) &\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2). \end{aligned}$$

On peut par exemple dériver la fonction f

Exercice 6

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Correction :

1. Simple étude de $x \mapsto \ln(x) - x + 1$.
2. On a :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &\leqslant e^{n\times\frac{1}{n}} = e.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} &= e^{-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\ &\geqslant e^{-n\times-\frac{1}{n}} = e.\end{aligned}$$

Rappels et compléments sur les séries numériques

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Séries télescopiques

Exercice 1

1. Trouver (a,b,c) trois réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

2. Calculer la somme partielle de la série de terme général : $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. En déduire la convergence de $\sum u_n$ et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Correction :

1. on trouve facilement :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+2}$$

Rappel de la technique : multiplier par x puis faire $x=0$ pour avoir a, multiplier par $x+1$ puis faire $x-1$ pour avoir b, etc.

2. C'est une somme télescopique sur trois termes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

3. la série converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 2 Calculer $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

En déduire la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$$

Correction :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$$

On voit aussi une somme télescopique.

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right) - \ln 2 \to -\ln 2.$$

✯ Séries alternées

Exercice 3 Justifier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+2} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n^3+1} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Expliquer comment obtenir une approximation de la somme par un programme Python à une précision ε donnée.

Correction : À chaque fois des sommes alternées avec $|u_n|$ qui tends vers 0 en étant décroissante.
Pour l'estimation, on sait que : $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$. Ainsi, on peut :

- soit déterminer à l'avance le rang N à partir duquel $|S_N - S| = |R_N| \leqslant \varepsilon$
- soit utiliser une boucle `while` tant que $|u_{n+1}| \geqslant \varepsilon$.

Par exemple :

```
S = 0
n = 0
while 1/(2*(n+1)**3+1) > epsilon :
  S +=  (-1)**n / (2*n**3+1)
  n += 1
```

Exercice 4 Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Correction : C'est une série alternée, mais la décroissance du terme général n'est pas claire.
On utilise donc un développement limité :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$$

ne sert à rien car la série n'est pas à termes positifs !

Par contre :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + \underset{n\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

permet d'écrire la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$ comme la somme d'une série alternée convergente et une série absolument convergente.

✯ Comparaison de séries

Exercice 5 Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum e^{-3n} \qquad \sum \frac{n-1}{n+2} \qquad \sum n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sum (-1)^n n^2.$$

Correction : pour $\sum e^{-3n}$ c'est une série géométrique avec $e^{-3} < 1$.
pour $\sum \frac{n-1}{n+2}$ divergence grossière.
pour $n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ divergence grossière.
pour $(-1)^n n^2$ divergence grossière.

Exercice 6 On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente et à terme général positif.
Étudier la convergence de la série $\sum u_n^2$.

Correction : Il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant 1$, et donc

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n^2 \leqslant u_n$$

ce qui prouve la convergence par comparaison.

Exercice 7 Convergence des séries :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sin^2 n} \qquad \sum \frac{n+3}{n^2+n+2} \qquad \sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \qquad \sum \frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)(n+3)^{\frac{3}{2}}}.$$

Correction :

$$\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n} \qquad \frac{1}{n\sin^2 n} \geqslant \frac{1}{n} \qquad \sum \frac{n+3}{n^2+n+2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n} \qquad \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2^n} \qquad \frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)(n+3)^{\frac{3}{2}}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$$

NB : bien indiquer qu'il s'agit de séries à termes positifs !

Exercice 8 Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = e^{\frac{a}{n}} - \sqrt{1-\frac{b}{n}}$$

en fonction des réels a et b.

Correction : On fait un DL :

$$\begin{aligned} u_n =& 1+\frac{a}{n}+\frac{a^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left(1-\frac{b}{2n}-\frac{b^2}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ =& \frac{2a+b}{2n}+\frac{4a^2+b^2}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Si $2a+b \neq 0$, alors $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{2a+b}{2n}$.

Ainsi u_n est de signe constant à partir d'un certain rang (argument à ne pas oublier) et la série $\sum \frac{2a+b}{2n}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge.

Si $2a+b=0$, alors soit $a=b=0$ (et u_n est nul), soit $a \neq 0$. Dans ce dernier cas on a $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{a^2}{n^2}$ et donc même argument que précédement (signe constant !) et $\sum u_n$ converge.

Exercice 9 Déterminer l'ensemble des triplets (a,b,c) de réels tels que la série de terme général $u_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}$ soit convergente.

Correction : Il s'agit de faire une DL qui dépend d'un paramètre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{an+b}-\frac{c}{n} =& \frac{1}{an}\left(\frac{1}{1+\frac{b}{an}}\right)-\frac{c}{n} \\ =& \frac{1}{an}\left(1-\frac{b}{an}+\underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{c}{n} \\ =& \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}-c\right)-\frac{b}{a^2n^2}+\underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on constate que si $\frac{1}{a} \neq c$ il y a divergence. Et si $\frac{1}{a} = c$, alors :

$$\frac{1}{an+b}-\frac{c}{n} = \frac{b}{a^2n^2}+\underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Et donc la série converge.

(le cas $a=0$ doit normalement être traité à part, dans ce cas il y a divergence grossière).

✯ Comparaison serie / intégrale

Exercice 10

1. Montrer que si $0<\alpha<1$, alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
2. Déterminer un encadrement, puis un équivalent du reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.

Correction : Comparer à l'intégrale ! On obtient :

1.

$$\int_1^{n+1} t^{-\alpha}dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1+\int_1^n t^{-\alpha}dt$$

Cela donne :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha}-1\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1+\frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha}-1\right)$$

Comme $\alpha < 1$:

$$1+\frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha}-1\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

et :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha}-1\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

2. Pour les restes, on fixe $n \geqslant 1$ et $N > n$ et on travaille sur $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$.

   On commence par écrire :

$$\forall k \geqslant 2,\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}dt$$

   On somme ensuite (par exemple pour $k \in [\![n+1, N]\!]$) :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^\alpha}dt$$

   on calcule les intégrales :

$$\begin{aligned}\int_n^N \frac{1}{t^\alpha}dt &= \frac{1}{-\alpha+1}\left[t^{-\alpha+1}\right]_n^N \\ &= \frac{1}{-\alpha+1}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\frac{1}{-\alpha+1}\left(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{-\alpha+1}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

   On fait tendre N vers $+\infty$, ce qui donne puisque $\alpha > 1$:

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

   Ainsi :

$$R_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

   REM : on peut aussi écrire (une fois que l'on a fait les intégrales généralisées) :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$$

Exercice 11 Série dont le terme général est le reste d'une série convergente.

Donner la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, puis celle de la série de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

R Bien comprendre l'énoncé, on s'intéresse à la nature de $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)$!

Correction : à la suite de l'exercice précédent :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ donc } \sum u_n \text{ diverge}$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3} \text{ donc } \sum v_n \text{ diverge}$$

✯ Produit de Cauchy

Exercice 12 On admet : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général :

$$w_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2(n-p)!} \qquad \text{pour } n \geqslant 1$$

2. Idem pour la série de terme général

$$w_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2(n-p)^2} \qquad \text{pour } n \geqslant 2$$

Correction : On note (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n^2}$, et (v_n) la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $v_n = \frac{1}{n!}$. On sait que :

$$\sum_{p\geqslant 1} u_p = \sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p^2} \text{ converge absolument vers } \frac{\pi^2}{6}$$
$$\sum_{p\geqslant 0} v_p = \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!} \text{ converge absolument vers } e$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}&(u_1+u_2++\dots)(v_0+v_1++\dots)\\ =&\underbrace{(u_1v_0)}_{w_1}+\underbrace{u_1v_1+u_2v_0}_{w_2}+\underbrace{u_1v_2+u_2v_1+u_3v_0}_{w_3}+\dots\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$w_n = \sum_{p=1}^{n} u_p v_{n-p} = u_1v_{n-1}+u_2v_{n-2}+\dots+u_nv_0$$

La série (w_n) est donc le produit de Cauchy des deux séries $\sum_{p\geqslant 1} u_p$ et $\sum_{p\geqslant 0} v_p$.

D'où la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ et la relation :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} w_n &= \sum_{p\geqslant 1} u_p \times \sum_{p\geqslant 0} v_p\\ &= e\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

On note toujours (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n^2}$, On a alors :

$$\begin{aligned}&(u_1+u_2++\dots)(u_1+u_2++\dots)\\ =&\underbrace{(u_1u_1)}_{w_2}+\underbrace{u_1u_2+u_2u_1}_{w_3}+\underbrace{u_1u_3+u_2u_2+u_3u_1}_{w_4}+\dots\end{aligned}$$

Ainsi, la série (w_n) est donc le produit de Cauchy de la série $\sum_{p\geqslant 1} u_p$ avec elle-même. D'où la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ et la relation :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} w_n &= \sum_{p\geqslant 1} u_p \times \sum_{p\geqslant 1} u_p\\ &= \frac{\pi^4}{36}\end{aligned}$$

Exercice 13 Soit la série (a_n) définie par : $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que $\sum a_n$ est convergente alors que le produit de Cauchy de la série $\sum a_n$ avec elle même est divergente.

R Ainsi, l'hypothèse **absolument convergente** est essentielle dans le résultat sur le produit de Cauchy de deux séries :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge absolument alors le produit de Cauchy converge absolument et

$$\left(\sum u_n\right)\left(\sum v_n\right) = \sum w_n \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Correction :
Le produit de Cauchy est la série de terme général :

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} \\ &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ k(n-k) \leqslant (n-1)^2$, et donc que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geqslant 1$$

Ainsi w_n ne tends pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente.

✯ Utilisation de la formule de Stirling

Exercice 14 Étudier la limite de l'expression $\frac{(2n)!}{n^n n!}$ et la converge de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$.

Correction : Pour la limite :

$$\frac{(2n)!}{n^n n!} \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{2}\left(\frac{4}{e}\right)^n \to +\infty$$

Pour la série on peut utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$$

donc la série converge.

On peut aussi utiliser Stirling :

$$\frac{n!}{n^n} \underset{n\infty}{\sim} e^{-n}\sqrt{2n\pi} = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série converge

Exercice 15 Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif α, la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}$.

Correction : On utilise Stirling :

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3n} \sqrt{3}\frac{1}{2\pi n}$$

Si $\alpha < 3$, divergence grossière, si $\alpha = 3$: équivalence avec la série harmonique, si $\alpha > 3$, la série $\sum \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3n} \frac{1}{n}$ cv donc $\sum u_n$ cv.

REM : on peut aussi utiliser le critère de d'Alembert.

On obtient que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{\alpha^3(n+1)^3} \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{3}{\alpha}\right)^3 \to \left(\frac{3}{\alpha}\right)^3$$

cela donne les cas $\alpha < 3$ et $\alpha > 3$ mais ne permet pas de conclure pour le cas $\alpha = 3$.

Exercice 16 Étudier suivant les valeurs des réels α et β la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+3)}\right)^\beta$$

Correction : On travaille pour simplifier chaque terme. Le produit des nombres pairs

$$2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n n!$$

le produit des nombres impairs :

$$3\cdot 5\cdots(2n+3) = (2n+3)!\frac{1}{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+2)} = (2n+3)!\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$$

et donc :

$$\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+3)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}{(2n+3)!}$$

On utilise ensuite la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}
(n!)^2 &\underset{n\infty}{\sim} n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)\\
2^{2n+1}(n!)^2(n+1) &\underset{n\infty}{\sim} 2^{2n+2}n^{2n+2}e^{-2n}\pi\\
(2n+3)! &\underset{n\infty}{\sim} (2n+3)(2n+2)(2n+1)(2n)!\\
&\underset{n\infty}{\sim} (2n)^3(2n)^{2n}e^{-2n}2\sqrt{\pi n}\\
&\underset{n\infty}{\sim} 2^{2n+4}n^{2n+3}e^{-2n}\sqrt{\pi n}
\end{aligned}$$

Au final :

$$\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+3)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

et donc :

$$\frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+3)}\right)^\beta \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha+\beta\frac{3}{2}}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)^\beta$$

On en déduit que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha+\beta\frac{3}{2} > 1$.

✯ Sujet de synthèse

Exercice 17 **Série dont le terme général est implicite**

On pose : $\forall n\in\mathbb{N},\ g_n : t \longmapsto \ln t - \arctan t - n\pi$.

1. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists! x_n \in \mathbb{R}_*^+,\ g_n(x_n) = 0$.
2. Montrer alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n > e^{n\pi}$.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{x_n}$.

Correction :

1. dresser le tableau de variation de x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (cas d'une fonction strictement monotone) pour avoir existence et unicité.
2. calculer $g_n(e^{n\pi})$ et placer cette valeur dans le tableau de variation.
3. C'est une série à termes positifs, on compare le terme général : $\frac{1}{x_n} < e^{-n\pi}$ série géométrique de raison $e^{-\pi}$.

✯ Calcul de la valeur d'une série alternée par la formule de Stirling

Exercice 18 Soit la série de terme général :

$$u_n = (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

où $n \geqslant 1$.

1. Montrer sa convergence.
2. On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) Montrer :
   $$S_{2n} = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)$$
   (b) Montrer :
   $$S_{2n} = \ln\left(\frac{(2^n n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2}\right)$$
3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ avec la formule de Stirling.

Correction :

1. On peut vérifier que :
   $$|u_{n+1}| = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = |u_n|$$
   Ainsi, on a une suite alternée, donc le terme général est décroissant et tends vers 0.
2. (a) On a :
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$
   On écrit alors :
   $$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= -\sum_{p=1}^{n} \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) + \sum_{p=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2p+2}{2p+1}\right) \end{aligned}$$
   (b) En utilisant les propriétés du logarithme :
   $$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}\right) + \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2n+1} \times \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}\right)^2\right) \end{aligned}$$
   On simplifie les termes un par un :
   $$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$$
   et :
   $$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Au final :

$$S_{2n} = \ln\left(\frac{1}{2n+1}\frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2}\right)$$

3. Puisque la série converge, la suite des somme partielles (S_n) converge vers $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$. La suite des rangs pairs (S_{2n}) est extraite de (S_n) donc :

$$\lim_{n\infty} S_{2n} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

On utilise alors la formule de Stirling :

$$\frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{4n}n^{4n}e^{-4n}(4\pi^2)n^2}{2^{4n}n^{4n}e^{-4n}(2\pi)(2n)}$$

et donc :

$$\frac{1}{2n+1}\frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

et ainsi :

$$\lim_{n\infty} S_{2n} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

✯ Série dont le terme général est une suite récurrente réelle

Exercice 19 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ donné et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{n+1}e^{-u_n}$$

1. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$$

puis $u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. (a) Montrer l'encadrement :

$$\forall x \geqslant 0,\ 1 - x \leqslant e^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

(b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\frac{n-2}{n(n-1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$.

Correction :

1. Clairement $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}e^{-u_{n-1}} < \frac{1}{n}$$

2. (a) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral ! ou étudier les fonctions ou utiliser les séries entières + signe du reste dans une série alternée.

(b) On applique à $x = u_{n-1}$, ce qui donne :

$$u_n = \frac{1}{n}e^{-u_{n-1}} \geqslant \frac{1}{n}(1-u_{n-1}) \geqslant \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$$

L'inégalité $u_n \leqslant \frac{1}{n}$ étant évidente.

3. Il faut vérifier que (u_n) est décroissante pour appliquer le théorème sur les séries alternées.
Méthode 1 : On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}\left(e^{-u_n} - (n+1)u_n\right)$$

En appliquant l'inégalité, on a :

$$\begin{aligned} e^{-u_n} - (n+1)u_n &\leqslant 1-(n+2)u_n + \frac{u_n^2}{2} \\ &\leqslant 1 - \frac{(n+2)(n-2)}{n(n-1)} + \frac{1}{2n^2} \\ &\leqslant \frac{-2n^2+9n-1}{2n^2(n-1)} \end{aligned}$$

à partir d'un certain rang cette expression est négative car :

$$\frac{-2n^2+9n-1}{2n^2(n-1)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{-2}{n}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &\leqslant \frac{1}{n+2} - \frac{n-2}{n(n-1)} \\ &\leqslant \frac{n(n-1)-(n-2)(n+2)}{n(n-1)(n+2)} \\ &\leqslant \frac{-n+4}{n(n-1)(n+2)} \end{aligned}$$

à partir d'un certain rang cette expression est négative car :

$$\frac{-n+4}{n(n-1)(n+2)} \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$$

✯ Développement asymptotique d'une série

Exercice 20

1. En utilisant le développement $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{O}\left(x^2\right)$ montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{\ln k}{k} + u_k.$$

où $u_k = \underset{k+\infty}{O}\left(\left(\frac{\ln k}{k}\right)^2\right)$

2. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
3. En utilisant les variations de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, montrer que la suite de terme général :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \int_1^n \frac{\ln x}{x}dx$$

converge.

4. En déduire l'existence d'une constante réelle K telle que :

$$\sum_{k=1}^{k} k^{\frac{1}{k}} = n + \frac{1}{2}(\ln(n))^2 + K + \underset{n\infty}{o}(1).$$

Correction :

1. On remplace x par $\frac{\ln k}{k}$ qui tends vers 0 lorsque k tends vers $+\infty$.
2. La série $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\ln k}{k}\right)^2$ converge car :

$$\left(\frac{\ln k}{k}\right)^2 = \frac{1}{k\sqrt{k}}\left(\frac{\ln k}{\sqrt{k}}\right)^2 \underset{k\infty}{o}\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right).$$

3. On constate que : $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est décroissante pour $x \geqslant e$.
   On compare alors la série à une intégrale (pour $k \geqslant 3$).
   Cela permet d'affirmer que :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\ln n + 1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx < 0$$

   La suite (v_n) est donc décroissante.
   De plus, on écrit :

$$v_n = \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln k}{k} - \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx + \frac{lnn}{n} + \frac{\ln 2}{2} - \int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$$

   On a :

$$\sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln k}{k} - \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx \geqslant 0 \text{ comparaison série / intégrale}$$
$$\frac{\ln n}{n} \geqslant 0$$

   et donc $v_n \geqslant \frac{\ln 2}{2} - \int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$, ainsi la suite (v_n) est minorée.
4. On a :

$$\int_1^n \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln n)^2}{2} \text{ par changement de variables } u = \ln x.$$

   Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{k} k^{\frac{1}{k}} = n + \frac{1}{2}(\ln(n))^2 + K'' + K' + \underset{n\infty}{o}(1).$$

   avec :

$$K'' = \lim v_n \text{ et } K' = \sum u_n$$

Variables aléatoires
Espérance
Variance
Lois usuelles
Couples et suites de variables aléatoires
Résultats asymptotiques
Exercices

2 — Variables aléatoires discrètes

Dans ce chapitre Ω désigne un ensemble (l'univers) et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

I Variables aléatoires

I.1 Généralités

Définition I.1 Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application définie sur Ω telle que :

- $X(\Omega)$ est au plus dénombrable,
- l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ est dans $\mathscr{A}$.

Cette variable aléatoire discrète est réelle si elle est valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$.

On a donc ajouté deux hypothèses par rapport à la première année : $X(\Omega)$ est au plus dénombrable ET l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ est dans $\mathscr{A}$.

Pour la première, cela signifie que l'on va considérer des variables aléatoires dont l'univers image peut être identifié à une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On peut donc faire des sommes sur tous les valeurs $x \in X(\Omega)$.
Dans ce cours, on notera $X(\Omega) = \left\{x_n\right\}_{n\in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$.
Le cas où X est la durée de vie d'une ampoule (avec donc $X(\Omega) = \mathbb{R}_*^+$) est donc hors-programme.

Pour la deuxième partie, cela signifie que

$$\forall x \in X(\Omega),\ (X = x) \in \mathscr{A} \text{ie est mesurable ou encore que } p(X = x) \text{ existe.}$$

Cette dernière hypothèse suffit à prouver que toute partie de $X(\Omega)$ est mesurable. Soit en effet U une partie quelconque de $X(\Omega)$. Comme :

$$(X \in U) = \bigcup_{x\in U} (X = x)$$

et que cette union est au plus dénombrable et constitué d'événements mesurables, par définition d'une tribu on a $(X \in U) \in \mathscr{A}$.
Ainsi, comme en première année, on va pouvoir définir $p(X > 2)$, $p(X \in [\![3,7]\!])$, etc.

Notation I.1. *On note $X^{-1}(U)$ ou $(X \in U)$ ou encore $\{X \in U\}$ l'image réciproque d'une partie U de $X(\Omega)$ par la variable aléatoire X.*
On note aussi $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$.

R On écrit souvent VAD pour variable aléatoire discrète et VARD pour variable aléatoire réelle discrète, il est clair que ces abréviations ne doivent pas apparaître dans une copie !

■ **Exemple I.1** On peut par exemple regarder la loi du premier succès dans un schéma de Bernoulli. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et on a bien une VARD.

Notons par exemple, que l'événement : « le numéro du premier succès est un nombre premier » est mesurable. ■

I.2 Loi de probabilités

On suppose que l'on a muni Ω d'une probabilité p.

Définition I.2 Soir X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, p)$.
La loi de probabilité de X est l'application :

$$\begin{cases} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \longmapsto & p(X = x) \end{cases}$$

Si on note $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$. alors La loi de probabilité de X s'identifie avec la suite $(p_n)_{n \in I}$ avec :

$$\forall n \in I,\ p_n = p(X = x_n).$$

Donner la loi c'est donc donner $X(\Omega)$ et donner l'expression de $p(X = x)$ en fonction de x.

■ **Exemple I.2** Pour la loi du premier succès dans un schéma de Bernoulli. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X = k) = pq^{k-1}.$$

■

Soit $U \subset X(\Omega)$ une partie de l'ensemble image. On a :

$$(X \in U) = \bigcup_{x \in U} (X = x) \text{ union disjointe}$$

et donc :

$$p(X \in U) = \sum_{x \in U} p(X = x) = \sum_{i \in I | x_i \in U} p_i$$

Ainsi, la connaissance des $p(X=x)$ pour $x \in X(\Omega)$ (de la loi) permet de définir la probabilité de toute partie U de $X(\Omega)$.

■ **Exemple I.3** Pour l'exemple précédent, la probabilité de l'événement E : « le premier succès est un nombre premier » est :

$$p(E) = \sum_{k \in \mathscr{P}} pq^{k-1} \qquad \text{avec } \mathscr{P} \text{ l'ensemble des nombres premiers}$$

Il est clair que si la convergence de cette série est évidente (c'est une série à termes positifs qui est majorée par 1), son calcul n'est pas possible.

Par contre, la probabilité de l'événement F :« le premier succès est un nombre pair » est :

$$\begin{aligned} p(F) &= \sum_{k \text{ pair}} pq^{k-1} = \sum_{l \in \mathbb{N}^*} pq^{2l-1} \\ &= \frac{p}{q} \sum_{l \in \mathbb{N}^*} q^{2l} \\ &= \frac{p}{q} q^2 \frac{1}{1-q^2} = pq \frac{1}{1-q^2} = \frac{pq}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q}. \end{aligned}$$

■

I.3 Système complet d'évènements associé

De même que pour les VAR finies, on a :

Proposition I.1 Soir X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, p)$.

Les événements $\Big((X=x)\Big)_{x \in X(\Omega)}$ forment un système dénombrable complet d'événements.

En particulier : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} p(X=x) = 1$.

Avec les notations précédentes, on peut écrire que les événements $\Big((X=x_n)\Big)_{n \in I}$ forment un SCE et que $\displaystyle\sum_{n \in I} p(X=x_n) = 1$.

Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, on a bien un nombre dénombrable d'événements.

Comme pour le cas des variables finies, cela sert surtout si la loi est définie en fonction d'un paramètre !

■ **Exemple I.4** Pour le rang du premier succès, on vérifie :

$$\sum_{k \geqslant 1} pq^{k-1} = p\frac{1}{1-q} = 1$$

■

On a aussi la proposition « dans l'autre sens » : on se donne la loi et il existe une unique probabilité qui permet d'obtenir cette loi pour X.

Proposition I.2 Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
On note $X(\Omega) = \{x_n | n \in I\}$ les (x_n) étant distincts.
Soit d'autre part, une suite $(p_n)_{n\in I}$ de réels positifs indexée sur I vérifiant $\sum_{i\in I} p_i = 1$ (au sens où la série converge et est de somme 1).
Alors, il existe une probabilité p sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que :

$$\forall n \in I,\ p(X = x_n) = p_n$$

Cette proposition a une application théorique : il est souvent difficile de définir la probabilité sur Ω (si par exemple Ω n'est pas dénombrable).
On définit alors la probabilité comme l'unique probabilité qui permet d'avoir la loi qui semble la plus naturelle.

■ **Exemple I.5** Toujours pour suivre un schéma de Bernoulli de longueur infinie et X est le rang du premier succès. On sait que l'univers $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$ est non dénombrable. Il est donc difficile d'y définir une probabilité (sur quelle tribu ?).

En théorie on procède ainsi :

- on définit une tribu sur Ω, suffisamment grande pour contenir tous les événements $(F_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(P_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. C'est la **tribu engendrée**.
  Elle contient tous les événements auquel on pourrait penser (exemples : « face sur tous les pairs », « piles jusqu'au rang n », « pile sur tous les nombres premiers », etc.). Précisément, elle contient toutes les unions et intersections dénombrables de $(F_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(P_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.
- la variable aléatoire X qui donne le rang du premier succès est donc bien définie. De plus, pour tout valeur $k \in X(\Omega)$, $(X = k)$ est bien un événement de $\mathscr{A}$.
- La série $\sum_{k\geqslant 1} pq^{k-1}$ est convergente, de somme 1.
- On considère alors sur Ω la probabilité p telle que : $p(X = k) = p^{k-1}q$.

Il reste à vérifier que cette probabilité convient pour ce que l'on veut en faire. Déjà, cette probabilité est bien définie sur $\mathscr{A}$, ainsi, on peut mesurer tous les événements obtenus comme des unions et des intersections dénombrables de $(F_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(P_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

On a de plus :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (X \geqslant k+1) = (X \geqslant k) \cap (F_k)$$

et donc par indépendance :

$$p(X \geqslant k+1) = p(X \geqslant k)p(F_k)$$

or on a facilement :

$$\begin{aligned} p(X \geqslant k+1) &= 1 - \sum_{j=1}^{k} p(X = j) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{k} q^{j-1}p = 1 - p\frac{1-q^k}{1-q} = q^k \end{aligned}$$

de même : $p(X \geqslant k) = q^{k-1}$. Ce qui donne $p(F_k) = q$.

On peut aussi faire :

$$(X = k) = (X \geqslant k) \cap P_k$$

et de même cela donne $p(P_k) = p$.

La probabilité ainsi définie est bien celle attendue. ■

Ces développements théoriques ne sont pas dans l'esprit du programme. En pratique, on procède ainsi sans le formaliser.

Lorsque l'énoncé demande de vérifier que la variable X définie sur $\{x_n\}_{n\in I}$ par une loi donnée $(p_n)_{n\in I}$ est bien une variable aléatoire, il s'agit de vérifier que $\sum_{i\in I} p_i = 1$ (au sens où la série converge et est de somme 1).

I.4 Fonction de répartition

Définition I.3 La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire discrète réelle X sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = p(X \leqslant x).$$

Pour une variable aléatoire discrète réelle, la loi de probabilité est ainsi une fonction définie sur l'univers image (ou sur l'ensemble I en bijection avec $X(\Omega)$) la fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$.

Le dessin est le même que dans le cas fini, avec cette fois une infinité de sauts !

Attention, on peut par exemple avoir $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et donc une infinité de saut aussi dans les négatifs.

Bien entendu, cela sert pour la loi d'un maximum / minimum !

Proposition I.3 La fonction de répartition d'une VARD est une fonction positive, croissante de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

■ **Exemple I.6** Toujours pour le cas du rang du premier succès.

On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X > k) = p(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k) = q^k.$$

et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X \leqslant k) = 1 - q^k.$$

C'est la fonction de répartition.

Précisément, la fonction de répartition est :

$$x \longmapsto p(X \leqslant x) = 1 - p^{\lfloor x \rfloor}$$

Notons que l'on peut aussi faire ce calcul ainsi :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X \leqslant k) &= \sum_{j=1}^{k} p(X = j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} pq^{j-1} = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k\end{aligned}$$

■

II Espérance

On note X une VARD et $X(\Omega) = \{x_n\}_{n\in I}$ où $I \subset \mathbb{N}$.

II.1 Définition

Définition II.1 La variable aléatoire discrète réelle X est dite d'espérance finie si la série : $\sum_{n\in I} x_n p(X = x_n)$ est absolument convergente, ie si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} xp(X = x)$ est absolument convergente.

Dans ce cas, on appelle espérance et on note $E(X)$ la valeur de cette série.

Ainsi :

$$E(X) = \sum_{n\in I} x_n p(X = x_n) = \sum_{x\in X(\Omega)} xp(X = x)$$

On dit aussi que X **admet une espérance**.

Contrairement au cas où $X(\Omega)$ est fini, cela n'est pas évident : il faut montrer que la série est **absolument convergente**.

Si l'univers image $X(\Omega)$ contient des valeurs négatives, il faut bien vérifier que la série est absolument convergente, mais dans la plupart de cas, $X(\Omega)$ est une partie de $\mathbb{N}$ et donc c'est une série à termes positifs.

Le fait de ne parler d'espérance uniquement lorsque la série est absolument convergente permet d'éviter de dépendre de l'ordre dans lequel on parcourt les éléments.

C'est la même interprétation que dans le cas fini : c'est la gain moyen, la moyenne des gains pondérée par la probabilité. On dit que X est **centrée** si $E(X) = 0$.

■ **Exemple II.1** Toujours pour le cas du rang du premier succès.

On regarde si $\sum_{k\geqslant 1} kpq^{k-1}$ est absolument convergente. Pour cela, le plus simple est d'utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+1}{k} q \underset{k\infty}{\longrightarrow} q < 1.$$

Ainsi, X admet une espérance.

On doit ensuite calculer la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}$.

Il existe plusieurs techniques (somme télescopique, somme triangle, etc.).

Le plus simple est d'admettre la relation que l'on verra plus tard :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$$

et donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

■

II.2 Expression à partir de la fonction de répartition

On se restreint ici au cas d'une VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$:

Proposition II.1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On a alors : la série $\sum_{n=1}^{+\infty} p(X \geqslant n)$ converge absolument si et seulement si X est d'espérance finie. De pus dans ce cas, on a l'égalité :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(X \geqslant n)$$

L'intérêt est d'utiliser la fonction de répartition et non la loi pour calculer l'espérance. Plus précisément c'est $p(X \geqslant n)$ que l'on utilise avec :

$$p(X \geqslant n) = 1 - p(X \leqslant n-1) = 1 - F_X(n-1)$$

On retrouve le résultat avec la méthode suivante :

$$\begin{aligned}
E(X) =& p(X=1) + 2p(X=2) + 3p(X=3) + \cdots + np(X=n) + \ldots \\
=& p(X=1) \\
&+ p(X=2) + p(X=2) \\
&+ p(X=3) + p(X=3) + p(X=3) \\
&+ \vdots \\
&+ p(X=n) + p(X=n) + \cdots + \cdots + p(X=n) \\
&+ \vdots + \\
=& p(X \geqslant 1) + p(X \geqslant 2) + p(X \geqslant 3) + \cdots + p(X \geqslant n) \\
=& \sum_{k=1}^{+\infty} p(X \geqslant k).
\end{aligned}$$

C'est comme cela qu'il faut comprendre et apprendre ce résultat pour l'adapter aux différents cas.
Par exemple, on peut écrire :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X > k)$$

Démonstration. Cette démonstration fait appel à la notion de famille sommable.

Supposons que $E(X)$ admettent une espérance, alors la série $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp(X = k)$ converge et donc la famille $(kp(X = k))$ est sommable.

On peut alors inverser les sommes en écrivant :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kp(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{k} p(X = k) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=i}^{+\infty} p(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p(X \geqslant i) \end{aligned}$$

On a donc convergence de la somme et égalité.

Dans l'autre sens, si on suppose que $\left(\sum_{i=1}^{+\infty} p(X \geqslant i)\right)$ converge alors la famille $(p(X \geqslant i))$ est sommable, et on peut faire les calculs dans l'autre sens (puisque toutes les séries convergent). On en déduit l'égalité. ■

■ **Exemple II.2** Pour la loi du premier succès, on sait $p(X \geqslant k) = q^{k-1}$ et donc :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

■

II.3 Théorème de transfert

On revient temporairement au cas général d'une série à valeurs dans un espace image quelconque, au plus dénombrable $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$.

Proposition II.2 — Théorème de transfert. Soit X est une variable aléatoire discrète et f est une application à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$, si bien que l'on peut définir $f(X)$ qui est une variable aléatoire réelle discrète.

On a alors : $f(X)$ est d'espérance finie, si et seulement si la famille $(p(X = x)f(x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, c'est-à-dire que la série : série

$$\sum_{n \in I} p(X = x_n) f(x_n) \text{ est absolument convergente.}$$

Dans ce cas, on a de plus :

$$E(f(X)) = \sum_{n\in I} p(X = x_n) f(x_n) = \sum_{x\in X(\Omega)} p(X = x) f(x)$$

Démonstration. La démonstration est admise en cours. Elle est donnée ici pour information.

On note $Y = f(X)$ et $Y(\Omega) = \{y_j | j \in J\}$ avec $J \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j\in J} y_j p(Y = y_j) \\ &= \sum_{j\in J} y_j p(f(X) = y_j) \end{aligned}$$

pour chaque $j \in J$, on considère

$$I_j = \left\{ i \in I | f(x_i) = y_j \right\}$$

Ainsi, I_j est l'ensemble des indices des éléments x_i qui sont antécédants de y_j. Puis on a :

$$p(f(X) = y_j) = \sum_{i\in I_j} p(X = x_i)$$

car pour que $f(X)$ soit égal à y_j, il faut que X prenne pour valeur l'un des antécédants de y_j.

On en déduit :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j\in J} y_j p(f(X) = y_j) \\ &= \sum_{j\in J} \left(y_j \sum_{i\in I_j} p(X = x_i) \right) \\ &= \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} f(x_i) p(X = x_i) \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que les $(I_j)_{j\in J}$ forment une partition de I. (c'est la partition selon les valeurs de X). D'où :

$$E(Y) = \sum_{i\in I} f(x_i) p(X = x_i)$$

■

Même interprétation et même usage que dans le cas fini : on calcule l'espérance de $f(X)$ (plus exactement on montre l'existence et calcule la valeur) sans connaître la loi de $f(X)$ (qui est dure à calculer).

En particulier, X admet une espérance si et seulement si $|X|$ admet une espérance.

■ **Exemple II.3** Si on fixe $r \in \mathbb{N}$, et que l'on considère la fonction $f : x \longmapsto x^r$, alors on obtient **le moment d'ordre** r :

$$E(X^r) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k)k^r$$

■

■ **Exemple II.4** Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que l'on fixe $s \in \mathbb{R}$ et que l'on utilise $f : k \longmapsto s^k$, on obtient :

$$E(s^X) = E(f(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k)s^k$$

C'est la **série génératrice** de X, que l'on étudiera plus tard.

Elle est définie pour les valeurs de $s \in \mathbb{R}$ tels que la série : $\sum_{k=0}^{+\infty} p(X = k)s^k$ converge absolument. ■

II.4 Linéarité, positivité et croissance

Proposition II.3 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes qui admettent des espérances.

Pour toute valeur α de $\mathbb{R}$, la variable aléatoire discrète $\alpha X + Y$ admet alors une espérance avec :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ E(\alpha X + Y) = \alpha E(X) + E(Y)$$

on dit que **l'espérance est linéaire**.

Si $X \geqslant 0$ (au sens où $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant 0$), alors $E(X) \geqslant 0$.

Si $X \geqslant Y$ (au sens où $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant Y(\omega)$), alors $E(X) \geqslant E(Y)$. On dit que **l'espérance est croissante**.

On peut même remplacer l'hypothèse $X \geqslant 0$ par :

$$\left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) < 0\right\} \text{ est de probabilité nulle.}$$

III Variance

III.1 Définitions

Définition III.1 Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

On dit que X admet un moment d'ordre 2 si X^2 est d'espérance finie.

Le moment d'ordre 2 est alors $E(X^2)$.

Proposition III.1 Soit une variable aléatoire réelle discrète X telle que X^2 est d'espérance finie.

Alors X est elle-même d'espérance finie.

Démonstration. On suppose donc X^2 d'espérance finie. Pour faciliter les notations, on suppose que $I = \mathbb{N}$, ie que $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

On considère $N \in \mathbb{N}$, et on découpe l'ensemble $[\![0,N]\!]$ des indices en deux parties : celles pour lesquels $|x_i| \leqslant 1$ et celles pour lesquelles $|x_i| > 1$

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i| p(X = x_i) = \sum_{i\in[\![0,N]\!] \,|\, |x_i|\leqslant 1} |x_i| p(X = x_i) + \sum_{i\in[\![0,N]\!] \,|\, |x_i|>1} |x_i| p(X = x_i)$$

si $|x_i| \leqslant 1$, on majore $|x_i|$ par 1, sinon on majore $|x_i|$ par $|x_i|^2$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} |x_i| p(X = x_i) &\leqslant \sum_{i\in[\![0,N]\!] \,|\, |x_i|\leqslant 1} p(X = x_i) + \sum_{i\in[\![0,N]\!] \,|\, |x_i|>1} x_i^2 p(X = x_i) \\ &\leqslant 1 + \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2 p(X = x_i) = 1 + E(X^2)\end{aligned}$$

en effet, les sommes à termes positives suivantes sont convergentes :

$$\sum_{i\in[\![0,N]\!]} p(X = x_i) = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2 p(X = x_i) = E(X^2)$$

Ainsi, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{i=1}^{N} |x_i| p(X = x_i)$ sont majorées et donc $\sum x_i p(X = x_i)$ est absolument convergente et donc X admet une espérance. ■

Définition III.2 Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

Si X^2 est d'espérance finie (ie X admet un moment d'ordre 2), on appelle variance de X et on note $V(X)$ le réel

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

La variance est positive et on appelle écart-type la réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
La variable X est réduite si $V(X) = 1$

Proposition III.2 — Koenig-Huyghens. Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que X^2 est d'espérance finie (ie X admet un moment d'ordre 2), on a :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2.$$

Démonstration. Même démonstration que dans le cas d'un univers fini ! ■

En conséquence, quand on veut calculer la variance (et montrer qu'elle existe), on doit commencer par calculer le moment d'ordre 2, ie la converge de la série :

$$\sum_{n\in I} x_n^2 p(X = x_n) \text{ série à termes positifs}$$

On ne parle pas de variable aléatoire à « variance finie » mais de variable aléatoire qui admet un moment d'ordre 2. Bien qu'en pratique, la valeur du moment d'ordre 2 n'importe peu.

On a les mêmes propriétés et les mêmes interprétations que dans le cas fini : la variance mesure le risque.

III.2 Propriétés

On a de même que dans le cas fini :

Proposition III.3 Soit X une variable aléatoire réelle discrète qui admet un moment d'ordre 2, alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aX+b$ admet aussi un moment d'ordre 2, et :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R},\ V(aX+b) = a^2 V(X)$$

En conséquence :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R},\ \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

Comme on l'a vu en première année, si X est une VARD qui admet un moment d'ordre 2, et qui est non constante, alors : $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

III.3 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Thebychev

✯ Inégalité de Markov

Proposition III.4 Soit X une variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie. On a alors :

$$\forall t > 0, \quad p(|X| \geqslant t) \leqslant \frac{E(|X|)}{t}$$

Dans le cas où X est positive et d'espérance finie, on peut donc écrire directement :

$$\forall t > 0, \quad p(X \geqslant t) \leqslant \frac{E(X)}{t}$$

L'interprétation est la suivante : on a une variable aléatoire et on se demande qu'elle est la probabilité qu'elle soit grande (plus grande que t).
Plus t est grand plus cette probabilité tends vers 0 à une vitesse supérieure à celle de $\dfrac{E(|X|)}{t}$.
Remarquons que cette inégalité n'a d'intérêt que si $t \geqslant E(|X|)$, puisque par définition, $p(|X| \geqslant t) \leqslant 1$.

Cette inégalité est plutôt mauvaise (comme on va le voir dans la démonstration) mais elle a l'avantage d'être universelle : pas besoin de connaître la loi, l'espérance (ie la moyenne) suffit.
Par exemple supposons que l'on mesure les revenus moyens dans une population et que l'on trouve 2000 euros. Alors on peut dire que la proportion d'individus

qui gagne plus de 10000 euros est inférieure à $\dfrac{2000}{10000} = \frac{1}{5}$. C'est dans ce sens qu'elle est utilisée en statistiques, puisqu'on ne connaît pas la loi de distribution de X.

Démonstration. Soit $t > 0$, considérons l'événement $p(|X| \geqslant t)$, on a :

$$E(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| p(X = x) \qquad \text{théorème de transfert}$$

On découpe alors l'univers images $X(\Omega)$ en deux parties : les valeurs faibles en valeur absolue ie inférieures à t et les fortes ie supérieures à t.

On écrit donc :

$$A = \left\{ x \in X(\Omega) \middle| |x| < t \right\}$$
$$B = \left\{ x \in X(\Omega) \middle| |x| \geqslant t \right\}$$

et donc : $X(\Omega) = A \cup B$ union disjointe.

On a aussi :

$$p(|X| \geqslant t) = \sum_{x \in X(\Omega) \mid |x| \geqslant t} p(X = |x|) = \sum_{x \in B} p(X = x)$$

On utilise alors ce découpage pour obtenir le résultat. Toutes les sommes sont absolument convergente par hypothèse.

$$\begin{aligned} E(|X|) &= \sum_{x \in A} |x| p(X = x) + \sum_{x \in B} |x| p(X = x) \\ &\geqslant \sum_{x \in B} |x| p(X = x) \\ &\geqslant t \sum_{x \in B} p(X = x) = t p(|X| \geqslant t) \end{aligned}$$

■

On a donc entièrement négligé les termes de A (ie les termes petits) et de plus systématiquement remplacer les termes grands par t. On voit donc que ce n'est pas une inégalité très précise.

✯ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Proposition III.5 Soit X une variable aléatoire discrète qui admet un moment d'ordre 2, ie telle que X^2 soit d'espérance finie.

On a alors :

$$\forall A > 0,\ p(|X - E(X)| \geqslant A) \leqslant \frac{V(X)}{A^2}$$

Revoir l'interprétation faite en première année : on voit bien que plus la variance est faible plus la probabilité de s'éloigner de la moyenne est faible. On voit aussi que

$$\lim_{A \to +\infty} p(|X - E(X)| \geqslant A) = 0 \text{ au moins à la vitesse de } \frac{V(X)}{A^2}$$

Ici aussi, on voit que cela n'a d'intérêt que si $A \geqslant \sigma(X)$.

Une autre manière de voir est de considérer l'événement contraire, et de remplacer A par ε. Dans le cas général, on a

$$p(|X-m|<\varepsilon) \geqslant 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Ce qui signifie que X est proche de m à epsilon près avec une probabilité $1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ Par exemple, on peut dire qu'il y a plus d'une chance sur 2 que $|X-m|$ soit inférieur à $\sqrt{2}\sigma$.

Démonstration. On peut refaire la démonstration faite en première année ou utiliser directement l'inégalité de Markov.

En effet, la variable $Y=(X-E(X))^2$ est d'espérance finie. Ainsi, en considérant un réel $A>0$, on a :

$$p(Y \geqslant A^2) \leqslant \frac{E(Y)}{A^2} \text{ en appliquant l'inégalité de Markov à } A^2$$

ce qui s'écrit :

$$p((X-E(X))^2 \geqslant A^2) \leqslant \frac{E\left((X-E(X))^2\right)}{A^2}$$

on peut remplacer l'événement $(X-E(X))^2 \geqslant A^2$ par l'événement $|X-E(X)| \geqslant A$ et $E\left((X-E(X))^2\right)$ par $V(X)$ pour obtenir l'inégalité demandée :

$$p\left(|X-E(X)| \geqslant A\right) \leqslant \frac{V(X)}{A^2}$$

■

IV Lois usuelles

En plus des lois usuelles finies, on va introduire deux nouvelles lois : la loi géométrique et la loi exponentielle.

IV.1 Loi géométrique

Définition IV.1 Soit $p \in]0,1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X=k)=p(1-p)^{k-1}$$

Notation IV.1. *On note $X \sim \mathscr{G}(p)$. On écrit aussi souvent : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X=k)=pq^{k-1}$.*

Proposition IV.1 On considère une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p (par exemple un tirage P/F) .

Soit X la variable aléatoire qui donne le rang du premier succès (du premier

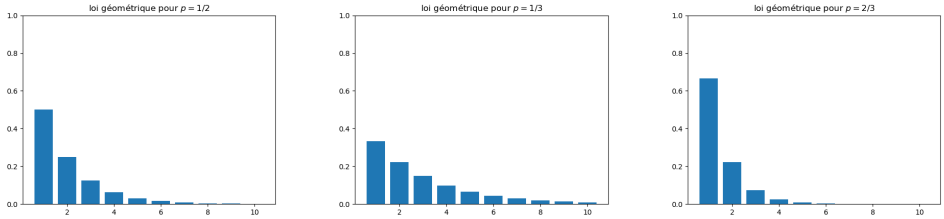


FIGURE 2.1 – Exemple d'histogramme de la loi géométrique pour $p = 1/2$, $p = 1/3$ et $p = 2/3$. On voit que si p est grand, on part « haut » mais on descends plus vite (à chaque itération on multiplie par q) si p est petit, on a un histogramme relativement plus plat. Il y a une infinité de valeurs non nulles dans l'histogramme.

pile). On a alors : $X \sim \mathscr{G}(p)$

Démonstration. Déjà fait. ■

Proposition IV.2 Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$. On a alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{(1-p)}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$.

Démonstration. On a déjà vu le calcul de l'espérance.

Pour la variance, on a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

il reste donc à calculer $E(X^2)$. Ce qui donne avec le théorème de transfert :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(X = k)$$

(au sens où l'on doit prouver la convergence absolue de cette série).

Il y a plusieurs techniques mais toutes reposent sur la même première idée : remplacer k^2 par $k(k-1)+k$. Ce qui revient à écrire :

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$$

on calcule donc :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p(X = k) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-1}p \end{aligned}$$

Et on admet la relation :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) =& pq\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} \\ =& pq\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2} \end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{aligned} V(X) =& E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ =& \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\ =& \frac{2q+p-1}{p^2} \\ =& \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

■

✯ **Loi géométrique sur $\mathbb{N}$**

Il existe aussi une autre loi géométrique, dite loi géométrique sur $\mathbb{N}$, ou loi géométrique retardée. Elle compte le nombre d'échecs avant le premier succès. On a alors :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ p(X=k) = q^k p$$

Si $Y \sim \mathscr{G}(p)$, on a :

$$p(X=k) = p(Y=k+1)$$

On peut alors facilement calculer la fonction de répartition, l'espérance et la variance.

IV.2 Loi de Poisson

On rappelle la relation suivante (que l'on reverra en détail dans le chapitre sur les séries entières) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Définition IV.2 On dit que la variable X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$ lorsque : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Notation IV.2. *On note* $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

! En général, on n'a pas $\lambda \in]0,1[$

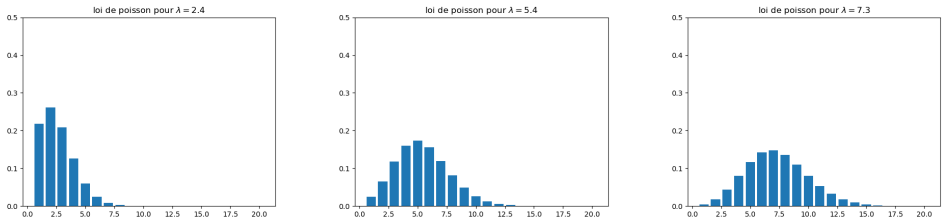


FIGURE 2.2 – Exemples d'histogramme de la loi de Poisson. La distribution est croissante pour $k < \lambda$ décroît ensuite. Il y a une infinité de valeurs non nulles dans l'histogramme.

R Si $\lambda = 0$, alors la loi de Poisson est constante (elle est nulle). C'est une convention de considérer la loi constante comme une loi de Poisson.

La relation : $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ assure bien que l'on a définit une loi de probabilité.

Il n'y a pas d'interprétation en terme de schéma de Bernoulli, en fait, on verra que la loi de Poisson corresponds à la limite lorsque le nombre d'épreuve tends vers $+\infty$ de lois binomiales.
La loi de poisson décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces évènements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent.
Par exemple, si un certain type d'évènements se produit en moyenne 4 fois par minute, pour étudier le nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps de 10 minutes, on choisit comme modèle une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10 \times 4 = 40$.

La loi de Poisson est utilisé dans les compteurs Geiger.

Proposition IV.3 Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors on a :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

Démonstration. Pour l'espérance, on passe par les sommes partielles

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} kp(X=k) =& e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{N} k\frac{\lambda^k}{k!} \\ =& e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ =& e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\lambda^k}{k!} \underset{N\infty}{\longrightarrow} \lambda\end{aligned}$$

en utilisant la convergence de la série : $\sum_k \frac{\lambda^k}{k!}$ vers $e^{-\lambda}$

Pour le moment d'ordre 2, on utilise $k^2 = k(k-1) + k$.

R Cette technique est à connaître.

Ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{N} k^2 p(X=k) = \sum_{k=0}^{N} k(k-1)p(X=k) + \sum_{k=0}^{N} kp(X=k)$$

la dernière série converge vers λ comme on l'a vu. Pour la première, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} k(k-1)p(X=k) =& e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{N} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}\\ =& e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{N}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\\ =& e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=0}^{N-2}\frac{\lambda^k}{k!} \underset{N\infty}{\longrightarrow} \lambda^2\end{aligned}$$

Ainsi, $X(X-1)$ admet une espérance et $E(X(X-1)) = \lambda^2$.

On obtient alors que X admet un moment d'ordre 2 et que :

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

Au final :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda.$$

■

V Couples et suites de variables aléatoires

V.1 Généralités

Toutes ces définitions sont strictement identiques au cas de variables aléatoires finies :

Définition V.1 Un couple de variable aléatoire discrètes (X,Y) sur $(\Omega,\mathscr{A})$ est la donnée de deux variables aléatoires discrètes X et Y.

L'univers image du couple (X,Y) est $(X,Y)(\Omega) = X(\Omega)\times Y(\Omega)$. C'est une ensemble au plus dénombrable comme produit cartésien d'ensemble au plus dénombrable.

On note $(X,Y)(\Omega) = \{(x_i,y_j)|(i,j)\in I\times J\}$ où I et J sont des parties de $\mathbb{N}$. Le système (au plus dénombrable) complet d'événements associé à (X,Y) est la famille au plus dénombrable

$$\Big((X=x_i\cap Y=y_j)\Big)_{(i,j)\in I\times J}$$

La loi de probabilité du couple (X,Y) est la loi conjointe de (X,Y). C'est la donnée de : $p(X=x\cap Y=y)$ pour toute valeur $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

La loi de X est la première loi marginale du couple (X,Y), La loi de Y est la deuxième loi marginale du couple (X,Y).

La loi du couple donne les lois marginales par la formule des probabilité totales,

mais la réciproque est fausse.

Si $x \in X(\Omega)$, alors la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est l'application :

$$\begin{cases} Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ y & \longmapsto & p_{X=x}(Y=y) \end{cases}$$

On a aussi les mêmes définitions pour les familles finies et les suites de variables aléatoires discrètes :

Définition V.2 Une famille de variable aléatoires discrètes $(X_1, \dots, X_n)$ est la donnée de n variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

L'univers image de la famille est le produit des univers image :

$$(X_1, \dots, X_n)(\Omega) = X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$$

Une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la donnée de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Par exemple, un tirage infinies de P/F ie une succession infinies d'épreuves de Bernoulli de même probabilité de succès et indépendantes est la donnée d'une suite de variables : $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, avec $X_i = 1$ si succès (si pile) 0 sinon (si face). Les X_i sont des variables de Bernoulli.

On va donner dans la partie suivante la définition de l'indépendance de ces variables.

V.2 Variables aléatoires discrètes indépendantes

✯ Cas de deux variables

On retrouve la définition vue en première année :

Définition V.3 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont indépendantes si :

$$\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ p(X = x_i \cap Y = y_j) = p(X = x_i)p(Y = y_i).$$

Notation V.1. *On note* $X \perp\!\!\!\perp Y$.

On a alors le résultat suivant : dès que l'on prend une partie A dans $X(\Omega)$ et une partie B dans $Y(\Omega)$ alors les événements $X \in A$ et $Y \in B$ sont indépendants :

Proposition V.1 Soit X et Y deux variables aléatoires.

Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout couple de parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a :

$$p(X \in A \cap Y \in B) = p(X \in A)p(Y \in B)$$

Démonstration. Supposons que pour tout couple de parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on ait :

$$p(X \in A \cap Y \in B) = p(X \in A)p(Y \in B)$$

Considérons $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, on a alors :

$$p(X \in \{x\} \cap Y \in \{y\}) = p(X \in \{x\})p(Y \in \{y\})$$

en appliquant la propriété au singleton $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. Cela donne alors :

$$p(X = x \cap Y = y) = p(X = x)p(Y = y)$$

Maintenant supposons que pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, on ait : $p(X = x \cap Y = y) = p(X = x)p(Y = y)$. Considérons $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
p(X \in A \cap Y \in B) &= \sum_{(i,j)|x_i \in A \text{ et } y_j \in B} p(X = x_i \cap Y = y_j) \\
p(X \in A) &= \sum_{i|x_i} p(X = x_i) \\
p(Y \in B) &= \sum_{j|y_j \in B} p(Y = y_j)
\end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
p(X \in A \cap Y \in B) &= \sum_{(i,j)|x_i \in A \text{ et } y_j \in B} p(X = x_i \cap Y = y_j) \\
&= \sum_{(i,j)|x_i \in A \text{ et } y_j \in B} p(X = x_i)p(Y = y_j)
\end{aligned}$$

Cette somme double est séparable. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
p(X \in A \cap Y \in B) &= \sum_{i|x_i} \left(p(X = x_i) \sum_{j|y_j \in B} p(Y = y_j) \right) \\
&= \left(\sum_{i|x_i} p(X = x_i) \right) \left(\sum_{j|y_j \in B} p(Y = y_j) \right) = p(X \in A)p(X \in B).
\end{aligned}$$

■

On a aussi la proposition suivante :

Proposition V.2 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit f une fonction sur $X(\Omega)$ et g une fonction sur $Y(\Omega)$.

On a alors : $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration. Considérons $a \in f(X)(\Omega)$ et $b \in g(Y(\Omega))$, on alors :

$$(f(X) = a) = X \in f^{-1}(\{a\}) \qquad \text{et} \qquad (g(Y) = b) = Y \in g^{-1}(\{b\})$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
p\left((f(X) = a) \cap (g(Y) = b)\right) &= p\left(X \in f^{-1}(\{a\}) \cap Y \in g^{-1}(\{b\})\right) \\
&= p\left(X \in f^{-1}(\{a\})\right) p\left(Y \in g^{-1}(\{b\})\right) \\
&= p\left(f(X) = a\right) p\left(g(Y) = b\right)
\end{aligned}$$

■

✯ Somme de deux variables de Poissons indépendantes

Exercice à savoir refaire ! ! !

Proposition V.3 Soient X et Y deux variables aléatoires qui suivent une loi de Poisson :

$$X \sim \mathscr{P}(\lambda) \qquad \text{et} \qquad Y \sim \mathscr{P}(\mu)$$

On suppose que X et Y sont indépendantes.

On a alors : $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

Ainsi, la somme de deux VARD suivant une loi de Poisson est une VARD suivant un loi de Poisson et le paramètre de la somme est la somme des paramètres.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} p(X+Y=k) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} p(X=i \cap X+Y=k) \quad \text{proba totale avec SCE associé à } X \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} p(X=i \cap Y=k-i) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} p(X=i)p(Y=k-i) \end{aligned}$$

On enlève les termes nuls : en effet, si $k-i<0$, alors $p(Y=k-i)=0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} p(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} p(X=i)p(Y=k-i) \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \end{aligned}$$

On fait apparaître le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} p(X+Y=k) &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} k! \frac{\lambda^i}{i!} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{i}{k} \lambda^i \mu^{k-i} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} (\lambda+\mu)^k . \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$. ■

✯ Cas de n variables

Définition V.4 Soit $(X_1,\dots,X_n)$ une famille de n VAD, on dit que ces variables sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega),\ p\Big(\bigcap_{i=1}^{n} X_i = x_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i = x_i)$$

Elles sont indépendantes deux à deux si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$

R Lorsqu'on ne précise pas, c'est l'indépendance mutuelle qui est utilisée.

Proposition V.4 Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables mutuellement indépendantes.
Alors :

- Soit $i_1,\dots,i_p \in [\![1,n]\!]$, alors les var $(X_{i_1},\dots,X_{i_p})$ sont indépendantes, *i.e. lorsqu'on choisit des variables aléatoires dans un vecteur de var indépendantes alors les var obtenues sont indépendantes.* En particulier l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux
- LEMME DES COALITIONS Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur :

$$X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times \dots X_p(\Omega), \quad \text{et} \quad X_{p+1}(\Omega)\times X_{p+2}(\Omega)\times \dots X_n(\Omega),$$

  alors $f(X_1,X_2\dots,X_p)$ et $g(X_{p+1},X_{p+2},\dots X_n)$ sont deux var indépendantes, ainsi *si on crée une var composée avec les premières var et une autre var composé avec les dernières composantes, alors on obtient deux var indépendantes*
- Si $f_1,\dots f_p$ sont des fonctions définies sur $X_i(\Omega)$, alors on a :

$$f_1(X_i),\ f_2(X_2),\dots,f_p(X_p) \text{ sont indépendantes.}$$

⋆ Cas d'une suite de variables

On se ramène au cas d'une famille finie de variables aléatoires

Définition V.5 Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de VAD, on dit que ces variables sont mutuellement indépendantes si pour tout partie J finie de $\mathbb{N}$, on a $(X_i)_{i\in J}$ est une famille (finie) de variables indépendantes.

Elles sont indépendantes deux à deux si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ i \neq j \implies X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$

On a le même résultat que pour les familles : si on extrait de la suite de VAR indépendantes des VAR alors elles sont indépendantes.
En particulier, un tirage infini de P/F est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p et indépendante.

Définition V.6 On parle de suite de variables indépendantes identiquement distribuée (souvent noté suites de variables i.i.d.) lorsque les variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ont toutes la même loi et sont indépendantes

■ **Exemple V.1** Pour un tirage P/F infini, la suite de variables (X_i) avec $X_i = 1$ si pile au tirage i sont i.i.d. ■

V.3 Espérance

Proposition V.5 Soit $(X_1,\dots,X_n)$ une famille de n variables aléatoires discrètes d'espérance finie.

La variable $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est alors d'espérance finie et :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Démonstration. On l'a vu pour deux variables, il suffit de généraliser par récurrence. ■

Proposition V.6 Soient (X,Y) deux variables aléatoires discrètes et f une fonction de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $f(X,Y)$ est une VARD.

Alors $f(X,Y)$ est d'espérance finie si la série

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} f(x,y)p(X=x\cap Y=y) \text{ est absolument convergente}$$

dans ce cas :

$$E(f(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} f(x,y)p(X=x\cap Y=y)$$

En particulier : la VARD XY admet une espérance si et seulement si la série :

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp(X=x\cap Y=y) \text{ est absolument convergente}$$

dans ce cas :

$$E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp(X=x\cap Y=y)$$

R La série : $\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyp(X=x\cap Y=y)$ est indéxée sur deux indices, mais comme $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ est dénombrable (et que la série est absolument convergente), on peut se ramener à un seul indice.

Du fait de cette difficulté technique, le résultat ci-dessus est à la limite du programme.

Proposition V.7 Soit (X,Y) un couple de VARD indépendante.

On a alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Si on a $(X_i)_{i\in[1,n]}$ une famille de n variables indépendantes, alors on a :

$$E(X_1\dots X_n) = E(X_1)\dots E(X_n)$$

Démonstration. Admis. ■

V.4 Covariance

On reprends exactement ce qui a été vu pour les variables aléatoires finies. La seule différence est qu'il faut vérifier que les variables admettent des moments d'ordre 2.

Définition V.7 — Covariance. Soient (X,Y) un couple de VARD qui admettent un moment d'ordre 2. on appelle covariance le nombre :

$$Cov(X,Y) = E\Big([X-E(X)][Y-E(Y)]\Big)$$

Ce nombre est aussi égal à :

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Démonstration. Pour l'existence, il faut utiliser $xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$:

$$\begin{aligned} E(XY) = & \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} xyp(X=x\cap Y=y) \\ \leqslant & \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} x^2p(X=x\cap Y=y) + \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} y^2p(X=x\cap Y=y) \\ \leqslant & E(X^2)+E(Y^2) \end{aligned}$$

Ainsi, la VARD XY admet une espérance.

L'égalité se démontre alors exactement comme dans le cas fini.

■

On a les propriétés suivantes pour la covariance :

Proposition V.8 On voit :
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$,
- $Cov(\lambda X + X', Y) = \lambda Cov(X,Y) + Cov(X',Y)$, on a donc linéarité par rapport à X,
- $Cov(X, Y+\mu Y') = Cov(X,Y) + \mu Cov(X,Y')$, de même pour Y
- $Cov(X,X) = V(X) \geqslant 0$.
- $V(X+Y) = V(X) + 2Cov(X,Y) + V(Y)$.

Proposition V.9 Si deux VAD X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X,Y) = 0$. La réciproque est fausse.

☆ Coefficient de régression linéaire

On retouve encore exactement le même résultat que dans le cas des variables aléatoires finies :

Proposition V.10 — Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les couples de VARs. Soit (X,Y) un couple de VARD sur Ω, qui admettent un moment d'ordre 2 et d'écart type non nul(*i.e.* non certaine), on a alors :

$$|Cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

Ainsi, la covariance de deux variables aléatoires est bornée par le produit de leur écart type.

L'égalité a lieu si et seulement si $\exists(a,b) \in \mathbb{R},\ Y = aX + b$. (sauf pour des valeurs de probabilités nulles).

C'est la même démonstration que dans le cas fini et il faut la connaître ! (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Démonstration. Soit X et Y deux variables aléatoires, d'écart type non nul. Et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ V(\lambda X + Y) \geqslant 0$$

Ce qui s'écrit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2 V(X) + 2\lambda Cov(X,Y) + V(Y) \geqslant 0$$

ou encore : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geqslant 0$.

Où $P(\lambda)$ est le polynôme : $\lambda^2 V(X) + 2\lambda Cov(X,Y) + V(Y)$, de degré 2, car $V(X) \neq 0$.

On a donc :$\Delta \leqslant 0$ ce qui s'écrit :

$$4Cov(X,Y)^2 - 4V(X)V(Y) \leqslant 0$$

soit $Cov(X,Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$

au final :$|Cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.

Ce qui est bien l'inégalité à laquelle on voulait arriver.

Regardons maintenant le cas d'égalité :

$$\begin{aligned}
|Cov(X,Y)| = \sigma(X)\sigma(Y) &\iff \Delta = 0 \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R},\ P(\lambda_0) = 0 \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R},\ V(\lambda_0 X + Y) = 0 \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R},\ \lambda_0 X + Y \text{ est une var quasi certaine} \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \exists \mu \in \mathbb{R}, p(\lambda_0 X + Y = \mu) = 1. \\
&\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R},\ Y = aX + b.
\end{aligned}$$

Les deux dernières équivalence sont à comprendre dans le sens sauf sur un ensemble de probabilité nulle.

■

Par exemple cela permet de montrer que si X est proche d'une constante (écart-type petit), alors quelque soit Y, X et Y ont tendance à être décoréllée, comme si X et Y étaient indépendante.

Définition V.8 — VAR corrélées VAR décorélées. Soient (X,Y) deux VARD, qui admettentun moment d'ordre 2.

On dit que X et Y sont corrélées si $Cov(X,Y) \neq 0$, dans le cas contraire elles sont dite décoréllées (ou non corrélées).

On appelle coefficient de corrélation, le nombre :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

! $\rho(X,Y)$ n'est défini que si X et Y sont d'écart type non nul.

✎ $\rho(X,Y)$ exprime la dépendance des deux variables, ramené à leur écart type. C'est un nombre compris entre -1 et 1, qui vaut 0 si les var sont indépendante (minimum de dépendance), et qui vaut 1 ou -1 ssi $\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $X = aY + b$, autrement dit dans le cas d'un maximum de dépendance.

⋆ Variance d'une somme

On retrouve les propriétés vues dans le cas de variables finies.

Proposition V.11 — Variance de la somme cas de VAR indépendantes. Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables mutuellement indépendantes qui admettent un moment d'ordre 2.

On a alors :

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$$

R Il suffit en fait d'avoir des variables aléatoire indépendantes deux à deux, comme le montre le résultat suivant.

Proposition V.12 — Variance de la somme cas général. Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires réelles qui admettent un moment d'ordre 2.

On a alors pour deux variables :

$$V(X_1+X_2) = V(X_1)+2Cov(X_1,X_2)+V(X_2)$$

pour trois variables :

$$\begin{aligned} V(X_1+X_2+X_3) = & V(X_1)+V(X_2)+V(X_3) \\ & +2Cov(X_1,X_2)+2Cov(X_1,X_3)+2Cov(X_2,X_3) \end{aligned}$$

et pour n variables :

$$\begin{aligned} V(X_1+\cdots+X_n) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Cov(X_i,X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum_{i\neq j} Cov(X_i,X_j) \\ &= \sum_{(i,j)} Cov(X_i,X_j) \end{aligned}$$

On a déjà commenté ces formules qu'il faut bien avoir compris et savoir les utiliser comme dans le cas de variables aléatoires finies.
En particulier, bien comprendre que l'on sommes les valeurs

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} Cov(X_i,X_j)$$

Il est intéressant de construire le tableau des valeurs $Cov(X_i,X_j)$.

VI Résultats asymptotiques

VI.1 Convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson

On s'intéresse maintenant au problème suivant :

Proposition VI.1 On considère une suite de variable aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $X_n \sim \mathscr{B}(n,p_n)$ où (p_n) est une suite de réels. On suppose de plus que la suite (np_n) converge et on note : $\lambda = \lim\limits_{n\infty} np_n$. Le réel λ est donc positif.

On a alors :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \lim_{n\infty} p(X_n=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Ainsi, la suite de variable aléatoire « converge » vers une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson.

R Cette notion est précisément la notion de convergence en loi qui est hors-programme.

Si $\lambda = 0$, c'est une loi certaine (cas dégénéré) de la loi de Poisson.

Démonstration. On sait pour k fixé :

$$\begin{aligned}
p(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{k!} n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{k!} (np_n)^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{k!} (\lambda)^k (1-p_n)^{n-k}
\end{aligned}$$

On a de plus :

$$(1-p_n)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln(1-p_n)\right)$$

comme (np_n) converge, on a nécessairement $p_n \to 0$ et donc :

$$\ln(1-p_n) \underset{n\infty}{\sim} -p_n$$

ainsi :

$$(1-p_n)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln(1-p_n)\right) = \exp\left(n\ln(1-p_n)\right)\exp\left(-k\ln(1-p_n)\right)$$

Comme

$$n\ln(1-p_n) \underset{n\infty}{\sim} -np_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} -\lambda$$

on a par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n\infty} \exp\left(n\ln(1-p_n)\right) = e^{-\lambda}$$

D'autre part :

$$\lim_{n\infty} -k\ln(1-p_n) = 0 \text{ donc } \lim_{n\infty} \exp\left(-k\ln(1-p_n)\right) = 1.$$

Par produit de limite, on obtient :

$$\lim_{n\infty} (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}$$

Au final :

$$p(X_n = k) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{k!}(\lambda)^k e^{-\lambda} \underset{n\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

On obtient bien le résultat. ■

✯ **Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares**

La loi de Poisson s'interprète ainsi : c'est la loi des événements rares et sans mémoire dans un intervalle de temps donné. Par exemple, les voitures arrivant à un péage :

- on considère que l'événement « une voiture arrive » est ponctuel, il ne dure pas.
- On suppose que l'on connaît la moyenne λ du nombre de voitures arrivant au péage.
- Les arrivées sont indépendantes.
- La probabilité qu'une voiture arrive dans un petit intervalle de temps Δt est proportionnel à Δt.

Le lien avec la loi binomiale est la suivante : on observe le nombre de voitures arrivant au péage durant l'intervalle de temps $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on discrétise l'intervalle $[0,1]$ en $n+1$ parties de taille $\frac{1}{n}$. On a donc à n fixé :

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

Pour tout $\in [\![0, n-1]\!]$ La probabilité qu'une voiture arrive dans l'intervalle $I_i = [t_i, t_{i+1}[$ suit une loi bernouilli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On suppose que l'intervalle de temps est suffisamment petit (ie n suffisamment grand) pour qu'il n'y ait jamais Ainsi, le nombre X_n de voitures arrivant dans l'intervalle de temps $[0,1]$ vérifie alors : $X_n \sim \mathscr{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Lorsque n tends vers $+\infty$ (ie le pas de discrétisation tends vers 0), alors le nombre de voiture arrivant dans l'intervalle de temps $[0,1]$ suit une loi de Poisson de paramètre λ.

R Il s'agit d'une modélisation plus « physique » que mathématiques, dans le sens où l'énoncé affirmera qu'une variable suit une loi de Poisson ou demandera de montrer par le calcul qu'une variable suit une loi de Poisson.

Il n'est normalement pas attendu de prendre l'initiative d'affirmer que telle variable suit la loi de Poisson. Sauf si la question concerne les résultats asymptotiques.

VI.2 Loi faible des grands nombres

Proposition VI.2 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on note :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad m = E(x_1) \qquad \sigma = \sigma(X_1)$$

On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ p\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

En particulier :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

L'hypothèse exacte est « deux à deux indépendantes » dans les faits, on a souvent l'hypothèse plus forte de variables mutuellement indépendante.

Cette proposition mesure l'écart entre la moyenne mesurée sur n valeurs (la valeur de $\frac{S_n}{n}$) et la vraie moyenne.
La probabilité que la moyenne mesurée sur n valeurs s'éloigne de la moyenne de ε tends vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$ à la vitesse de $\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. En particulier, plus l'écart-type est petit, plus les moyennes mesurées vont être proche de la vraie moyenne.
Cette inégalité n'a d'intérêt que si $n\varepsilon^2 > \sigma^2$.

Démonstration. Soit donc n et considérons la variable $Y = \frac{1}{n}S_n$.
On a clairement $E(Y) = m$ et :

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) && \text{par indépendance 2 à 2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$p\left(|Y - E(Y)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}$$

ce qui s'écrit :

$$p\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

■

Variables aléatoires discrètes

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Exercices théoriques

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ toutes définies sur le même univers Ω muni d'une tribu $\mathscr{A}$.

On définit une fonction Y sur Ω par :

$$\forall w \in \Omega,\ Y(w) = X_{N(w)}(w)$$

Montrer que Y est une variable aléatoire discrète.

Commentaire : l'un des rares exercices où l'on peut demander de démontrer qu'une fonction est une variable aléatoire discrètes.

Il faut bien comprendre l'énoncé : pour un tirage $w \in \Omega$, on va prendre la variable numéro $N(w)$ et on va renvoyer sa valeur.

On a donc une expérience aléatoire en deux étapes.

Correction : Déjà $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Donc l'univers image est dénombrable.

Considérons $k \in \mathbb{N}$, il sagit de vérifier que $(Y = k) = Y^{-1}k$ est dans la tribu $\mathscr{A}$. Mais :

$$\begin{aligned}(Y = k) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Y = k) \cap (N = n)\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n = k) \cap (N = n)\end{aligned}$$

c'est une union dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$.

Exercice 2 Soient X une variable aléatoire discrète sur Ω et f une application définie sur $X(\Omega)$. À quelle condition les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Correction : Supposons que X et $f(X)$ sont indépendantes et montrons que f est constante.

Considérons $y \in f(X(\omega))$ et montrons que $p(f = y) = 1$.

✯ Généralités

Exercice 3 Dans une boîte on a mis une boule jaune, 2 vertes et 2 grises. On prend successivement, indéfiniment et avec remise des boules.

On note J « le rang d'apparition de la 1ère jaune », et V « le rang d'apparition de la 1ère verte ».

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $p(J = k | V > k)$.
2. En déduire $p(J < V)$.

Correction :

1. Soit donc $k \in \mathbb{N}^*$.

   On sait que $V > k$, et donc les tirages 1 à k n'ont jamais donné de vertes. ainsi,

   $$p_{V>k}(J = k) = p_{V>k}(g_1 \cap \cdots \cap g_{k-1} \cap j_k)$$

   avec des notations évidentes.

   On peut donc écrire par indépendance :

   $$\begin{aligned}p_{V>k}(J = k) &= p_{V>k}(g_1)p_{V>k}(g_{k-1})p_{V>k}(j_k)\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Méthode 2 : on peut calculer $p(V > k \cap J = k)$:

$$\begin{aligned} p(V > k \cap J = k) =& p(G_1 \cap \cdots \cap G_{k-1} \cap J_k) \\ =& \frac{2}{5}^{k-1} \frac{1}{5} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} p(V > k) =& p(\overline{V_1} \cap \cdots \cap \overline{V_k}) \\ =& \frac{3}{5}^{k} \end{aligned}$$

2. On applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(J < V) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p\left(J < V \cap J = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p\left(J = k \cap k < V\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(V > k) p\left(J = k | k < V\right) \end{aligned}$$

On a vu : $p\left(J = k | k < V\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}$. D'autre par :

$$p(V > k) = p\left(\overline{v_1} \cap \cdots \cap \overline{v_k}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{k}$$

On peut donc continuer le calcul :

$$\begin{aligned} p(J < V) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(V > k) p\left(J = k | k < V\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

C'est une série géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $\frac{1}{5}$. Ainsi :

$$p(J < V) = \frac{1}{3}$$

Exercice 4 Un concierge cherche la clef qui ouvre sa porte. Comme il fait nuit il essaye une à une chaque clef de son trousseau qui en contient n ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Déterminer le nombre moyen d'essais nécessaires à l'obtention de la bonne clef, sachant qu'après chaque essai infructueux il écarte la clef utilisée.
2. On suppose de plus qu'il revient d'un dîner bien arrosé, et qu'il en oublie d'écarter la clef utilisée après chaque essai. Déterminer une fois encore le nombre moyen d'essais nécessaires pour qu'il ouvre sa porte et comparer avec la question précédente.

Correction :

1. On note :
   - pour $i \in \mathbb{N}^*$, S_i l'événement : « le i-ième essai est réussi ».
   - X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires.

   On a $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$(X = k) = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k.$$

Or, à l'essai i, sachant que les $i-1$ essais précédents ont échoué, il y a $n+1-i$ clés non testées dont une seule est la bonne. On en déduit avec les probabilités composées que :

$$\begin{aligned} p(X=k) &= \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n+1-k}}{\cancel{n+2-k}} \times \frac{1}{\cancel{n+1-k}} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p(X=k)=\frac{1}{n}$, et X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, ce que l'on écrit : $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.
En particulier, on en déduit que $E(X)=\frac{n+1}{2}$.
En conclusion, le nombre moyen d'essais nécessaires est $\frac{n+1}{2}$.
Une autre modélisation donne ce résultat sans calcul : on mélange par avance toutes les clés dans un ordre aléatoire, en choisissant le première clé testée, la deuxième, etc. Le nombre d'essais nécessaires est alors la position de la bonne clé. Comme toutes les positions sont équiprobables, on a $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

2. Si la clé utilisée n'est pas écartée, alors les essais sont indépendants et la probabilité qu'un essai réussisse est $\frac{1}{n}$, puisqu'il y a toujours n clés possibles dont une seule est la bonne.
On reconnaît alors la loi du premier succès d'un schéma de Bernoulli de paramètre, la probabilité de réussite $p=\frac{1}{n}$.
La variable aléatoire X (définie ci-dessus) suit alors une loi géométrique :

$$X(\Omega)=\mathbb{N}^* \text{ et } X \sim \mathscr{G}(p).$$

On en déduit en particulier que

$$E(X)=\frac{1}{p}=n.$$

Ainsi, dans ce cas, le nombre moyen d'essais nécessaires est n, ce qui est évidemment supérieur au cas précédent.

Exercice 5 On dispose d'une infinité d'urnes numérotées, de telle sorte que l'urne numéro k soit constituée de 2^k boules dont une seule blanche ($k \in \mathbb{N}^*$). On suppose de plus que la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie, suit une loi géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

Correction : On note B l'événement avoir une boule blanche, et U la variable aléatoire réelle égale au numéro de l'urne choisie. D'après l'énoncé on a :

- la variable aléatoire U suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, *i.e.* $U \sim \mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $p_{U=k}(B)=\dfrac{1}{2^k}$, puisque l'urne k contient 2^k boules dont une seule blanche.

En utilisant le système complet d'événements associé à la variable aléatoire U, on obtient :

$$\begin{aligned} p(B) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(B \cap U=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(U=k) p_{U=k}(B) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Au final la probabilité d'avoir une blanche est de $\frac{1}{3}$.

Exercice 6 On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce :
- si on obtient « Face » on ajoute une boule noire dans l'urne ;
- si on obtient « Pile » on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.

Dans cet exercice, on admettra que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{n>0} \frac{x^n}{n}$ converge vers $-\ln(1-x)$.

1. On note X la variable aléatoire égale au numéro du lancer où on arrête l'expérience. Déterminer la loi de X. Calculer la probabilité de l'événement, noté $(X<+\infty)$, que l'expérience s'arrête.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Correction :

1. La variable aléatoire X correspond à la loi du premier succès :
   - les tirages de la pièce sont indépendants et de probabilité de succès (ici avoir « Pile ») est de $\frac{1}{2}$, on a donc un schéma de Bernoulli,
   - le numéro du lancer où on arrête l'expérience correspond au rang du premier succès (du premier « Pile »).

   Ainsi, $X \sim \mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$, la loi de X est donc :

   $$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ p(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

   Calculons alors $p(X < +\infty)$.
   Cette probabilité est la probabilité que l'expérience s'arrête. Intuitivement, il s'agit d'un événement certain et donc $p(X < +\infty) = 1$. *Notons aussi qu'il s'agit de la série* $\sum_{x \in X(\Omega)} p(X = x)$, *qui est donc égale à* 1. *On vérifie ce résultat par le calcul.*
   On a :

   $$\begin{aligned} p(X < +\infty) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p(X = k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

   En conclusion, l'événement $\left(X < +\infty\right)$ est certain.

2. On note B l'événement avoir une boule blanche, et on utilise le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X. Cela donne :

   $$\begin{aligned} p(B) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p(B \cap X = k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p(X = k) p_{X=k}(B) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

   En effet, sachant $\left(X = k\right)$, l'urne contient k boules dont une seule blanche.
   On utilise alors le résultat :

   $$\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{x^k}{k} = -\ln(1 - x),$$

   pour $x = \frac{1}{2}$, ce qui donne :

   $$\begin{aligned} p(B) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k} \\ &= -\ln(1 - \frac{1}{2}) = \ln(2). \end{aligned}$$

   Ainsi, la probabilité d'obtenir une boule blanche est de $\ln(2)$.

Exercice 7 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $p(X=Y)$ puis $P(X<Y)$.
2. Donner la loi de la variable aléatoire $X+Y$.
3. Donner la loi de $\max(X,Y)$ et la loi de $X-Y$.

Correction :

1. On utilise le SCE associé à X :

$$\begin{aligned}
p(X=Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(X=k \cap Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p(X=k)p(Y=k) && \text{par indépendance} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} p^2 \\
&= p^2 \frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

On a :

$$1 = p(X=Y)+p(X>Y)+p(X<Y) = p(X=Y)+2p(X<Y) \text{ par symétrie}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
p(X<Y) &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{p}{1+q}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1+q-p}{1+q} = \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned}
p(X<Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(k<Y \cap X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p(k<Y)p(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} q^k q^{k-1} p \\
&= pq\frac{1}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

2. On a $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, et pour $k \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
p(X+Y=k) &= \sum_{l=1}^{+\infty} p(X=l \cap Y=k-l) \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} p(X=l)p(Y=k-l) \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} q^{l-1} p q^{k-l-1} p \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} q^{k-2} p^2 \\
&= (k-1)q^{k-2}p^2
\end{aligned}$$

3. Soit $k \geqslant 1$, on a :

$$(\max(X,Y) \leqslant k) = (X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)$$

D'où :

$$\begin{aligned} p(\max(X,Y) \leqslant k) &= p(X \leqslant k)p(Y \leqslant k) && \text{par indépendance} \\ &= (1-p(X>k))(1-p(Y>k)) \\ &= \left(1-q^k\right)^2 \end{aligned}$$

On applique ensuite pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$(\max(X,Y) \leqslant k) = (\max(X,Y) = k) \cup (\max(X,Y) \leqslant k-1)$$

et donc si $k \geqslant 2$, on peut remplacer :

$$\begin{aligned} p(\max(X,Y) = k) &= (\max(X,Y) \leqslant k) - (\max(X,Y) \leqslant k-1) \\ &= \left(1-q^k\right)^2 - \left(1-q^{k-1}\right)^2 \end{aligned}$$

Il faut vérifier le domaine de validité de cette formule (termes extremaux). C'est encore vrai pour $k = 1$.
Pour la différence, on a $(X-Y)(\Omega) = \mathbb{Z}$.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, on utilise le SCE associé à X :

$$p(X-Y=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(X=i)p(Y=i-k)$$

les termes nuls sont quand $i-k \leqslant 0$, ie $i \leqslant k$. Il faut donc $i \geqslant k+1$ et $i \geqslant 1$.
On a alors deux cas : cas $k \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} p(X-Y=k) &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1}pq^{i-k-1} \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p^2q^{2i-k-2} \\ &= p^2q^k\frac{1}{1-q^2} = \frac{pq^k}{1+q} \end{aligned}$$

et cas $k < 0$, alors :

$$\begin{aligned} p(X-Y=k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} pq^{i-1}pq^{i-k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^2q^{2i-k-2} \\ &= p^2q^{-k}\frac{1}{1-q^2} = \frac{pq^{-k}}{1+q} \end{aligned}$$

Exercice 8 On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p(X=n) = \frac{4}{n}p(X=n-1)$$

Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance (si elles existent).

Correction : Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = p(X=n).$$

On a les contraintes :

- ⋆ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
- ⋆ La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et on a : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = 1$.

$\star$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{4}{n}u_{n-1}$ d'après la relation $p(X=n) = \frac{4}{n}p(X=n-1)$.

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\mathscr{P}_n : \qquad u_n = \frac{4^n}{n!}u_0.$$

L'initialisation est évidente car si $n=0$, on a $\frac{4^n}{n!} = 1$.

Pour l'hérédité, considérons $n \in \mathbb{N}$ fixé, tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{4}{n+1}u_n \\ &= \frac{4}{n+1}\frac{4^n}{n!}u_0 \\ &= \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}u_0. \end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(X=n) = u_n = \frac{4^n}{n!}u_0.$$

Pour déterminer la loi de X, il reste alors à calculer la valeur de u_0. Pour cela, on considère $N \in \mathbb{N}$, et on calcule la somme partielle :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} u_k &= \sum_{k=0}^{N} \frac{4^k}{k!}u_0 \\ &= u_0 \sum_{k=0}^{N} \frac{4^k}{k!} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} u_0 e^4. \end{aligned}$$

Comme on a la contrainte $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k = 1$, on en déduit $u_0 = e^{-4}$.

Au final, on a donc obtenu la loi de X :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(X=n) = e^{-4}\frac{4^n}{n!},$$

on voit donc que X suit la loi de Poisson de paramètre 4, ce que l'on écrit : $X \sim \mathscr{P}(4)$.

En particulier, on connaît son espérance : $E(X) = 4$, et sa variance : $var(X) = 4$.

Exercice 9 On suppose que dans la mémoire d'un smartphone, le nombre de faux 0 (c'est-à-dire de bits qui devraient être égaux à 1) suit une loi de Poisson de paramètre λ_1, et que le nombre de faux 1 (c'est-à-dire de bits qui devraient être égaux à 0) suit une loi de Poisson de paramètre λ_2. On suppose aussi que ces deux phénomènes sont indépendants.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire égale au nombre total d'erreurs de bits ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la loi du nombre de faux 0 sachant que n erreurs ont été commises.

Correction :

1. On note :
   - X la variable aléatoire égale au nombre de faux 0,
   - Y la variable aléatoire égale au nombre de faux 1,
   - et E la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs de bits.

   On a alors les relations :

   $$X \sim \mathscr{P}(\lambda_1) \qquad Y \sim \mathscr{P}(\lambda_2) \qquad E = X+Y,$$

   et les variables X et Y sont indépendantes.

   La variable E est une somme de variables indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2, ainsi, E suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$, ainsi, on a :

   $$E \sim \mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2).$$

Démonstration à savoir refaire ! ! Le résultat doit être connu mais est hors programme.

On a clairement $E(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour $k \in \mathbb{N}$, on utilise le système complet d'événements associé à X :

$$p(E = n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p(X = k \cap E = n) = \sum_{k=0}^{n} p(X = k \cap E = n).$$

En effet, si $E = n$ on a nécessairement $\Big(X \leqslant n\Big)$. De plus, comme $E = X + Y$, on a :

$$\begin{aligned}
p(E = n) &= \sum_{k=0}^{n} p(X = k \cap E = n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} p(X = k \cap Y = n - k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} p(X = k) p(Y = n - k) \qquad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

On fait alors apparaître le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
p(E = n) &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Au final, on a donc obtenu :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(E = n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!},$$

ce qui donne le résultat.

2. Le problème est de déterminer la loi de X sachant l'événement $E = n$. Déjà il est clair que si $k > n$, $p_{E=n}(X = k) = 0$. Considérons maintenant $k \leqslant n$, on utilise alors la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
p_{E=n}(X = k) &= \frac{p(X = k \cap E = n)}{p(E = n)} \\
&= \frac{p(X = k) p_{X=k}(E = n)}{p(E = n)} \\
&= \frac{p(X = k) p_{X=k}(Y = n - k)}{p(E = n)}.
\end{aligned}$$

En effet, sachant l'événement $X = k$, l'événement $E = n$ est l'événement $Y = n - k$. Par indépendance des variables X et Y, cela donne :

$$\begin{aligned}
p_{E=n}(X = k) &= \frac{p(X = k) p(Y = n - k)}{p(E = n)} \\
&= e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!}\ e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\ \frac{n!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\
&= \binom{n}{k} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}.
\end{aligned}$$

Ainsi, sachant que n erreurs ont été commises, le nombre de faux 0 est :

$$p_{E=n}(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut écrire que sachant que n erreurs ont été commises, le nombre de faux 0 suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$.

Exercice 10 Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p(X=k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}$$

où $p > 0$ est le prix de la dernière campagne publicitaire.

1. Vérifier qu'on définit bien une loi de probabilité pour X.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.
3. Connaissant son stock s, déterminer la probabilité de rupture de stock.

Correction :

1. Il s'agit de vérifier les contraintes :
   - ⋆ $\forall k \in \mathbb{N}$, $p(X=k) \geqslant 0$,
   - ⋆ La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=k)$ converge et est égale à 1.

   Pour la première contrainte, on a clairement $p(X=k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}} \geqslant 0$, car $p > 0$. Ainsi, la première contrainte est bien vérifiée.
   Considérons maintenant $N \in \mathbb{N}$, et calculons la limite de la somme partielle :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} p(X=k) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1+p}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{p}{1+p}\right)^k \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1+p}\frac{1}{1-\frac{p}{1+p}}\end{aligned}$$

   En effet, on a $p > 0$, donc $p < p+1$, ce qui donne $\left|\frac{p}{1+p}\right| < 1$. On peut alors utiliser la série géométrique.
   La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=k)$ converge donc, et il ne reste plus qu'à simplifier son expression :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=k) = \frac{1}{1+p}\frac{1}{1-\frac{p}{1+p}} = 1.$$

   On a donc bien les deux conditions. On en déduit que la variable aléatoire X est bien définie.
   Remarquons que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ p(X=k) &= \frac{1}{1+p}\left(\frac{p}{1+p}\right)^k \\ &= \frac{1}{1+p}\left(1-\frac{1}{1+p}\right)^k,\end{aligned}$$

   ainsi, on voit que X suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $\frac{1}{1+p}$:

$$X \sim \mathscr{G}_{\mathbb{N}}\left(\frac{1}{1+p}\right)$$

   on a alors directement la réponse à cette question ainsi qu'à la suivante.
2. On calcule la somme partielle pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} kp(X=k) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{kp^k}{(1+p)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1+p}\sum_{k=0}^{N} k\left(\frac{p}{1+p}\right)^k.\end{aligned}$$

On utilise alors le résultat sur les séries usuelles :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k\in\mathbb{N}} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Comme on l'a vu à la question précédente, on a $\left|\frac{p}{p+1}\right| < 1$, on peut donc utiliser ce résultat, qui donne

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} kp(X=k) = \frac{1}{1+p}\frac{\frac{p}{1+p}}{\left(1-\frac{p}{1+p}\right)^2} = p.$$

Ainsi, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} kp(X=k)$ converge, comme il s'agit d'une somme de termes positifs, on en déduit qu'elle converge absolument et donc X admet une espérance. De plus, on a la valeur de cette espérance :

$$E(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} kp(X=k) = p.$$

On retrouve le résultat attendu puisque $X \sim \mathscr{G}_{\mathbb{N}}\left(\frac{1}{1+p}\right)$, et donc :

$$E(X) = \frac{1-\frac{1}{1+p}}{\frac{1}{1+p}} = p.$$

Pour la variance, on commence par montrer que X admet un moment d'ordre 2, *i.e.* que $E(X^2)$ existe. Pour cela, on considère la somme partielle d'ordre N

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} k^2 p(X=k) &= \sum_{k=0}^{N}\frac{k^2p^k}{(1+p)^{k+1}}\\ &= \frac{1}{1+p}\sum_{k=0}^{N} k^2\left(\frac{p}{1+p}\right)^k.\end{aligned}$$

On utilise ici aussi une série usuelle :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2x^k = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

que l'on utilise toujours avec $x = \frac{p}{1+p}$, qui est bien un réel de $]-1,1[$. Cela donne :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} k^2 p(X=k) = \frac{1}{1+p}\frac{\frac{p}{1+p}+\left(\frac{p}{1+p}\right)^2}{\left(1-\frac{p}{1+p}\right)^3}.$$

On en déduit que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 p(X=k)$ converge (absolument puisqu'il s'agit de termes positifs). Ainsi, X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.
Pour déterminer $E\left(X^2\right)$, on simplifie cette expression. On a :

$$\left(1-\frac{p}{1+p}\right)^3 = \frac{1}{(1+p)^3},$$

et

$$\frac{p}{1+p}+\left(\frac{p}{1+p}\right)^2 = \frac{1}{(1+p)^2}\left(2p^2+p\right).$$

On en déduit :

$$E\left(X^2\right) = 2p^2+p.$$

Ce qui donne en utilisant la propriété de Koenig-Huyghens :

$$\begin{aligned} var(X) =& E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\ =& 2p^2 + p - p^2 = p^2 + p = p(1+p). \end{aligned}$$

En conclusion, on a donc :

$$var(X) = p(1+p).$$

On retrouve ici encore, le résultat attendu puisque $X \sim \mathscr{G}_{\mathbb{N}}\left(\frac{1}{1+p}\right)$, *et donc*

$$V(X) = \frac{1 - \frac{1}{1+p}}{\left(\frac{1}{1+p}\right)^2} = \frac{p}{1+p} \times (1+p)^2 = p(1+p).$$

3. Il y rupture de stock si l'événement $\left(X > s\right)$ est réalisé.
   Calculons la probabilité du complémentaire :

$$\begin{aligned} p(\overline{X > s}) = p(X \leqslant s) =& \sum_{k=0}^{s} p(X = k) \\ =& \sum_{k=0}^{s} \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}} \\ =& \frac{1}{1+p} \sum_{k=0}^{s} \left(\frac{p}{1+p}\right)^k \end{aligned}$$

   On reconnaît la somme des s premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{p}{1+p} \neq 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(\overline{X > s}) =& \frac{1}{1+p} \frac{1 - \left(\frac{p}{1+p}\right)^{s+1}}{1 - \left(\frac{p}{1+p}\right)} \\ =& 1 - \left(\frac{p}{1+p}\right)^{s+1}. \end{aligned}$$

   On en déduit que

$$p(X > s) = 1 - p(X \leqslant s) = \left(\frac{p}{1+p}\right)^{s+1}.$$

   La probabilité de rupture de stock est donc $\left(\frac{p}{1+p}\right)^{s+1}$.

Exercice 11 Le nombre de blessé à l'oeil par un bouchon de champagne arrivant aux urgences ophtalmologiques la nuit du réveillon suit une loi de Poisson de paramètre λ. Sachant que les victimes sont réparties équitablement entre les deux sexes, on note X le nombre de femmes qui figurent parmi ces éborgnés et Y le nombre d'hommes.

1. Déterminez les lois de probabilité de X et Y, ainsi que leur espérance et variance (si elles existent).
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculez la probabilité pour qu'il y ait autant d'hommes que de femmes admis aux urgences.

Correction :

1. Notons V le nombre de victimes, les conditions de l'expérience assurent que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad X + Y = V.$$

   Considérons alors $k \in \mathbb{N}$, et on calcule $p(X = k)$, en utilisant le système complet d'événements associé à V. Cela donne :

$$\begin{aligned} p(X = k) =& \sum_{n \in \mathbb{N}} p(X = k \cap V = n) \\ =& \sum_{n \geqslant k} p(X = k \cap V = n). \end{aligned}$$

En effet, l'événement $\left(X=k\cap V=n\right)$ est impossible si $k<n$. On utilise alors les probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned}p(X=k)&=\sum_{n\geqslant k}p(X=k\cap V=n)\\&=\sum_{n\geqslant k}p(V=n)p_{V=n}(X=k).\end{aligned}$$

Sachant que $\left(V=n\right)$, l'événement $\left(X=k\right)$ signifie « parmi les n personnes arrivant aux urgences, il y a k hommes ». Or, d'après l'énoncé, une personne sur deux se présentant aux urgences est un homme, indépendamment des autres. Le nombre d'hommes parmi ces n personnes suit donc une loi binomiale de paramètre $\left(n,\frac{1}{2}\right)$. On en déduit :

$$\forall n\geqslant k,\ p_{V=n}(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

D'autre part, $p(V=n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, cela donne :

$$\begin{aligned}p(X=k)&=\sum_{n\geqslant k}p(V=n)p_{V=n}(X=k)\\&=\sum_{n\geqslant k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant k}\frac{1}{\cancel{n!}}\frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\\&=e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k\sum_{n\geqslant k}\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

Simplifions la somme en effectuant un changement de variables dans la somme partielle pour $N\geqslant k$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-k}&=\sum_{n=0}^{N-k}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\\&\xrightarrow[N\to+\infty]{}e^{\frac{\lambda}{2}}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

On reconnaît en effet la série exponentielle.
Cela donne alors :

$$\begin{aligned}p(X=k)&=e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k e^{\frac{\lambda}{2}}\\&=e^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k.\end{aligned}$$

On reconnaît alors une loi de Poisson, $X\sim\mathscr{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. On a en particulier les valeurs de la variance et de l'espérance de la variable aléatoire X :

$$E(X)=\frac{\lambda}{2}\qquad var(X)=\frac{\lambda}{2}.$$

Puisque les hommes et les femmes ont un rôle symétrique, on en déduit que $Y\sim\mathscr{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, et que l'espérance et la variance de Y sont égales à $\frac{\lambda}{2}$.

2. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N},\ p(X=i\cap Y=j)=p(X=i)p(Y=j).$$

Considérons donc i et j deux entiers naturels, et calculons chacun des termes ci-dessus :

- l'événement $(X=i\cap Y=j)$ est l'événement $(X=i\cap V=i+j)$, où V est toujours le nombre de victimes. On a donc :

$$\begin{aligned}p(X=i\cap Y=j)&=p(V=i+j\cap X=i)\\&=p(V=i+j)p_{V=i+j}(X=i)\\&=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\binom{i+j}{i}\frac{1}{2^{i+j}}.\end{aligned}$$

En effet, comme on l'a vu à la question précédente, sachant que $(V = i+j)$, X est le nombre d'hommes parmi les $i+j$ personnes qui se présentent aux urgences, X suit donc sous cette condition une loi binomiale de paramètre $\left(i+j, \frac{1}{2}\right)$. On a donc :

$$p_{V=i+j}(X = i) = \binom{i+j}{i} \frac{1}{2^{i+j}}.$$

On simplifie alors l'expression :

$$\begin{aligned} p(X = i \cap Y = j) =& e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{\cancel{(i+j)!}} \frac{\cancel{(i+j)!}}{i!j!} \frac{1}{2^{i+j}} \\ =& e^{-\lambda} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{i+j}}{i!j!}. \end{aligned}$$

- On a montré à la question précédente que les variables X et Y suivent une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(X = i)p(Y = j) =& e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{i}}{i!} e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{j}}{j!} \\ =& e^{-\lambda} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{i+j}}{i!j!}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}$, la propriété

$$p(X = i \cap Y = j) = p(X = i)p(Y = j),$$

ce qui montre que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

3. Le problème est de calculer la probabilité de l'événement $\left(X = Y\right)$, on utilise pour cela le système complet d'événements associé à X :

$$\begin{aligned} p(X = Y) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} p(X = k \cap X = Y) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} p(X = k \cap Y = k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} p(X = k)p(Y = k) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} [p(X = k)]^2 \text{ car } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{k}}{k!} \right]^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}. \end{aligned}$$

En conclusion, on obtient donc :

$$p(X = Y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Notons que l'on peut aussi trouver ce résultat en utilisant le système complet d'événements associé au nombre de victimes V

$$p(X = Y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p(V = k \cap X = Y)$$

Or, si k est impair, l'événement $(V=k\cap X=Y)$ est impossible. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}p(X=Y)&=\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k \text{ pair}}} p(V=k\cap X=Y)\\&=\sum_{k\in\mathbb{N}} p(V=2k\cap X=Y)\end{aligned}$$

La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} p(V=k\cap X=Y)$ *converge absolument puisqu'elle est à termes positifs, donc la série des termes pairs* $\sum_{k\in\mathbb{N}} p(V=2k\cap X=Y)$ *est aussi convergente.*
On conditionne ensuite :

$$\begin{aligned}p(X=Y)&=\sum_{k\in\mathbb{N}} p(V=2k)p_{V=2k}(X=Y)\\&=\sum_{k\in\mathbb{N}} p(V=2k)p_{V=2k}(X=k),\end{aligned}$$

puis on utilise de nouveau la loi de X connaissant la valeur de V :

$$\begin{aligned}p(X=Y)&=\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\\&=e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\cancel{(2k)!}}\frac{\cancel{(2k)!}}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\\&=e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}.\end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat.

Exercice 12 Dans cet exercice, on admettra que pour tout $x\in]-1,1[$, la série $\sum_{n>0}\frac{x^n}{n}$ converge vers $-\ln(1-x)$.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telles que :

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}^*,\quad p(X=i,Y=j)=\frac{a}{i2^{i+j}}$$

où $a\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

---

1. Puisque (X,Y) est un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} p(X=i,Y=j) \text{ converge et est égale à } 1.$$

Comme la convergence de cette double série est absolue (il s'agit de termes positifs), on peut échanger l'ordre de sommation. Cela donne :

$$\begin{aligned}1=\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} p(X=i,Y=j)&=\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{a}{i2^{i+j}}\\&=\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} a\frac{2^{-i}}{i}\times 2^{-j}\\&=a\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i}{i}\times\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{2}\right)^j\end{aligned}$$

On reconnaît la série géométrique :

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{2}\right)^j &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2}\right)^j\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.\end{aligned}$$

D'autre part, on utilise le résultat :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{i\in\mathbb{N}^*}\frac{x}{i} = -\ln(1-x).$$

Cela donne pour $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i}{i} = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

On en déduit : $a\ln(2) = 1$, et donc $a = \frac{1}{\ln 2}$.
Ainsi, $a = \frac{1}{\ln(2)}$.
En conclusion, la seule valeur possible pour a est $\frac{1}{\ln(2)}$, et la loi du couple (X,Y) est :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\quad p(X=i, Y=j) = \frac{1}{\ln(2)i2^{i+j}}.$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}^*$, pour déterminer la probabilité de $X = i$, on utilise le système complet d'événements associé à Y.
On a alors :

$$\begin{aligned}p(X=i) &= \sum_{j\in\mathbb{N}^*} p(X=i, Y=j)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\ln(2)i2^{i+j}}\\ &= \frac{2^{-i}}{\ln(2)i}\underbrace{\sum_{j\in\mathbb{N}^*}2^{-j}}_{=1} = \frac{2^{-i}}{\ln(2)i}.\end{aligned}$$

On retrouve en effet la série géométrique : $\sum_{j\in\mathbb{N}^*}2^{-j}$ calculée à la question précédente.
On procède de même pour Y, en écrivant pour $j \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}p(Y=j) &= \sum_{i\in\mathbb{N}^*} p(X=i, Y=j)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\ln(2)i2^{i+j}}\\ &= \frac{2^{-j}}{\ln(2)}\underbrace{\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\frac{2^{-i}}{i}}_{=\ln(2)} = 2^{-j},\end{aligned}$$

ici encore, la série $\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\frac{2^{-i}}{i}$ a été calculée à la question précédente.
En conclusion, les lois marginales de X et Y sont :

$$\begin{aligned}\forall i \in \mathbb{N}^*,\ p(X=i) &= \frac{2^{-i}}{\ln 2 i}\\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\ p(Y=j) &= 2^{-j}.\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\forall(i,j)\in\mathbb{N}^*, p(X=i)p(Y=i) =& \frac{2^{-i}}{\ln(2)i}2^{-j}\\ =& \frac{1}{\ln(2)i2^{i+j}}\\ =& p(X=i\cap Y=j),\end{aligned}$$

ce qui montre que les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 13 On considère une suite lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et la probabilité d'obtenir "face" est $q = 1-p$ ($p \in]0,1[$). "pile" (resp. "face") sera noté en abrégé P (resp. F).

1. Soit $n > 1$. On considère l'événement A_n : "La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n." Calculer $p(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A : "La séquence PF apparaît au moins une fois".
3. Soit B l'événement : "La séquence PP apparaît sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant". Calculer $p(B)$.

Correction :

1. Une séquence de tirages ω qui réalise l'événement A_n est du type :

$$\underbrace{FF\ldots FF}_{k \text{ tirages}}\ \underbrace{PP\ldots PP}_{n-2-k \text{ tirages}}\ PF,$$

pour $k \in [\![0, n-2]\!]$.
Ainsi, l'ensemble A_n est constitué de ces $n-1$ séquences de tirages. Notons donc ω_k la séquence de tirages ci-dessus.
La probabilité de l'événement $\{\omega_k\}$ se calcule en utilisant l'indépendance des tirages, cela donne :

$$p\left(\left\{\omega_k\right\}\right) = q^k p^{n-2-k} pq = q^{k+1} p^{n-1-k}.$$

On en déduit la probabilité de l'événement A_n comme somme des probabilités des séquences qui constituent A_n :

$$\begin{aligned}p(A_n) =& \sum_{k=0}^{n-2} p\left(\left\{\omega_k\right\}\right)\\ =& \sum_{k=0}^{n-2} q^{k+1} p^{n-1-k}.\end{aligned}$$

On fait alors apparaître la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\begin{aligned}p(A_n) =& \sum_{k=0}^{n-2} q^{k+1} p^{n-1-k}\\ =& qp^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{q}{p}\right)^k.\end{aligned}$$

Considérons tout d'abord le cas $p \neq q$, et donc $\frac{p}{q} \neq 1$. Cela donne :

$$\begin{aligned}p(A_n) =& qp^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{q}{p}\right)^k\\ =& qp^{n-1}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)}\\ =& pq\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q}.\end{aligned}$$

Maintenant si $p = q$, on a alors nécessairement $p = q = \frac{1}{2}$, puisque $p+q = 1$. Le calcul est alors différent :

$$\begin{aligned}p(A_n) =& qp^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{q}{p}\right)^k = qp^{n-1}(n-1)\\ =& (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

On obtient ainsi la probabilité de l'événement A_n :

$$p(A_n) = \begin{cases} pq\dfrac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q} & \text{si } p \neq q, \\ \\ (n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{si } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pour $p \neq q$, on a :

$$\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q} = p^{n-2}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)}$$

puis lorsque $p \to \frac{1}{2}$, on a $\frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} \to 1$. On utilise alors dans la limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{n-1}}{1-x} = (n-1),$$

(cette limite est le taux d'accroissement en 1 de $x \mapsto \frac{1-x^{n-1}}{1-x}$), ce qui donne :

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}}\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q} = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

ce qui donne :

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} pq\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q} = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

L'expression de $p(A_n)$ lorsque $p = q = \frac{1}{2}$, et donc la limite de l'expression pour $p \neq q$ lorsque p tends vers $\frac{1}{2}$.

2. *Avant de faire le calcul, il est clair que cette probabilité est 1 : la séquence apparaît de manière certaine puisqu'on fait une infinité de tirages.*
   Montrons l'égalité des événements $A = \bigcup_{n\geqslant 2} A_n$.
   On a :
   - pour tout $n \geqslant 2$, $A_n \subset A$ par définition,
   - si un tirage ω vérifie A, en notant k le premier rang où la séquence PF apparaît pour la première fois, alors $k \geqslant 2$ et $\omega \in A_k$.

   De plus, l'union $\bigcup_{n\geqslant 2} A_n$ est disjointe car si $k \neq j$, aucun tirage ne peut vérifier « . La séquence PF apparaît pour la première fois au tirage k et au tirage j ».
   On en déduit donc :

$$p(A) = \sum_{k\geqslant 2} p(A_k).$$

   Calculons cette expression dans le cas $p \neq q$, cela donne :

$$\begin{aligned} p(A) &= \sum_{k\geqslant 2} pq\frac{p^{k-1}-q^{k-1}}{p-q} \\ &= \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{k\geqslant 2} p^{k-1} - \sum_{k\geqslant 2} q^{k-1}\right). \end{aligned}$$

   En effet, ces séries convergent puisque p (et donc q) est un réel de $\in]0,1[$. On peut facilement les calculer :

$$\sum_{k\geqslant 2} p^{k-1} = \sum_{k\geqslant 1} p^k = p\sum_{k\in\mathbb{N}} p^k = p\frac{1}{1-p} = \frac{p}{q}$$

et de même $\sum_{k\geqslant 2} q^{k-1} = \frac{q}{p}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
p(A) =& \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{k\geqslant 2} p^{k-1} - \sum_{k\geqslant 2} q^{k-1}\right)\\
=& \frac{pq}{p-q}\left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right)\\
=& \frac{pq}{p-q}\left(\frac{p^2-q^2}{pq}\right)\\
=& p+q = 1.
\end{aligned}$$

On a donc bien le résultat dans le cas $p \neq q$.
Traitons maintenant le cas $p = \frac{1}{2}$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
p(A) =& \sum_{k\geqslant 2} p(A_k)\\
=& \sum_{k\geqslant 2} (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
=& \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k.
\end{aligned}$$

On utilise alors la série géométrique dérivée :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k\geqslant 1} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2},$$

ce qui donne pour $x = \frac{1}{2}$:

$$p(A) = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Le résultat est donc encore vrai pour $p = q = \frac{1}{2}$.
En conclusion, on a démontré par le calcul que A est un événement certain.

3. On procède comme ci-dessus. On note pour $n \geqslant 2$ l'événement B_n. "La séquence PP apparaît pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant". L'événement B_n est constitué d'une seule séquence de tirages ω :

$$\omega = \underbrace{FF\ldots FF}_{n-2 \text{ tirages}}\ PP.$$

Ainsi $B_n = \left\{\omega\right\}$, on en déduit en utilisant l'indépendance des tirages :

$$p(B_n) = q^{n-2}p^2.$$

L'événement B est égal à l'union disjointe $\bigcup_{k\geqslant 2} B_k$. En effet :

- d'une part les B_k sont disjoints puisqu'on considère que la séquence PP apparaît pour la première fois aux tirages k et $(k-1)$,
- d'autre part,pour une séquence $\omega \in B$, en notant k le tirage où la séquence PP apparaît pour la première fois, on a $\omega \in B_k$.
- Enfin, il est clair que pour tout $k \geqslant 2$, $B_k \subset B$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
p(B) =& p\left(\bigcup_{k\geqslant 2} B_k\right)\\
=& \sum_{k\geqslant 2} p\left(B_k\right)\\
=& \sum_{k\geqslant 2} q^{k-2}p = p^2\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k = \frac{p^2}{1-q} = p.
\end{aligned}$$

On reconnaît en effet la série géométrique.
En conclusion, la probabilité de l'événement B est p.

Exercice 14 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On considère les évènements $E =$ « X est paire », et $F =$ « X est impaire ». Comparer $p(E)$ et $p(F)$.

Correction : Par définition, on a :

$$p(E) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ pair}}} p(X=k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=2k).$$

La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=k)$ *étant absolument convergente, car c'est une série à termes positifs, la série des termes pairs*

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ pair}}} p(X=k) \text{ est aussi convergente,}$$

et on peut donc calculer $p(E)$.

On a donc :

$$\begin{aligned} p(E) &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ pair}}} p(X=k) \\ &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ pair}}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ pair}}} \frac{\lambda^k}{k!}. \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer la série $\sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ pair}}} \frac{\lambda^k}{k!}$.

On peut aussi écrire :

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ pair}}} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}.$$

Pour calculer cette somme, on considère la somme partielle d'ordre N, en utilisant la relation :

$$\lambda^k + (-\lambda)^k = \begin{cases} 2\lambda^k & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{N} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(-\lambda)^k}{k!} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{\lambda} + e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

On en déduit la relation :

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ pair}}} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2},$$

ce qui donne :

$$p(E) = e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}.$$

Ainsi, la probabilité de l'événement « X est paire » est $\dfrac{1+e^{-2\lambda}}{2}$.

Comme on a $p(E)+p(F)=1$, on en déduit la probabilité de l'événement « X est impaire » :

$$p(F) = 1-\frac{1+e^{-2\lambda}}{2} = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}.$$

On peut remarquer que l'événement « X est paire » est plus probable que l'événement « X est impaire ».

Une autre méthode consiste à écrire :

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k \text{ pair}}} \frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k \text{ impair}}} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda},$$

ce qui donne la relation $p(E)-p(F)=e^{-2\lambda}$. En utilisant alors $p(E)+p(F)=1$ on obtient le résultat.

Exercice 15 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2, indépendantes.

1. Déterminer la loi et l'espérance (si elle existe) de $X_m = \min(X_1, X_2)$.
2. Mêmes questions avec $X_M = \max(X_1, X_2)$.

---

1. Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on en déduit que $X_m(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Considérons alors $k \in \mathbb{N}^*$. Pour calculer la loi de X_m, on calcule $p(X_m \geqslant k)$, car

$$(X_m \geqslant k) = \left(X_1 \geqslant k \bigcap X_2 \geqslant k\right).$$

Intuitivement, la fonction $k \in \mathbb{N}^* \mapsto p(X_m \geqslant k)$ est liée à la fonction de répartition. Précisément, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\overline{(X_1 \geqslant k+1)} = X_1 \leqslant k$. Ainsi, connaître cette fonction est équivalent à connaître la fonction de répartition.

Cela donne

$$\begin{aligned} p(X_m \geqslant k) =& p(X_1 \geqslant k \cap X_2 \geqslant k) \\ =& p(X_1 \geqslant k)p(X_2 \geqslant k) \text{ par indépendance.} \end{aligned}$$

Calculons alors ces probabilités en utilisant le complémentaire. On a la relation sur les événements :

$$\overline{(X_1 \geqslant k)} = \left(X_1 < k\right) = \left(X_1 \leqslant (k-1)\right).$$

On en déduit le calcul des probabilités :

$$\begin{aligned} p(X_1 < k) &= \sum_{j=1}^{k-1} p(X_1 = j) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} (1-p_1)^{j-1} p_1 \\ &= p_1 \sum_{j=0}^{k-2} (1-p_1)^j \\ &= p_1 \frac{1-(1-p_1)^{k-1}}{1-(1-p_1)} = 1-(1-p_1)^{k-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne $p(X_1 \geqslant k) = (1-p_1)^{k-1}$, et de même, $p(X_2 \geqslant k) = (1-p_2)^{k-1}$.

Ces résultats ne sont pas surprenants. Considérons une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique de paramètre p. On interprète X comme le rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli. L'événement $X \geqslant k$ peut donc s'interpréter comme l'événement : « les $k-1$ premiers tirages du schéma de Bernoulli sont des échecs », ce qui a pour probabilité $(1-p)^{k-1}$. On retrouve bien le résultat ci-dessus.

On continue alors le calcul pour obtenir :

$$\begin{aligned}p(X_m \geqslant k) =& p(X_1 \geqslant k)p(X_2 \geqslant k)\\ =&(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}\\ =&[(1-p_1)(1-p_2)]^{k-1}\\ =&[1-(p_1+p_2-p_1p_2)]^{k-1}.\end{aligned}$$

Notons alors $p_m = (p_1+p_2-p_1p_2)$, on a alors :

$$p(X_m \geqslant k) = (1-p_m)^{k-1}.$$

Les calculs ci-dessus montrent alors que la variable aléatoire X_m a la même fonction de répartition qu'une variable aléatoire géométrique de paramètre p_m. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on peut en déduire que X_m suit une loi géométrique de paramètre p_m. On va retrouver ce résultat par le calcul.
Considérons $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors :

$$\begin{aligned}p(X_m \geqslant k) =& p(X_m = k) + p(X_m \geqslant k+1)\\ \text{et donc } p(X_m = k) =& p(X_m \geqslant k) - p(X_m \geqslant k+1).\end{aligned}$$

On voit donc que la fonction $k \mapsto p(X_m \geqslant k)$ caractérise la loi, comme le fait la fonction de répartition.
Ce qui donne :

$$\begin{aligned}p(X_m = k) =&(1-p_m)^{k-1} - (1-p_m)^k\\ =&(1-p_m)^{k-1}(1-(1-p_m))\\ =&p_m(1-p_m)^{k-1}.\end{aligned}$$

On constate donc que X_m suit la loi géométrique de paramètre p_m.
En conclusion, on a donc :

$$X_m \sim \mathscr{G}(p_1+p_2-p_1p_2).$$

En particulier, on a son espérance :

$$E(X_m) = \frac{1}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

Ce résultat peut facilement s'interpréter. Appelons « expérience 1 » le schéma de Bernoulli de paramètre p_1. La variable X_1 est alors le rang du premier succès dans cette expérience aléatoire. Appelons de même « expérience 2 », le schéma de Bernoulli de paramètre p_2. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, les expériences 1 et 2 sont indépendantes.
On considère alors l'expérience suivante : on utilise les deux expériences en même temps, un tirage sera donc le résultat des deux expériences. On note « succès » à un tirage si l'une des deux expériences a été un succès. Cette expérience aléatoire est bien alors un schéma de Bernoulli, puisque les deux expériences sont indépendantes.
La probabilité d'échec d'un tirage est la probabilité que les deux expériences soient un échec, c'est donc : $(1-p_1)(1-p_2) = 1-(p_1+p_2-p_1p_2)$. La probabilité de succès est donc $p_1+p_2-p_1p_2$. On retrouve bien la valeur de p_m.
Maintenant la variable X_m est le rang minimum du premier tirage où il y a succès dans l'une des deux expériences 1 ou 2. C'est donc le rang du premier succès dans l'expérience où l'on considère « succès » si l'une des expériences est un succès, donc dans le schéma de Bernoulli de paramètre p_m.
On retrouve alors le résultat : $X_m \sim \mathscr{G}(p_1+p_2-p_1p_2)$.

2. On utilise la même méthode.
On a de même : $X_M(\Omega) = \mathbb{N}^*$, puis pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a la relation sur les événements

$$(X_M \leqslant k) = \left(X_1 \leqslant k \bigcap X_2 \leqslant k\right),$$

ce qui donne en utilisant l'indépendance :

$$p(X_M \leqslant k) = p(X_1 \leqslant k)p(X_2 \leqslant k).$$

On calcule alors ces probabilités :

$$\begin{aligned}
p(X_1 \leqslant k) &= \sum_{j=1}^{k} p(X_1 = j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} (1-p_1)^{j-1} p_1 \\
&= p_1 \sum_{j=0}^{k-1} (1-p_1)^j = 1-(1-p_1)^k,
\end{aligned}$$

et de même, $p(X_2 \leqslant k) = 1-(1-p_2)^k$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
p(X_M \leqslant k) &= \Big(1-(1-p_1)^k\Big)\Big(1-(1-p_2)^k\Big) \\
&= 1-(1-p_1)^k-(1-p_2)^k+[(1-p_1)(1-p_2)]^k.
\end{aligned}$$

Cette fois, il n'y a pas de simplification possible.
On calcule alors la loi à partir de la fonction de répartition. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
p(X_M \leqslant k) &= p(X_m = k) + p\Big(X_M \leqslant (k-1)\Big) \\
\text{ce qui donne } p(X_M = k) &= p\Big(X_M \leqslant k\Big) - p(X_M \leqslant (k-1)).
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
p(X_M = k) &= (1-p_1)^k + (1-p_2)^k - [(1-p_1)(1-p_2)]^k \\
&\quad - (1-p_1)^{k-1} - (1-p_2)^{k-1} + [(1-p_1)(1-p_2)]^{k-1} \\
&= -p_1(1-p_1)^{k-1} - p_2(1-p_2)^{k-1} \\
&\qquad + (1-(1-p_1)(1-p_2))\,[(1-p_1)(1-p_2)]^{k-1} \\
&= -p_1(1-p_1)^{k-1} - p_2(1-p_2)^{k-1} \\
&\qquad + (p_1+p_2-p_1p_2)\,[1-(p_1+p_2-p_1p_2)]^{k-1}.
\end{aligned}$$

Au final, on a obtenu la loi de X_M :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, p(X_M = k) = -p_1(1-p_1)^{k-1} - p_2(1-p_2)^{k-1} + (p_1+p_2-p_1p_2)\,[1-(p_1+p_2-p_1p_2)]^{k-1}.$$

Montrons maintenant que X_M admet une espérance et calculons sa valeur. Il s'agit donc de démontrer que la série : $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} kp(X_M = k)$ converge absolument.
Pour cela, on considère la somme partielle de rang $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} kp(X_M = k) &= -\sum_{k=1}^{N} kp_1(1-p_1)^{k-1} \\
&- \sum_{k=1}^{N} kp_2(1-p_2)^{k-1} \\
&+ \sum_{k=1}^{N} k(p_1+p_2-p_1p_2)\,[1-(p_1+p_2-p_1p_2)]^{k-1}.
\end{aligned}$$

On retrouve alors le calcul de l'espérance d'une variable géométrique. Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, on a $E(X) = \frac{1}{p}$, ce qui donne :

$$\sum_{k \geqslant 1} kp(X = k) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

Comme p_1 et p_2 sont des réels de $]0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
0 < (1-p_1) < 1 \text{ et } 0 < (1-p_1) < 1 \\
\text{donc} \quad 0 < (1-p_1)(1-p_2) < 1 \\
\text{et} \quad 0 < 1-(1-p_1)(1-p_2) < 1 \\
\text{ce qui s'écrit :} \quad 0 < (p_1+p_2-p_1p_2) < 1
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer ce résultat en remplaçant p par p_1, p_2 et $(p_1+p_2-p_1p_2)$. On obtient alors les trois résultats suivants :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kp_1(1-p_1)^{k-1} \text{ converge et est égale à } \frac{1}{p_1} \\
&\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kp_2(1-p_2)^{k-1} \text{ converge et est égale à } \frac{1}{p_2} \\
&\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(p_1+p_2-p_1p_2)\left[1-(p_1+p_2-p_1p_2)\right]^{k-1} \\
&\qquad \text{converge et est égale à } \frac{1}{(p_1+p_2-p_1p_2)}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{k=1}^{N} kp(X_M=k)$ converge lorsque N tend vers $+\infty$, et que

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N} kp(X_M=k) &= -\sum_{k\geqslant 1} kp_1(1-p_1)^{k-1} \\
&\quad -\sum_{k\geqslant 1} kp_2(1-p_2)^{k-1} \\
&\quad +\sum_{k\geqslant 1} k(p_1+p_2-p_1p_2)\left[1-(p_1+p_2-p_1p_2)\right]^{k-1} \\
&= -\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{(p_1+p_2-p_1p_2)}
\end{aligned}$$

Comme il s'agit d'une série à termes positifs, on en déduit que $\sum_{k\geqslant 1} kp(X_M=k)$ converge absolument, *i.e.* que X_M admet une espérance et que

$$E(X_M) = -\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{(p_1+p_2-p_1p_2)}$$

En conclusion, la loi de X_M est :

$$\begin{aligned}
\forall k\in\mathbb{N}^*, p(X_M=k) = -p_1(1-p_1)^{k-1} - p_2(1-p_2)^{k-1} \\
+(p_1+p_2-p_1p_2)\left[1-(p_1+p_2-p_1p_2)\right]^{k-1},
\end{aligned}$$

et $E(X_M) = -\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{(p_1+p_2-p_1p_2)}$.

Exercice 16 On dispose d'un pièce truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir « Pile » soit égale à $p\in]0,1[$. On la lance une infinité de fois de manières indépendantes.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_k égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le $k^{\text{ème}}$ « Pile ».
2. Déterminer l'espérance et la variance de X_k (si elles existent).
3. On dispose de k dés cubiques. On les lance une première fois : on écarte ceux qui donnent un as, puis on relance les autres. Encore une fois, on écarte à nouveau ceux qui donnent un as et on relance les dés restants. On continue jusqu'à que tous les dés aient donné un as. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire X égale au nombre total de dés lancés pour que le jeu se termine.

Correction :

1. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, notons Y_j la variable aléatoire égale au nombre de « Pile » dans les j premiers lancers. Comme il s'agit du nombre de succès dans une séquence de j tirages d'un schéma de Bernoulli, les variables Y_j suivent une loi binomiale :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ Y_j \sim \mathscr{B}(j,p).$$

Notons aussi pour $j \in \mathbb{N}^*$ P_j l'événement « . On obtient « Pile » au tirage j ».
Utilisons ces événements pour déterminer la loi de X_k.
On peut déjà constater que $X_k(\Omega) \subset \mathbb{N}$, ou de manière plus précise :

$$X_k(\Omega) = \left\{ j \in \mathbb{N}, j \geqslant k \right\} = \mathbb{N} \setminus [\![0, k-1]\!].$$

En effet, le k-ième pile arrive nécessairement après le k-ième tirage, ce qui signifie que si $j < k$, $\left(X_k = j\right)$ est impossible.
Considérons alors $j \geqslant k$, on peut alors écrire :

$$(X_k = j) = (Y_{j-1} = k-1) \cap P_j.$$

En effet, pour que le k-ième pile soit obtenu au tirage j, cela signifie qu'il y a eu $k-1$ tirages « Pile » dans les $j-1$ premiers tirages et que l'on obtient « Pile » au j-ième tirage.
Or, la variable Y_{j-1} est une fonction des $(j-1)$ premiers tirages uniquement. On en déduit que l'événement $Y_{j-1} = k-1$ est indépendant de l'événement P_j, ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(X_k = j) =& p\left((Y_{j-1} = k-1) \cap P_j\right) \\ =& p\left(Y_{j-1} = k-1\right) \times \underbrace{p\left(P_j\right)}_{=p} \\ =& \binom{j-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{j-k} \times p \\ =& \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k}. \end{aligned}$$

On a donc obtenu la loi de X_k :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ p(X_k = j) = \begin{cases} 0 & \text{si} j < k, \\ \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k} & \text{si} j \geqslant k. \end{cases}$$

Il existe une autre méthode pour trouver ce résultat.
Considérons $j \geqslant k$ et $k-1$ entiers de $[\![1, j-1]\!]$, notés

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \leqslant j-1$$

et notons $\omega(i_1, \ldots, i_{k-1})$ la séquence de j tirages telle que :
- les tirages aux indices i_1, i_2, $\ldots i_{k-1}$ sont « Pile »,
- les autres tirages entre 1 et $j-1$ sont « Face »,
- le tirage j est « Pile ».

Clairement, l'événement $X_k = j$ correspond à l'ensemble des tirages $\omega(i_1, \ldots, i_{k-1})$, pour tous les choix possibles des entiers $(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})$.
On a donc :

$$p(X_k = j) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \leqslant j-1} p\left(\left\{\omega(i_1, \ldots, i_{k-1})\right\}\right).$$

Cette somme porte sur tous les choix possibles des entiers $(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})$ (comme dans la formule du Crible).
Considérons un élément $\omega(i_1, \ldots, i_{k-1})$, on peut alors calculer la probabilité d'une telle séquence de tirages en utilisant l'indépendance des lancers :

$$p\left(\left\{\omega(i_1, \ldots, i_{k-1})\right\}\right) = p^k (1-p)^{j-k},$$

car il y a k « Pile » et $j-k$ « Face ». Cette probabilité ne dépend donc pas du choix des indices $(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} p(X_k = j) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \leqslant j-1} p\left(\left\{\omega(i_1, \ldots, i_{k-1})\right\}\right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \leqslant j-1} p^k (1-p)^{j-k}. \end{aligned}$$

La somme est ainsi égale au nombre de tirages du type $\omega(i_1, \ldots, i_{k-1})$, c'est-à-dire au nombre d'indices $(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})$, multipliés par la probabilité d'un tirage $p^k(1-p)^{j-k}$.
Construire les indices $(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})$ revient à construire une suite strictement croissante de $k-1$ entiers de $[\![1, j-1]\!]$.
Il y a $\binom{j-1}{k-1}$ constructions de ce type, puisque cela revient à choisir une partie à $k-1$ entiers de $[\![1, j-1]\!]$ et à les organiser par ordre croissant.
On retrouve alors :

$$\forall j \geqslant k,\ p(X_k = j) = \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k}.$$

2. Pour calculer l'espérance de la variable X_k, on démontre que la série $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} jp(X_k = j)$ converge absolument, et on calcule sa valeur.
Pour cela, considérons la somme partielle pour $N \geqslant k$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} jp(X_k = j) &= \sum_{j=k}^{N} j \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k} \\ &= \sum_{j=k}^{N} j \frac{(j-1)!}{(k-1)!(j-k)!} p^k (1-p)^{j-k} \\ &= k \sum_{j=k}^{N} \frac{j!}{k!(j-k)!} p^k (1-p)^{j-k} \\ &= k \sum_{j=k}^{N} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} \\ &= \frac{k}{p} \sum_{j=k}^{N} \binom{j}{k} p^{k+1} (1-p)^{(j+1)-(k+1)}. \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\forall j \geqslant k,\ p(X_{k+1} = j+1) = \binom{j}{k} p^{k+1} (1-p)^{j+1-(k+1)}.$$

On peut donc remplacer

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} jp(X_k = j) &= \frac{k}{p} \left(\sum_{j=k}^{N} p(X_{k+1} = j+1) \right) \\ &= \frac{k}{p} \left(\sum_{j=k+1}^{N+1} p(X_{k+1} = j) \right). \end{aligned}$$

On utilise alors la relation :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{j=k+1}^{N+1} p(X_{k+1} = j) = \sum_{j \geqslant k+1} p(X_{k+1} = j) = 1.$$

En effet, cette série converge et est égale à 1 puisqu'il s'agit de la somme sur l'univers image $X_{k+1}(\Omega)$ de la loi de X_{k+1}.
On en déduit que la série $\sum_{j \geqslant 1} jp(X_k = j)$ converge, donc converge absolument puisqu'il s'agit d'une somme de termes positifs. Ainsi la variable X_k admet une espérance dont la valeur est :

$$E(X_k) = \sum_{j \geqslant 1} jp(X_k = j) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} jp(X_k = j) = \frac{k}{p}.$$

Pour la variance, on commence par montrer que la variable X_k admet un moment d'ordre 2. Pour cela, on écrit la somme partielle :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} j^2 p(X_k = j) &= \sum_{j=k}^{N} j^2 p(X_k = j) \\ &= \sum_{j=k}^{N} (j+1) j p(X_k = j) - \sum_{j=k}^{N} j p(X_k = j).\end{aligned}$$

On a vu dans le calcul précédent, que la série $\sum_{j \geqslant k} j p(X_k = j)$ converge vers $E(X) = \frac{k}{p}$. On regarde alors uniquement le deuxième terme :

$$\begin{aligned}&\sum_{j=k}^{N} (j+1) j p(X_k = j) \\ &\quad = \sum_{j=k}^{N} j(j+1) \frac{(j-1)!}{(k-1)!(j-k)!} p^k (1-p)^{j-k} \\ &\quad = k \sum_{j=k}^{N} (j+1) \frac{j!}{k!(j-k)!} p^k (1-p)^{j-k} \\ &\quad = k \sum_{j=k}^{N} (j+1) \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k}\end{aligned}$$

On fait alors apparaître de nouveau $p(X_{k+1} = j)$:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=k}^{N} (j+1) j p(X_k = j) \\ &\quad = \frac{k}{p} \sum_{j=k}^{N} (j+1) \binom{j}{k} p^{k+1} (1-p)^{(j+1)-(k+1)} \\ &\quad = \frac{k}{p} \sum_{j=k}^{N} (j+1) p(X_{k+1} = j+1) \\ &\quad = \frac{k}{p} \sum_{j=k+1}^{N+1} j p(X_{k+1} = j).\end{aligned}$$

Or, d'après le calcul précédent, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{N \to +\infty} \sum_{j=k+1}^{N+1} j p(X_{k+1} = j) &= \sum_{j \geqslant k+1} j p(X_{k+1} = j) \\ &= E\left(X_{k+1}\right) = \frac{k+1}{p}.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{j=k}^{N} (j+1) j p(X_k = j) = \frac{k}{p} \times \frac{(k+1)}{p}$$

et donc que :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} j^2 p(X_k = j) = \frac{k(k+1)}{p^2} - \frac{k}{p}.$$

Ainsi, on en déduit que la série $\sum_{j \geqslant k} j^2 p(X_k = j)$ converge absolument puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs. En conséquence, X_k admet un moment d'ordre 2 donc une variance. Plus précisément, le calcul a montré que

$$E\left(X^2\right) = \frac{k(k+1-p)}{p^2}.$$

On calcule ensuite la variance avec l'égalité de Koenig-Huyghens :

$$\begin{aligned} var(X_k) =& E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\ =& \frac{k(k+1-p)}{p^2} - \frac{k^2}{p^2} \\ =& \frac{k(1-p)}{p^2}. \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable X_k admet une espérance et une variance, dont la valeur est :

$$E(X_k) = \frac{k}{p} \quad \text{et} \quad var(X_k) = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

3. On note j le numéro du lancer en comptant tous les lancers de dés.
Cela signifie que si on lance les k dés, on leur donne un ordre arbitraire et on compte k lancers différents.
L'événement $\left(X = j\right)$ qui est « *le nombre total de dés lancés pour que le jeu se termine est* j » est l'événement « *le k-ième* 6 *a été obtenu au lancer* j ».
Comme les lancers de dés forment un schéma de Bernoulli de probabilité de succès (ici obtenir un as) $\frac{1}{6}$, il s'agit donc de déterminer la probabilité de l'événement $\left(X_k = j\right)$, où X_k est la variable aléatoire du rang du k-ième succès définie à la question précédente.
On voit donc que la variable aléatoire X est égale à X_k pour $p = \frac{1}{6}$.
On peut aussi dire que l'on modélise l'expérience en lançant toujours le même dé jusqu'à obtenir k as.
On a calculé la loi de cette variable aléatoire à la question a), on a donc :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ p(X = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k, \\ \binom{j-1}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{j-k} & \text{si } j \geqslant k. \end{cases}$$

On a aussi obtenu son espérance et sa variance :

$$E(X) = \frac{k}{p} = 6k \quad \text{et} \quad var(X) = \frac{k\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30k.$$

Exercice 17 Soit $a > 0$. On considère les coefficients réels $p_{ij} = \lambda \frac{a^{i+j}}{i!j!}$, avec $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

1. Donner la valeur de λ pour laquelle ces coefficients forment la loi d'un couple discret.
2. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant $(p_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ pour loi conjointe.
   (a) Déterminer les lois marginales de X et Y.
   (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de la somme $X+Y$.

Correction :

1. On a les contraintes :
   ⋆ $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $p_{ij} \geqslant 0$,
   ⋆ la série $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} p_{ij}$ converge et est égale à 1.
   Pour la première contrainte, il faut $p_{00} = \lambda \geqslant 0$, et cette condition est suffisante.
   On a ensuite :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} p_{ij} =& \lambda \times \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{a^{i+j}}{i!j!} \\ =& \lambda \times \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{a^i}{i!} \times \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{a^j}{j!} \\ =& \lambda \times e^a \times e^a, \end{aligned}$$

   on reconnaît en effet la série exponentielle.
   On en déduit l'égalité nécessaire et suffisante : $\lambda e^{2a} = 1$, soit $\lambda = e^{-2a}$.
   En conclusion, pour $\lambda = e^{-2a}$, ces coefficients forment la loi d'un couple discret, dont la loi est :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ p(X = i, Y = j) = e^{-2a}\frac{a^{i+j}}{i!j!}.$$

2. (a) Pour déterminer la loi de X, on utilise le système complet d'événements associé à Y. Considérons $i \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{aligned} p(X=i) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p(X=i \cap Y=j) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij} = e^{-2a} \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{a^{i+j}}{i!j!} \\ &= e^{-2a}\frac{a^i}{i!} \underbrace{\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{a^j}{j!}}_{e^a} \\ &= e^{-a}\frac{a^i}{i!}. \end{aligned}$$

Ainsi, $X \sim \mathscr{P}(a)$.
De même, pour $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} p(Y=j) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} p(X=i \cap Y=j) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} p_{ij} = e^{-2a} \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{a^{i+j}}{i!j!} \\ &= e^{-2a}\frac{a^j}{j!} \underbrace{\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{a^i}{i!}}_{e^a} = e^{-a}\frac{a^j}{j!}, \end{aligned}$$

ce qui donne de nouveau $Y \sim \mathscr{P}(a)$.

(b) Considérons $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on a alors :

$$p(X=i \cap Y=j) = p_{ij} = e^{-2a}\frac{a^{i+j}}{i!j!},$$

tandis que

$$p(X=i)p(Y=j) = e^{-a}\frac{a^i}{i} \times e^{-a}\frac{a^i}{i} = e^{-2a}\frac{a^{i+j}}{i!j!}.$$

On voit alors que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on a l'égalité : $p(X=i \cap Y=j) = p(X=i)p(Y=j)$.

3. Les variables X et Y suivent une loi de Poisson de paramètre a et sont indépendantes. On en déduit que leur somme $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $2a$. On obtient alors :

$$X+Y \sim \mathscr{P}(2a).$$

Exercice 18 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p(X=n) = p(Y=n) = p(1-p)^n \text{ avec } p \in]0,1[$$

(il s'agit de la loi géométrique sur $\mathbb{N}$).

1. Déterminer la loi de $Z = X+Y$.
2. On note T la variable aléatoire égale à $X-Y$ si $X > Y$, et à 0 sinon. Déterminer la loi de T.
3. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ?

Correction :

1. On voit déjà que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Considérons $k \in \mathbb{N}$, on utilise alors le système complet d'événements associé à la variable X :

$$\begin{aligned} p(Z=k) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} p(Z=k \cap X=i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} p(Z=k \cap X=i). \end{aligned}$$

En effet, si $i > k$, $(Z = k) \cap (X = i)$ est impossible.
On a alors une somme finie :

$$\begin{aligned}
p(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} p(Z = k \cap X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} p(Y = k - i \cap X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} p(Y = k - i) p(X = i) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{i=0}^{k} p(1-p)^{k-i} \times p(1-p)^{i} \\
&= p^2 \sum_{i=0}^{k} (1-p)^k = (k+1)p^2(1-p)^k.
\end{aligned}$$

On en déduit la loi de Z :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p(Z = k) = (k+1)p^2(1-p)^k.$$

2. On a déjà $T(\Omega) = \mathbb{N}$.
Calculons $p(T = 0) = p(X \leqslant Y)$ en utilisant le système complet d'événements associé au couple (X, Y) :

$$\begin{aligned}
p(T = 0) &= p(X \leqslant Y) \\
&= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} p(X \leqslant Y \cap X = i \cap Y = j) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{j} p(X \leqslant Y \cap X = i \cap Y = j) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{j} p(X = i \cap Y = j).
\end{aligned}$$

En effet, l'événement $(X \leqslant Y) \cap (X = i) \cap (Y = j)$ est impossible si $i > j$.
Considérons $j \in \mathbb{N}$, on utilise alors l'indépendance pour écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j} p(X = i \cap Y = j) &= \sum_{i=0}^{j} p(X = i) p(Y = j) \\
&= p(Y = j) \sum_{i=0}^{j} p(1-p)^i \\
&= pp(Y = j) \frac{1 - (1-p)^{j+1}}{1 - (1-p)} \\
&= p(Y = j) \left(1 - (1-p)^{j+1}\right).
\end{aligned}$$

On remplace alors :

$$\begin{aligned}
p(T = 0) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{j} p(X = i \cap Y = j) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} p(Y = j) \left(1 - (1-p)^{j+1}\right) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} p(1-p)^j \left(1 - (1-p)^{j+1}\right) \\
&= p \sum_{j \in \mathbb{N}} (1-p)^j - p(1-p) \sum_{j \in \mathbb{N}} (1-p)^{2j} \\
&= p \frac{1}{1 - (1-p)} - p(1-p) \sum_{j \in \mathbb{N}} \left((1-p)^2\right)^j \\
&= 1 - p(1-p) \frac{1}{1 - (1-p)^2}.
\end{aligned}$$

On reconnaît en effet dans la deuxième somme la série géométrique avec $(1-p) \in]0,1[$. On simplifie alors en utilisant $1-(1-p)^2 = p(2-p)$:

$$p(T=0) = 1 - \frac{1-p}{2-p} = \frac{1}{2-p}.$$

Considérons maintenant un entier $k > 0$, on utilise alors encore le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X, en remarquant que puisque $k > 0$, $(T = k \cap X = i)$ n'est possible que si $i \geqslant k$. Cela donne :

$$\begin{aligned} p(T=k) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} p(T = k \cap X = i) \\ &= \sum_{i \geqslant k} p(T = k \cap X = i) \\ &= \sum_{i \geqslant k} p(Y = i-k \cap X = i). \end{aligned}$$

On utilise alors l'indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} p(T=k) &= \sum_{i \geqslant k} p(Y = i-k) p(X = i) \\ &= \sum_{i \geqslant k} p(1-p)^{i-k} \times p(1-p)^i \\ &= p^2 \sum_{i \geqslant k} (1-p)^{2i-k} \\ &= p^2 (1-p)^k \sum_{i \geqslant k} \left((1-p)^2\right)^{i-k} \end{aligned}$$

On fait alors apparaître la série géométrique avec $(1-p)^2 \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} p(T=k) &= p^2 (1-p)^k \sum_{i \in \mathbb{N}} \left((1-p)^2\right)^i \\ &= p^2 (1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{2-p} (1-p)^k. \end{aligned}$$

En conclusion, on en déduit la loi de T :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p(T=k) = \begin{cases} \frac{1}{2-p} & \text{si } k = 0 \\ \frac{p}{2-p}(1-p)^k & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *Intuitivement, les variables Z et T ne sont pas indépendantes, puisque l'événement $\Big(Z = 0\Big)$ implique que les deux variables X et Y sont nulles, et donc que $T = 0$. Ainsi, la connaissance de Z apporte de l'information sur T.*
Calculons $p(Z = 0 \cap T = 0)$, on a :

$$p(Z = 0 \cap T = 0) = p(X = 0 \cap Y = 0).$$

En effet, puisque X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, l'événement $\Big(Z = 0\Big)$ implique nécessairement que X et Y sont nulles. Réciproquement, si $X = 0$ et $Y = 0$, on a $Z = 0$ et $T = 0$. En utilisant l'indépendance cela donne :

$$\begin{aligned} p(Z = 0 \cap T = 0) &= p(X = 0) p(Y = 0) \\ &= p^2. \end{aligned}$$

En utilisant les lois calculées aux questions précédentes, on obtient :

$$p(Z = 0) p(T = 0) = p^2 \frac{1}{2-p}.$$

Comme $\frac{1}{2-p} = 1 \Leftrightarrow p = 1$, on a $\frac{1}{2-p} \neq 1$, et donc :

$$p(Z = 0) p(T = 0) \neq p(Z = 0 \cap T = 0),$$

ce qui montre que les variables Z et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 19 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réelles indexée par $\mathbb{Z}$, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ converge lorsque les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n}$ convergent. On pose alors :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p. On note $V = \min(X,Y)$ et $W = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple (V,W). En déduire les lois de V et W.
2. Montrez que V et W sont indépendantes.
3. Réciproquement, soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi satisfaisant à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p(X = n) \neq 0$$

Les variables V et W sont définies comme précédemment.
Montrez que si V et W sont indépendantes, alors X et Y suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Correction :

1. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a : $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $W(\Omega) = \mathbb{Z}$.
Considérons alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, l'événement $(V = n) \cap (W = k)$ s'écrit alors :
   - si $k > 0$, on a $X > Y$, et donc $Y = n$ et $X = n + k$,
   - si $k = 0$, on a $X = Y = n$,
   - si $k < 0$, on a $X < Y$, et donc $X = n$ et $Y = n - k$.

   Considérons le premier cas, *i.e.* $k > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} p(V = n \cap W = k) &= p(Y = n \cap X = n + k) \\ &= p(Y = n)p(X = n + k) \text{ par indépendance} \\ &= p(1-p)^{n-1} p(1-p)^{n+k-1} \\ &= p^2(1-p)^{2n+k-2} = p^2(1-p)^{2n+|k|-2}. \end{aligned}$$

   Considérons maintenant le deuxième cas, où $k = 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} p(V = n \cap W = 0) &= p(Y = n \cap X = n) \\ &= p(Y = n)p(X = n) \text{ par indépendance} \\ &= p(1-p)^{n-1} p(1-p)^{n-1} \\ &= p^2(1-p)^{2n-2}. \end{aligned}$$

   On peut aussi choisir d'inclure ce cas dans le premier ou dans le troisième cas.
   Si maintenant $k < 0$, on a :

$$\begin{aligned} p(V = n \cap W = k) &= p(Y = n \cap X = n - k) \\ &= p(Y = n)p(X = n - k) \text{ par indépendance} \\ &= p(1-p)^{n-1} p(1-p)^{n-k-1} \\ &= p^2(1-p)^{2n-k-2} = p^2(1-p)^{2n+|k|-2}. \end{aligned}$$

   Les trois expressions étant identiques en utilisant la valeur absolue de k, on a donc obtenu la loi du couple (V,W) :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}, \quad p(V = n \cap W = k) = p^2(1-p)^{2n+|k|-2}.$$

   Pour en déduire les lois de V et W, on calcule les lois marginales.
   Considérons $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors :

$$p(V = n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(V = n \cap W = k).$$

Cette série indexée sur $\mathbb{Z}$ converge donc, et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
p(V=n) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} p(V=n\cap W=k) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} p(V=n\cap W=-k)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} p^2(1-p)^{2n+k-2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} p^2(1-p)^{2n+k-2}\\
&= p^2(1-p)^{2n-2}\sum_{k\in\mathbb{N}}(1-p)^k\\
&\qquad + p^2(1-p)^{2n-2}\sum_{k\in\mathbb{N}^*}(1-p)^k.
\end{aligned}$$

Comme $p\in]0,1[$, on retrouve les séries géométriques

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p},$$

et

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}(1-p)^k = (1-p)\sum_{k\in\mathbb{N}}(1-p)^k = \frac{1-p}{1-(1-p)} = \frac{1-p}{p}.$$

On peut alors continuer le calcul pour obtenir :

$$\begin{aligned}
p(V=n) &= p^2(1-p)^{2n-2}\frac{1}{p} + p^2(1-p)^{2n-2}\frac{(1-p)}{p}\\
&= p(1-p)^{2n-2} + p(1-p)^{2n-1}\\
&= p(1-p)^{2n-2}(2-p).
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu la loi de V :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad p(V=n) = p(1-p)^{2n-2}(2-p).$$

Procédons de même pour W, on a pour $k\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
p(W=k) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p(V=n\cap W=k)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p^2(1-p)^{2n+|k|-2}\\
&= p^2(1-p)^{|k|}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(1-p)^{2(n-1)}\\
&= p^2(1-p)^{|k|}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[(1-p)^2\right]^n.
\end{aligned}$$

On retrouve la série géométrique de raison $(1-p)^2\in]0,1[$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
p(W=k) &= \frac{p^2(1-p)^{|k|}}{1-(1-p)^2}\\
&= \frac{p^2(1-p)^{|k|}}{2p-p^2}\\
&= \frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}
\end{aligned}$$

Cela donne la loi de W :

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ p(W=k) = \frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}.$$

2. Il s'agit de montrer que :

$$\forall (n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z},\quad p(V=n\cap W=k) = p(V=n)p(W=k).$$

Considérons donc $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} p(V=n)p(W=k) =& p(1-p)^{2n-2}(2-p) \times \frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p} \\ =& p^2(1-p)^{2n-2}(1-p)^{|k|} \\ =& p(V=n \cap W=k). \end{aligned}$$

On en déduit que les variables aléatoires V et W sont indépendantes.

3. On suppose donc que V et W sont indépendantes et on montre que X et Y suivent une loi géométrique.
Commençons par déterminer p. On a nécessairement $p = p(X=1)$. Pour calculer cette valeur, on passe par le calcul de $p(X=1 \cap Y=1)$. D'un côté, comme X et Y sont deux variables indépendantes de même loi, on a :

$$p(X=1 \cap Y=1) = \Big[p(X=1)\Big]^2 = p^2.$$

D'un autre côté, l'événement $(X=1 \cap Y=1)$ est l'événement $(V=1 \cap W=0)$, ce qui donne, en utilisant l'indépendance de V et W :

$$p(X=1 \cap Y=1) = p(V=1 \cap W=0) = p(V=1)p(W=0).$$

On pose donc :

$$p = \sqrt{p(V=1)p(W=0)}.$$

Cette valeur assure que $p = p(X=1)$.
Comme $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X=k) \neq 0$, on a :
- *d'une part $p > 0$,*
- *d'autre part, la variable X n'est pas la variable certaine égale à 1, donc $p < 1$.*

On a donc $p \in]0,1[$, ce qui est nécessaire pour parler de loi géométrique de paramètre p.
On démontre ensuite par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$\mathscr{P}_n : \qquad p(X=n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Comme X et Y ont la même loi, on peut aussi écrire $p(Y=n) = p(1-p)^{n-1}$.
L'initialisation est évidente, on a choisi p pour que $p(1-p)^0 = p(X=1)$.
Pour l'hérédité, considérons un entier $n \in \mathbb{N}$, fixé, tel que $\forall k \leqslant n$, $\mathscr{P}_k$ est vrai et montrons la propriété $p(X=n+1) = p(1-p)^n$.
Comme pour le calcul de p, on passe par le calcul de $p(X=n+1 \cap Y=n+1)$, on a

$$\begin{aligned} [p(X=n+1)]^2 =& p(X=n+1 \cap Y=n+1) \\ =& p(V=n+1 \cap W=0). \end{aligned}$$

En effet, l'événement $(X=n+1 \cap Y=n+1)$ est l'événement $(V=n+1 \cap W=0)$. On utilise alors l'indépendance pour obtenir :

$$[p(X=n+1)]^2 = p(V=n+1)p(W=0).$$

Calculons alors $p(V=n+1)$ et $p(W=0)$.
Comme V est le minimum du couple (X,Y) on utilise la relation :

$$p(V=n+1) = p(V \geqslant n+1) - p(V \geqslant n+2),$$

et on exprime chacun de ces termes en fonction du couple (X,Y).
On a :

$$\begin{aligned} p(V=n+1) =& p(V \geqslant n+1) - p(V \geqslant n+2) \\ =& p(X \geqslant n+1 \cap Y \geqslant n+1) \\ & - p(X \geqslant n+2 \cap Y \geqslant n+2) \\ =& \Big[p(X \geqslant n+1)\Big]^2 - \Big[p(X \geqslant n+2)\Big]^2, \end{aligned}$$

car les variables X et Y sont indépendantes de même loi. On factorise alors :

$$\begin{aligned}
p(V=n+1) =& \Big[p(X \geqslant n+1)\Big]^2 - \Big[p(X \geqslant n+2)\Big]^2 \\
=& \Big[p(X \geqslant n+1) - p(X \geqslant n+2)\Big] \times \\
& \Big[p(X \geqslant n+1) + p(X \geqslant n+2)\Big] \\
=& p(X=n+1)\Big[p(X \geqslant n+1) + p(X \geqslant n+2)\Big].
\end{aligned}$$

En effet, $p(X \geqslant n+1) - p(X \geqslant n+2) = p(X=n+1)$.
On fait alors apparaître les hypothèses de récurrence, qui concernent les événements $\Big(X=k\Big)$ pour $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
p(V=n+1) =& p(X=n+1)\Big[p(X \geqslant n+1) + p(X \geqslant n+2)\Big] \\
=& p(X=n+1)\Big[2p(X \geqslant n+1) - p(X=n+1)\Big] \\
=& p(X=n+1)\Big[2\Big(1-p(X \leqslant n)\Big) - p(X=n+1)\Big].
\end{aligned}$$

On utilise alors les hypothèses de récurrence pour calculer $p(X \leqslant n)$:

$$\begin{aligned}
p(X \leqslant n) =& \sum_{k=1}^{n} p(X=k) \\
=& \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k \\
=& p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \\
=& 1-(1-p)^n.
\end{aligned}$$

Comme d'après les hypothèses de récurrence, la loi de X coïncide avec la loi géométrique pour $k \leqslant n$, on retrouve bien sûr le calcul de la probabilité de l'événement : « le rang du premier succès est inférieur à n », *c'est-à-dire le complémentaire de l'événement* « les n premières expériences sont un échec ».
On continue alors le calcul, qui donne :

$$\begin{aligned}
p(V=n+1) =& p(X=n+1)\Big[2\Big(1-p(X \leqslant n)\Big) - p(X=n+1)\Big] \\
=& p(X=n+1)\Big[2(1-p)^n - p(X=n+1)\Big].
\end{aligned}$$

Simplifions maintenant $p(W=0)$. Pour cela, on revient à la définition de p :

$$p^2 = [p(X=1)]^2 = p(V=1)p(W=0),$$

et on exprime alors l'événement $\Big(V=1\Big)$ en fonction de (X,Y) comme précédemment :

$$\begin{aligned}
p(V=1) =& 1-p(V \geqslant 2) \\
=& 1-p(X \geqslant 2 \cap Y \geqslant 2) \\
=& 1-(p(X \geqslant 2)^2 \\
=& 1-(1-p(X=1))^2 \\
=& 1-(1-p)^2 \\
=& 2p-p^2 = p(2-p).
\end{aligned}$$

On en déduit $p(W=0) = \frac{p^2}{p(V=1)} = \frac{p}{2-p}$.
Les valeurs de $p(W=0)$ et $p(V=1)$ peuvent être obtenues en reprenant les lois trouvées à la question précédente.
En remplaçant, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\Bigg[p(X=n+1)\Bigg]^2 =& p(V=n+1)p(W=0) \\
=& p(X=n+1)\Big[2(1-p)^n - p(X=n+1)\Big] \times \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}$$

Or, on a l'hypothèse $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X=k) \neq 0$, on peut donc diviser cette dernière relation par $p(X=n+1)$ qui est non nul, pour obtenir :

$$p(X=n+1) = \Big[2(1-p)^n - p(X=n+1)\Big]\frac{p}{2-p},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} p(X=n+1)\left(1+\frac{p}{2-p}\right) &= 2(1-p)^n\frac{p}{2-p} \\ p(X=n+1)\left(\frac{2}{2-p}\right) &= 2(1-p)^n\frac{p}{2-p} \\ \text{soit } p(X=n+1) &= (1-p)^n p. \end{aligned}$$

On a donc démontré la proposition au rang $n+1$, ce qui prouve l'hérédité.
D'après le principe de récurrence, on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(X=n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Au final, on a donc démontré que X (et donc aussi Y) est une variable aléatoire géométrique de paramètre p.
En conclusion, l'hypothèse V et W sont indépendantes implique que X et Y suivent une loi géométrique de paramètre :

$$p = \sqrt{p(V=1)p(W=0)}.$$

Exercice 20 Une urne contient trois boules indiscernables au toucher et numérotées 1, 2 et 3.

On effectue une succession de tirages au hasard d'une boule de cette urne, avec à chaque fois remise de la boule obtenue avant le tirage suivant.
Soit X le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir pour la première fois trois fois de suite le même numéro.
On note p_n la probabilité de l'événement $[X=n]$ et c_n la probabilité de l'événement $[X \leqslant n]$.

1. (a) Que valent p_1 et p_2 ? Calculer p_3 et p_4.
   (b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $p_n = c_n - c_{n-1}$.
2. (a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $p_{n+3} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3(1-c_n)$.
   (b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, $p_{n+3} - p_{n+2} + \frac{2}{27}p_n = 0$.
3. (a) Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = p_{n+2} - \frac{2}{3}p_{n+1} - \frac{2}{9}p_n$. Calculer u_2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est la suite nulle.
   (b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, $p_n = \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}\right)$.
   (c) Montrer que la série de terme général p_n est convergente et calculer $\sum_{n=2}^{\infty} p_n$. Que signifie le résultat obtenu ?
   (d) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Correction :

1. (a) Puisqu'on veut trois fois de suite le même numéro, il est clair que $p_1 = p_2 = 0$.
   L'événement $X=3$ correspond à 3 tirages : $(1,1,1)$, $(2,2,2)$ et $(3,3,3)$. Par indépendance des tirages, la probabilité de chacun de ces tirages est $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$, on en déduit :

$$p_3 = p(X=3) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}.$$

   L'événement $X=4$ correspond aux 6 tirages du type : (i,j,j,j), où $i \neq j$ et $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$. Comme tous ces tirages sont équiprobables de probabilité $\frac{1}{3^4}$, on obtient :

$$p_4 = p(X=4) = \frac{6}{3^4} = \frac{2}{27}.$$

   On a ainsi obtenu les premières valeurs :

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{1}{9} \quad \text{et} \quad p_4 = \frac{2}{27}.$$

(b) Pour $n \geqslant 2$, l'événement $\Big(X \leqslant n\Big)$ est l'union disjointe des événements $\Big(X = n\Big)$ et $\Big(X \leqslant n-1\Big)$, on a donc :

$$\begin{aligned} p(X \leqslant n) =& p(X = n) + p\Big(X \leqslant (n-1)\Big) \\ \text{soit} \quad p(X = n) =& p(X \leqslant n) - p\Big(X \leqslant (n-1)\Big) \\ \text{c'est-à-dire} \quad p_n =& c_n - c_{n-1}. \end{aligned}$$

On a donc bien la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ p_n = c_n - c_{n-1}.$$

2. (a) Considérons $n \geqslant 1$, l'événement $\Big(X = n+3\Big)$ implique nécessairement que l'on n'ait pas obtenu 3 fois de suite le même numéro dans les tirages 1 à n, on a donc l'égalité des événements

$$\Big(X = n+3\Big) = \Big(X = n+3\Big) \cap \left(\overline{X \leqslant n}\right).$$

On peut aussi écrire : $\Big(X \geqslant (n+3)\Big) \subset \Big(X \geqslant n+1\Big)$.
Ce qui donne en utilisant les probabilité composées (l'événement $\left(\overline{X \leqslant n}\right)$ étant possible) :

$$\begin{aligned} p\Big(X = n+3\Big) =& p\Big(X = n+3\Big) \cap \left(\overline{X \leqslant n}\right) \\ =& p\left(\overline{X \leqslant n}\right) p_{\left(\overline{X \leqslant n}\right)}\Big(X = n+3\Big) \\ =& \Big(1 - p\left(X \leqslant n\right)\Big) p_{\left(\overline{X \leqslant n}\right)}\Big(X = n+3\Big) \\ =& \Big(1 - c_n\Big) p_{\left(\overline{X \leqslant n}\right)}\Big(X = n+3\Big). \end{aligned}$$

Maintenant, sachant que les n premiers tirages n'ont jamais permis d'obtenir trois fois de suite le même numéro, l'événement $X = n+3$ est l'événement « le tirage $n+1$ est différent du tirage n, et est identique aux tirages $n+2$ et $n+3$ ».
La probabilité de cet événement est alors $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3^2} = \frac{2}{3^3}$.
On en déduit $p_{\left(\overline{X \leqslant n}\right)}\Big(X = n+3\Big) = \dfrac{2}{3^3}$, et au final

$$p\Big(X = n+3\Big) = (1 - c_n)\frac{2}{3^3}.$$

En conclusion, on a donc :

$$\forall n \geqslant 1,\ p_{n+3} = \frac{2}{3^3}(1 - c_n).$$

(b) Considérons $n \geqslant 2$, on utilise alors la relation précédente :

$$\begin{aligned} p_{n+3} - p_{n+2} =& \left(\frac{2}{3^3}\right)\Big[(1 - c_n) - (1 - c_{n-1})\Big] \\ =& -\left(\frac{2}{27}\right)\Big[c_n - c_{n-1}\Big] \\ =& -\left(\frac{2}{27}\right)\Big[p_n\Big]. \end{aligned}$$

Ce qui donne bien la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ p_{n+3} - p_{n+2} + \frac{2}{27}p_n = 0.$$

3. (a) On utilise les valeurs calculées à la question a) i)

$$\begin{aligned} u_2 =& p_4 - \frac{2}{3}p_3 - \frac{2}{9}\underbrace{p_2}_{0} \\ =& \frac{2}{27} - \frac{2}{3}\frac{1}{9} = 0. \end{aligned}$$

On obtient bien $u_2 = 0$.
Calculons ensuite u_{n+1} en fonction de u_n pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} =& p_{n+3} - \frac{2}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1} \\ =& p_{n+2} - \frac{2}{27}p_n - \frac{2}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1}, \end{aligned}$$

en remplaçant p_{n+3} à l'aide de la relation trouvée question b) ii). On obtient alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} =& \frac{1}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1} - \frac{2}{27}p_n \\ =& \frac{1}{3}\left(p_{n+2} - \frac{2}{3}p_{n+1} - \frac{2}{9}p_n\right) \\ =& \frac{1}{3}u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$u_2 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n,$$

une récurrence immédiate donne alors $\forall n \geqslant 2$, $u_n = 0$. En conclusion, la suite (u_n) est la suite nulle.
On peut aussi écrire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et donc que $\forall n \geqslant 2$, $u_n = u_2 \frac{1}{3^{n-2}} = 0$.

(b) On a donc la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ p_{n+2} - \frac{2}{3}p_{n+1} - \frac{2}{9}p_n = 0.$$

Ainsi, la suite $\left(p_n\right)_{n\geqslant 2}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
On utilise alors la méthode du cours. L'équation caractéristique est $r^2 - \frac{2}{3}r - \frac{2}{9} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = \frac{4}{9} + \frac{8}{9} = \frac{4}{3}$. Les racines sont donc :

$$r_1 = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{3}.$$

On sait alors qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall n \geqslant 2,\ p_n = \alpha r_1^{n-2} + \beta r_2^{n-2}.$$

Pour calculer α et β, on utilise les relations :

$$\begin{cases} p_2 = & 0 = \alpha + \beta \\ p_3 = & \frac{1}{9} = \alpha r_1 + \beta r_2, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = \frac{1}{9(r_1 - r_2)}. \end{cases}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \alpha =& \frac{1}{9(r_1 - r_2)} \\ =& \frac{3}{9 \times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ \text{et } \beta =& -\frac{1}{6\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

ce qui donne au final :

$$\forall n \geqslant 2,\ p_n = \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}\right).$$

(c) On considère la somme partielle de rang $N \geqslant 2$. On a en utilisant les notations $r_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} p_k =& \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\sum_{k=2}^{N} r_1^{k-2} - \sum_{k=2}^{N} r_2^{k-2}\right)\\ =& \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\sum_{k=0}^{N-2} r_1^{k} - \sum_{k=0}^{N-2} r_2^{k}\right).\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}1 <& \sqrt{3} < 2\\ \text{donc } \frac{2}{3} <& \underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}_{r_1} < 1,\end{aligned}$$

ainsi, la série de terme général r_1^k converge car $r_1 \in]0,1[$. Cela donne :

$$\sum_{k\geqslant 0} r_1^k \text{ converge et est égale à } \frac{1}{1-r_1}.$$

De même, on a :

$$-\frac{1}{3} < \underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{3}}_{r_2} < 0$$

et la série de terme général r_2^k converge.
On en déduit que la série de terme général p_k converge et

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 2} p_k =& \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\sum_{k\geqslant 0} r_1^{k} - \sum_{k\geqslant 0} r_2^{k}\right)\\ =& \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1-r_1} - \frac{1}{1-r_2}\right).\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}1 - r_1 =& \frac{1}{3}(2-\sqrt{3})\\ \text{et donc } \frac{1}{1-r_1} =& \frac{3}{2-\sqrt{3}} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{2^2-3} = 3(2+\sqrt{3}),\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}1 - r_2 =& \frac{1}{3}(2+\sqrt{3})\\ \text{et donc } \frac{1}{1-r_2} =& \frac{3}{2+\sqrt{3}} = 3(2-\sqrt{3}).\end{aligned}$$

On obtient alors : $\frac{1}{1-r_1} - \frac{1}{1-r_2} = 6\sqrt{3}$, et donc :

$$\sum_{k\geqslant 2} p_k = 1.$$

Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 2} p_k$ converge vers 1.
Pour comprendre ce résultat, notons E l'événement « *trois numéros identiques apparaissent* », il est clair que l'événement E est l'union des événements $X = k$, cette union étant disjointe, car l'événement $X = k$ concerne la première fois où trois numéros identiques apparaissent.
On en déduit l'égalité :

$$E = \bigcup_{k\geqslant 2} (X = k) \quad \text{union disjointe,}$$

et donc :

$$p(E) = \sum_{k \geqslant 2} p(X = k) = \sum_{k \geqslant 2} p_k = 1.$$

Ainsi, l'événement E est certain, ce qui est conforme à l'intuition : une séquence de trois numéros identiques finira par apparaître si on a fait une infinité de tirages.

(d) Pour montrer que X admet une espérance, on forme la somme partielle :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} np(X = n) &= \sum_{n=2}^{N} np_n \\ &= \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(\sum_{n=2}^{N} nr_1^{n-2} - \sum_{n=2}^{N} nr_2^{n-2} \right) \\ &= \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(\frac{1}{r_1^2} \sum_{n=2}^{N} nr_1^n - \frac{1}{r_2^2} \sum_{n=2}^{N} nr_2^n \right).\end{aligned}$$

On utilise alors le résultat :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \sum_{n \geqslant 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

On applique alors à r_1 qui est bien un réel de $]-1, 1[$ (voir la question précédente). Cela donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n \geqslant 2} nr_1^n &= \sum_{n \geqslant 0} nr_1^n - r_1 \\ &= \frac{r_1}{(1-r_1)^2} - r_1 \\ &= r_1 \left(\frac{1-(1-r_1)^2}{(1-r_1)^2} \right) \\ &= \frac{r_1^2(2-r_1)}{(1-r_1)^2}.\end{aligned}$$

Et de manière symétrique :

$$\sum_{n \geqslant 2} nr_2^n = \frac{r_2^2(2-r_2)}{(1-r_2)^2}.$$

Ainsi :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} np(X = n) = \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(\frac{2-r_1}{(1-r_1)^2} - \frac{2-r_2}{(1-r_2)^2} \right).$$

On en déduit que la série : $\sum_{n \geqslant 2} np(X = n)$ converge absolument puisqu'il s'agit d'une série de termes positifs.

Ainsi, X admet une espérance, avec $E(X) = \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(\frac{2-r_1}{(1-r_1)^2} - \frac{2-r_2}{(1-r_2)^2} \right)$.

Il reste à simplifier cette expression :

$$\begin{aligned}\frac{2-r_1}{(1-r_1)^2} &= \frac{1-r_1}{(1-r_1)^2} + \frac{1}{(1-r_1)^2} \\ &= \frac{1}{1-r_1} + \frac{1}{(1-r_1)^2},\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$(*) \qquad \begin{aligned}\frac{2-r_1}{(1-r_1)^2} - \frac{2-r_2}{(1-r_2)^2} &= \frac{1}{1-r_1} - \frac{1}{1-r_2} \\ &\quad + \frac{1}{(1-r_1)^2} - \frac{1}{(1-r_2)^2}\end{aligned}$$

On a déjà vu à la question précédente la relation :

$$(**) \qquad \frac{1}{1-r_1} - \frac{1}{1-r_2} = 6\sqrt{3}.$$

Il reste à calculer :

$$\begin{aligned}
(1-r_1) &= \frac{1}{3}\left(2-\sqrt{3}\right), \\
\text{ce qui donne } (1-r_1)^2 &= \frac{1}{9}\left(7-4\sqrt{3}\right), \\
\text{et } \frac{1}{(1-r_1)^2} &= 9\frac{1}{7-4\sqrt{3}} \\
&= 9\frac{7+4\sqrt{3}}{49-16\times 3} = 9(7+4\sqrt{3})
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
(1-r_2) &= \frac{1}{3}\left(2+\sqrt{3}\right), \\
\text{ce qui donne } (1-r_2)^2 &= \frac{1}{9}\left(7+4\sqrt{3}\right), \\
\text{et } \frac{1}{(1-r_2)^2} &= 9\frac{1}{7+4\sqrt{3}} \\
&= 9\frac{7-4\sqrt{3}}{49-16\times 3} = 9(7-4\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

On en déduit : $\frac{1}{(1-r_1)^2} - \frac{1}{(1-r_2)^2} = 72\sqrt{3}$, et donc, en utilisant les relations $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\frac{2-r_1}{(1-r_1)^2} - \frac{2-r_2}{(1-r_2)^2} = 78\sqrt{3}.$$

Au final :

$$E(X) = \frac{1}{6\sqrt{3}} \times 78\sqrt{3} = 13.$$

Ainsi, l'espérance de la variable aléatoire X est 13.

Exercice 21 On considère deux lois de probabilités :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_\lambda(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \text{ et } \delta_0(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour p réel fixé dans $]0,1[$, on pose : $P = (1-p)P_\lambda + p\delta_0$.

1. Montrer que P est une loi de probabilité. Calculer l'espérance et la variance d'une variable de loi P (si elles existent).
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi P. On pose $Y_n = \mathrm{Card}\left\{k \in [\![1,n]\!] \,/\, X_k = 0\right\}$. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
3. Soit $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer son espérance et sa variance (si elles existent).
4. Déterminer $cov(Y_n, Z_n)$.

---

1. Il s'agit de vérifier les deux conditions :
   - ⋆ $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \geqslant 0$,
   - ⋆ la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(k)$ converge et est égale à 1.

   Pour la première condition, on a :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) &= (1-p)P_\lambda(k) + p\underbrace{\delta_0(k)}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant \underbrace{(1-p)}_{\geqslant 0} P_\lambda(k) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la première condition est bien vérifiée.
Pour la seconde, considérons la somme partielle de rang N, avec $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} P(k) =&(1-p)\sum_{k=0}^{N} P_\lambda(k) + p\sum_{k=0}^{N} \delta_0(k)\\ =&(1-p)\sum_{k=0}^{N} P_\lambda(k) + p.\end{aligned}$$

En effet, dans la somme $\sum_{k=0}^{N} \delta_0(k)$, un seul terme est non nul : le terme pour $k=0$, qui vaut 1.
L'étude des variables aléatoires de Poisson donne la relation :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} P_\lambda(k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P_\lambda(k) = 1,$$

ce qui donne :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} P(k) = (1-p)+p.$$

On en déduit que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(k)$ converge et est égale à 1.
Les deux conditions sont donc bien vérifiées et P est bien une loi de probabilité.
Soit maintenant X une variable aléatoire de loi P. On va montrer que X admet une espérance en montrant que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} kp(X=k)$ converge absolument.
Comme il s'agit d'une série à termes positifs, on considère la somme partielle de rang $N \geqslant 1$, et on étudie la limite de cette somme lorsque N tends vers $+\infty$.
On a pour $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} kp(X=k) =& \sum_{k=1}^{N} kP(k)\\ =&(1-p)\sum_{k=1}^{N} kP_\lambda(k) + p\sum_{k=1}^{N} k\delta_0(k)\\ =&(1-p)\sum_{k=1}^{N} kP_\lambda(k).\end{aligned}$$

En effet, $\sum_{k=1}^{N} k\delta_0(k)$ est nulle, puisqu'on a $\forall k>0$, $\delta_0(k)=0$.
La probabilité de l'événement $\Big(X=0\Big)$ n'influe pas sur l'espérance. On a aussi enlevé le terme pour $k=0$ de la somme, puisque ce terme est évidemment nul.
D'autre part, puisque P_λ est la loi de Poisson, on retrouve l'espérance d'une variable de Poisson :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N} kP_\lambda(k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} kP_\lambda(k) = \lambda$$

On voit alors que :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N} kp(X=k) = (1-p)\lambda.$$

Ainsi, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} kp(X=k)$ converge (absolument) et donc X admet une espérance qui est égale à $(1-p)\lambda$.
Pour la variance, on utilise la propriété de Koenig-Huyghens :

$$var(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

et on procède de même en utilisant la somme partielle de rang N

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k^2 p(X=k) &= \sum_{k=1}^{N} k^2 P(k)\\ &=(1-p)\sum_{k=1}^{N} k^2 P_\lambda(k) + p\sum_{k=1}^{N} k^2 \delta_0(k)\\ &=(1-p)\sum_{k=1}^{N} k^2 P_\lambda(k).\end{aligned}$$

Considérons $Y \sim \mathscr{P}(\lambda)$, on sait alors que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 p(Y=k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 P_\lambda(k)$ converge et est égale à $E(Y^2)$. On calcule facilement avec Koenig-Huyghens :

$$E(Y^2) = var(Y) + (E(Y))^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda(1+\lambda).$$

On en déduit que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 p(X=k)$ converge (absolument puisqu'elle est à termes positifs) et donc que X admet un moment d'ordre 2, donc une variance.
Plus précisément :

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 p(X=k) = (1-p)E(Y^2)\\ &=(1-p)\lambda(1+\lambda).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}var(X) &=E(X^2) - (E(X))^2\\ &=(1-p)\lambda(1+\lambda) - [(1-p)\lambda]^2\\ &=(1-p)\lambda\left[(1+\lambda) - (1-p)\lambda\right].\end{aligned}$$

En conclusion, P est une loi de probabilité et si X est une variable aléatoire de loi P, alors X admet une espérance et une variance, avec

$$E(X) = (1-p)\lambda \text{ et } var(X) = (1-p)\lambda\left[(1+\lambda) - (1-p)\lambda\right].$$

2. La variable Y_n est le nombre de variables X_k égales à 0, avec $k \in [\![1,n]\!]$. Considérons le schéma de Bernoulli suivant : on compte un succès lorsqu'une variable X_k est égale à 0, pour $k \in [\![1,n]\!]$, échec sinon.
Les variables (X_k) étant indépendantes et de même loi, il s'agit bien d'un schéma de Bernoulli de probabilité de succès $p(X=0)$, où X est une variable aléatoire qui suit la loi P.
La variable Y_n est alors le nombre de succès dans ce schéma de n tirages de Bernoulli, et donc Y_n suit une loi binomiale de paramètres $(n, p(X=0))$.
Calculons la probabilité de succès : $p(X=0)$. On a :

$$\begin{aligned}p(X=0) &=P(0) = (1-p)P_\lambda(0) + p\\ &=(1-p)e^{-\lambda} + p\\ &=e^{-\lambda} + p\left(1-e^{-\lambda}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la loi de Y_n : $Y_n \sim \mathscr{B}\left(n, e^{-\lambda} + p\left(1-e^{-\lambda}\right)\right)$.
On en déduit la valeur de l'espérance

$$E(Y_n) = n\left(e^{-\lambda} + p\left(1-e^{-\lambda}\right)\right)$$

et la valeur de la variance :

$$\begin{aligned}var(Y_n) &=n\left(e^{-\lambda} + p\left(1-e^{-\lambda}\right)\right)\left(1-e^{-\lambda} - p\left(1-e^{-\lambda}\right)\right)\\ &=n\left(e^{-\lambda} + p\left(1-e^{-\lambda}\right)\right)\left(1-e^{-\lambda}\right)(1-p).\end{aligned}$$

3. Comme l'espérance est linéaire, on a :

$$E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Il reste donc à calculer l'espérance des variables X_i. Comme ce sont des variables aléatoires de même loi, c'est l'espérance d'une variable X qui suit la loi P. On a donc :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ E(X_i) = (1-p)\lambda.$$

On obtient ainsi, l'espérance de Z_n :

$$E(Z_n) = (1-p)\lambda.$$

On procède de même pour la variance en utilisant la formule sur la variance d'une somme :

$$\begin{aligned} var(Z_n) =& \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ =& \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} var(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(X_i,X_j)\right) \\ =& \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X) = \frac{1}{n} var(X). \end{aligned}$$

En effet, les variables (X_k) étant indépendantes et de même loi, on a :
- les covariances $cov(X_i,X_j)$ sont nulles pour $i \neq j$,
- les variances $var(X_i)$ sont égales pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ à la variance de la variable X, où X suit la loi P.

Comme $var(X) = (1-p)\lambda\left[(1+\lambda)-(1-p)\lambda\right]$, on en déduit la variance de Z_n :

$$var(Z_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X) = \frac{1-p}{n}\lambda\left[(1+\lambda)-(1-p)\lambda\right].$$

On peut calculer l'espérance et la variance de Z_n grâce à la linéarité de l'espérance et à la formule de la variance d'une somme sans avoir la loi de Z_n.

4. Notons $\left(\varepsilon_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite de variables aléatoires définies ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \varepsilon_k = \begin{cases} 0 & \text{si } X_k \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables ε_k sont des variables de Bernoulli, de même paramètre

$$p(\varepsilon_k = 1) = p(X_k = 0) = e^{-\lambda} + p\left(1-e^{-\lambda}\right).$$

De plus, comme ε_k ne dépend que de X_k et que les variables aléatoires $\left(X_k\right)$ sont indépendantes, les variables aléatoires $\left(\varepsilon_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont aussi indépendantes.
Enfin, on a clairement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k.$$

Cette écriture va permettre de calculer $cov(Y_n,Z_n)$. Pour cela, on va utiliser les propriétés sur la covariance d'une somme :

$$\begin{aligned} cov(Y_n,Z_n) =& cov\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \\ =& \sum_{i=1}^{n} cov\left(\varepsilon_i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \\ =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov\left(\varepsilon_i, X_j\right). \end{aligned}$$

On doit donc calculer une somme double.
Considérons tout d'abord $i \neq j$, la variable ε_i ne dépend que de la variable X_i, et donc, puisque $i \neq j$ et que les variables $\left(X_k\right)$ sont indépendantes, on en déduit que X_j et ε_i sont indépendantes. En particulier, pour tout $i \neq j$ on a $cov\left(\varepsilon_i, X_j\right) = 0$. La somme double se réduit donc à une somme simple, ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$cov(Y_n, Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cov\left(\varepsilon_i, X_i\right).$$

Considérons maintenant $i \in [\![1, n]\!]$, et calculons cette covariance. On utilise pour cela la définition :

$$cov\left(\varepsilon_i, X_i\right) = E(\varepsilon_i X_i) - E(X_i)E(\varepsilon_i).$$

Or, la variable $\varepsilon_i X_i$ est une variable certaine égale à 0, puisque si $X_i \neq 0$, on a par définition $\varepsilon_i = 0$. On en déduit en particulier que $E(\varepsilon_i X_i) = 0$. On a ensuite les formules :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_i) =& p(\varepsilon_i = 1) = e^{-\lambda} + p\left(1 - e^{-\lambda}\right) \\ E(X_i) =& (1-p)\lambda. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$cov\left(\varepsilon_i, X_i\right) = (1-p)\lambda\left[e^{-\lambda} + p\left(1 - e^{-\lambda}\right)\right].$$

On en déduit la covariance de (Y_n, Z_n) :

$$\begin{aligned} cov(Y_n, Z_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cov\left(\varepsilon_i, X_i\right) \\ &= (1-p)\lambda\left[e^{-\lambda} + p\left(1 - e^{-\lambda}\right)\right]. \end{aligned}$$

Exercice 22 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On définit alors une variable aléatoire Y par :

$$Y = \begin{cases} 0 \text{ si } N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k \text{ si } N \neq 0 \end{cases}$$

1. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $S_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} X_k$.
2. Calculer $p(Y = 0)$, puis $p(Y = r)$ pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer l'espérance de Y (si elle existe).

Correction :

1. La variable aléatoire S_r est le nombre de variables X_k pour $k \in [\![1, r]\!]$ qui sont égales à 1. Comme les variables de Bernoulli (X_k) sont indépendantes de même loi, c'est donc le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli (ou succès signifie qu'une variable X_k vaut 1).
   La variable S_r est donc une variable binomiale de paramètres (r, p). Ainsi : $S_r \sim \mathscr{B}(r, p)$.
2. On utilise le système complet d'événements associé à la variable aléatoire N, cela donne :

$$\begin{aligned} p(Y = 0) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} p(Y = 0 \cap N = k) \\ &= p(Y = 0 \cap N = 0) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} p(Y = 0 \cap N = k) \\ &= p(N = 0) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} p(N = k) p_{N=k}(Y = 0) \\ &= p(N = 0) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} p(N = k)(1-p)^k. \end{aligned}$$

   En effet,

- si $N=0$, on a clairement $Y=0$,
- sachant $N=k$ avec $k\in\mathbb{N}^*$, on a $Y=\sum_{j=1}^{k} X_j$, et donc Y suit la loi de la variable S_k de la question précédente, et donc

$$p_{N=k}(Y=0)=p(S_k=0)=(1-p)^k.$$

Comme $p(N=0)=p(N=0)(1-p)^0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
p(Y=0)&=\sum_{k\in\mathbb{N}} p(N=k)(1-p)^k\\
&=\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}(1-p)^k\\
&=e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}\\
&=e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $p(Y=0)=e^{-\lambda p}$.
Soit maintenant $r\in\mathbb{N}^*$, on utilise la même technique pour calculer $p(Y=r)$:

$$\begin{aligned}
p(Y=r)&=\sum_{k\in\mathbb{N}} p(Y=r\cap N=k)\\
&=\sum_{k\geqslant r} p(Y=r\cap N=k).
\end{aligned}$$

En effet, si $k<r$, l'événement $\Big(Y=r\cap N=k\Big)$ est impossible. On en déduit :

$$\begin{aligned}
p(Y=r)&=\sum_{k\geqslant r} p(N=k)p_{N=k}(Y=r)\\
&=\sum_{k\geqslant r} p(N=k)\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r},
\end{aligned}$$

car sachant l'événement $\Big(N=k\Big)$, Y suit la loi de la variable S_k définie à la question précédente, et donc

$$p_{N=k}(Y=r)=p(S_k=r)=\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}.$$

On continue alors le calcul en factorisant dans la somme tous les termes qui ne dépendent pas de k :

$$\begin{aligned}
p(Y=r)&=\sum_{k\geqslant r} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}\\
&=e^{-\lambda}p^r\sum_{k\geqslant r}\frac{\lambda^k}{\cancel{k!}}\frac{\cancel{k!}}{r!(k-r)!}(1-p)^{k-r}\\
&=e^{-\lambda}p^r\lambda^r\frac{1}{r!}\sum_{k\geqslant r}\lambda^{k-r}\frac{1}{(k-r)!}(1-p)^{k-r}.
\end{aligned}$$

Simplifions la somme en effectuant un changement de variable dans la somme partielle pour $N\geqslant r$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{N}\lambda^{k-r}\frac{1}{(k-r)!}(1-p)^{k-r}&=\sum_{k=0}^{N-r}\lambda^k\frac{1}{k!}(1-p)^k\\
&=\sum_{k=0}^{N-r}(\lambda(1-p))^k\frac{1}{k!}\\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{}\sum_{k\in\mathbb{N}}(\lambda(1-p))^k\frac{1}{k!}\\
&=e^{\lambda(1-p)}.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(Y=r) =& e^{-\lambda} p^r \lambda^r \frac{1}{r!} e^{\lambda(1-p)} \\ =& e^{-\lambda p} \frac{(p\lambda)^r}{r!}.\end{aligned}$$

Comme on a vu que $p(Y=0) = e^{-\lambda p}$, on reconnaît une loi de Poisson de paramètre λp. Ainsi, $Y \sim \mathscr{P}(\lambda p)$.

3. On déduit de la relation $Y \sim \mathscr{P}(\lambda p)$, que la variable Y admet une espérance avec $E(Y) = \lambda p$.

Exercice 23 Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$, et Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p \in]0,1[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p(Y=k) = p(1-p)^k$$

On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer $p(X=0, Y=0)$, puis $p(X=Y)$.
2. Déterminer les valeurs propres de $M(a,b) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, en fonction de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
3. On considère maintenant la matrice aléatoire $M(X,Y)$, notée plus simplement M. Déterminer la probabilité que M soit inversible, puis la probabilité que ses valeurs propres soient deux à deux distinctes.

R Cet exercice utilise la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ ou loi géométrique retardée.
La notion de matrice diagonalisable sera vue plus tard dans l'année.

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned}p(X=0, Y=0) =& p(X=0)p(Y=0) \qquad \text{par indépendance,} \\ =& e^{-\alpha} p.\end{aligned}$$

Pour calculer $p(X=Y)$, on utilise le système complet d'événements associé à la variable X :

$$\begin{aligned}p(X=Y) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=Y, X=k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=k, Y=k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=k)p(Y=k) \qquad \text{par indépendance,}\end{aligned}$$

En utilisant les lois données, on a :

$$\begin{aligned}p(X=Y) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \times p(1-p)^k \\ &= pe^{-\alpha} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(\alpha(1-p))^k}{k!} \\ &= pe^{-\alpha} e^{\alpha(1-p)} = pe^{-\alpha p}.\end{aligned}$$

On reconnaît en effet la série exponentielle.
En conclusion, on a donc :

$$p(X=0, Y=0) = e^{-\alpha} p \qquad \text{et} \qquad p(X=Y) = pe^{-\alpha p}.$$

2. On considère $\lambda \in \mathbb{C}$, et on calcule le rang de $M(a,b) - \lambda I_3$.
Considérons tout d'abord le cas $a = 0$, on a alors :

$$M(0,b) - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix}.$$

Il est alors clair dans ce cas que $\text{Spe}(M) = \left\{0, b\right\}$.
Si $a \neq 0$, on utilise la réduction de Gauss, qui donne :

$$\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix} -a-\lambda & a & 0 \\ 2a & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix} 2a & -\lambda & 0 \\ -a-\lambda & a & 0 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix} & \begin{array}{c} l_2 \\ l_1 \\ l_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2a & -\lambda & 0 \\ 0 & 2a^2-\lambda(a+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix} & \begin{array}{c} l_1 \\ l_1 \leftarrow 2al_2+(a+\lambda)l_1 \\ l_3 \end{array}
\end{array}$$

Cette dernière opération est bien inversible puisque $a \neq 0$.
On en déduit que la matrice $M(a,b) - \lambda I_3$ est inversible dans le cas $a \neq 0$ si et seulement si

$$\lambda \neq b \qquad \text{et} \qquad \lambda(a+\lambda) - 2a^2 \neq 0.$$

Il reste donc à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
\lambda(a+\lambda) - 2a^2 =& 0 \\
\lambda^2 + \lambda a - 2a^2 =& 0.
\end{aligned}$$

Cette équation de degré 2 admet a comme solution évidente, on obtient alors facilement : $\lambda^2 + \lambda a - 2a^2 = (\lambda - a)(\lambda + 2a)$.
On en déduit que dans le cas où $a \neq 0$, $\text{Spe}(M) = \left\{a, -2a, b\right\}$.
Cette écriture étant aussi valable dans le cas $a = 0$, on peut conclure en écrivant :

$$\text{Spe}\Big(M(a,b)\Big) = \left\{a, -2a, b\right\}.$$

Cette écriture ne signifie pas que M a trois valeurs propres distinctes.

3. On a :

$$\begin{aligned}
M \text{ inversible} \Longleftrightarrow& 0 \notin \text{Spe}(M) \\
\Longleftrightarrow& \text{l'événement } \Big(X \neq 0 \cup Y \neq 0\Big) \text{ est réalisé.}
\end{aligned}$$

En effet, d'après le calcul ci-dessus, on a $\text{Spe}(M) = \left\{X, -2X, Y\right\}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
p\,(M \text{ non inversible}) =& p(X = 0, Y = 0) \\
=& pe^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$p\,(M \text{ inversible}) = 1 - pe^{-\alpha}.$$

Les valeurs propres de M étant $\left\{X, -2X, Y\right\}$, on a :

- si $X \neq 0$, alors $X \neq -2X$, et $Y \neq -2X$, car $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Ainsi dans ce cas les valeurs propres sont deux à deux distinctes si et seulement si $Y \neq X$.
- si $X = 0$, alors $X = -2X$, et donc les valeurs propres ne sont pas distinctes deux à deux, quelle que soit la valeur de Y.

Notons alors E l'événement « , les valeurs propres de M sont distinctes deux à deux ». La discussion précédente permet d'affirmer que :

$$\begin{aligned}
p(\overline{E}) =& p(X = 0 \cup X = Y) \\
=& p\big(X = 0 \cup ((X \neq 0) \cap (X = Y))\big) \\
=& p(X = 0) + p\,((X \neq 0) \cap (X = Y)),
\end{aligned}$$

puisque les événements $X = 0$ et $X \neq 0$ sont incompatibles.
On a $p(X = 0) = e^{-\alpha}$, et

$$\begin{aligned}
p(X = Y) =& p(X = 0 \cap X = Y) \\
&+ p(X \neq 0 \cap X = Y) \\
\text{soit } p(X \neq 0 \cap X = Y) =& p(X = Y) - p(X = 0 \cap X = Y) \\
\text{c'est-à-dire } p(X \neq 0 \cap X = Y) =& p(X = Y) - p(X = 0 \cap Y = 0) \\
=& pe^{-\alpha p} - pe^{-\alpha}
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$p(\overline{E}) = e^{-\alpha} + pe^{-\alpha p} - pe^{-\alpha},$$

puis :

$$p(E) = 1 - e^{-\alpha} - pe^{-\alpha p} + pe^{-\alpha}.$$

La probabilité que M ait trois valeurs propres distinctes est donc : $1 - e^{-\alpha} - pe^{-\alpha p} + pe^{-\alpha}$.

3 — Suites et séries de fonctions

Dans la suite, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ et les fonctions sont définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (on notera $\mathbb{K}$).

I Convergence d'une suite de fonctions

Dans cette section, on étudie la convergence d'une suite de fonctions (f_n) définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ vers une fonction f définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I.1 Mode de convergence d'une suite de fonctions

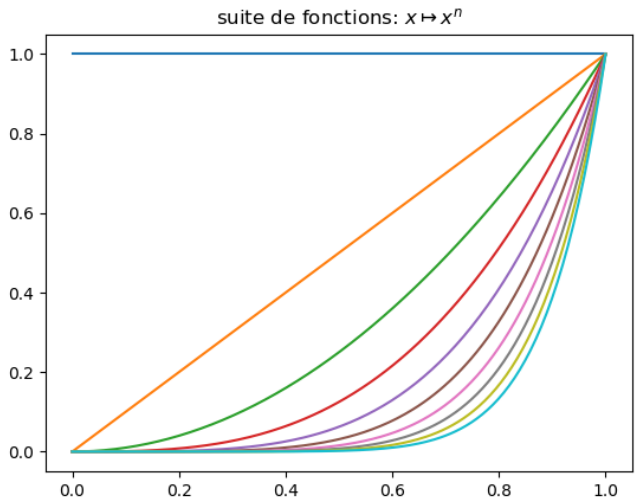
✯ Convergence simple

Définition I.1 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \to \mathbb{K}$.
On dit que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f sur I si :

$$\forall x \in I,\ \lim_{n\infty} f_n(x) = f(x).$$

La convergence simple est donc la convergence « points par points » : pour $x \in I$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On peut aussi dire que c'est la convergence obtenue en considérant x comme un paramètre.
On voit en particulier qu'il y a unicité de la limite simple, ainsi que les propriétés usuelles : si (f_n) et (g_n) converge simplement vers f et g, alors $(f_n g_n)$ converge simplement vers fg et $f_n + g_n$ converge simplement vers $f + g$.

■ **Exemple I.1** Si on considère $f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n$, alors la suite de fonction (f_n) converge vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



■

On n'écrit jamais $\lim\limits_{n\infty} f_n$, cela n'a pas de sens. En particulier parce qu'il y a deux notions de convergence pour les fonctions.

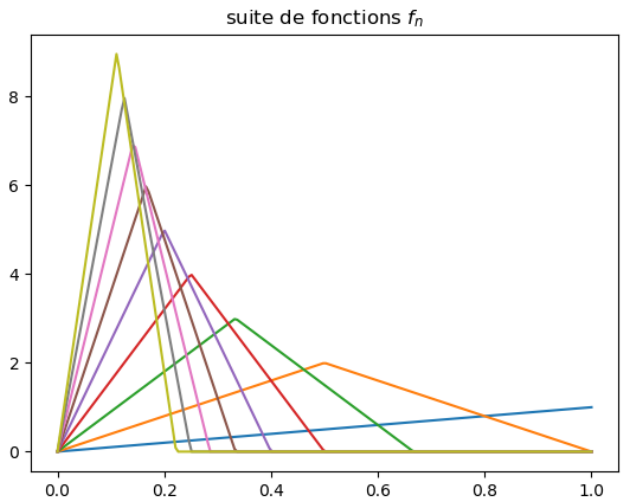
On écrit « f_n converge simplement vers f ».

■ **Exemple I.2** On considère la suite de fonctions $\left(f_n\right)$ définie ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \longmapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

alors la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Puisque pour $x \in]0,1]$, on a à partir d'un certain rang $\frac{2}{n} < x$ et donc $f_n(x) = 0$. Pour $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ pour toutes les valeurs de x.



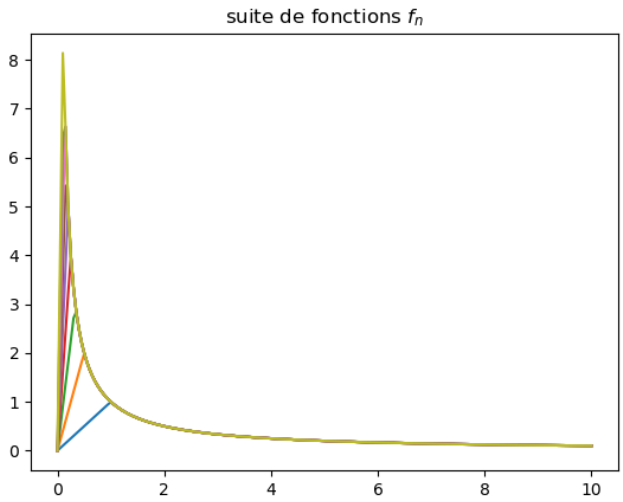
■

■ **Exemple I.3** On définit la suite de fonction (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \longmapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\end{cases}$$

On voit que la suite (f_n) converge vers la fonction :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$



■

Dans le premier exemple, on a une suite de fonctions continues qui converge vers une fonction non continue. Dans le deuxième exemple, on a une suite de fonctions continues vérifiant $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ qui converge vers une fonction f telle que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.
Enfin, le troisième exemple permet de montrer qu'une suite de fonctions bornées peut converger simplement vers une fonction non bornée.
Il faut donc introduire une nouvelle notion de convergence (plus forte) qui permettent d'assurer que la limite d'une fonction continue est continue et que la limite des intégrales soit l'intégrale de la limite.

L'une des seules propriétés de fonctions qui « passe à la limite simple » est la croissance (au sens large)

Proposition I.1 Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est croissante, alors la fonction f est alors croissante.

Démonstration. Soit $a \leqslant b$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(a) \leqslant f_n(b) \text{ donc } f(a) \leqslant f(b)$$

Ainsi f est croissante. ■

Le résultat est faux avec strictement croissante, vu que l'on passe à la limite dans les inégalités larges.

Méthode : pour étudier la convergence simple, on fixe $x \in I$ et on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'expression de $f_n(x)$.
Il arrive souvent que l'on ait besoin de faire une disjonction des cas selon la valeur de x.

☆ Convergence uniforme

Définition I.2 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \to \mathbb{K}$.
On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \implies \forall x \in I,\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon\Big)$$

La convergence simple c'est donc :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \implies |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon\Big)$$

tandis que la convergence uniforme c'est :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(n \geqslant n_0 \implies \forall x \in I,\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon\Big)$$

La différence est donc que le rang n_0 ne dépends pas de x (il est uniforme pour tous les x).

Interprétation géométrique : pour $\varepsilon > 0$ fixé, on construit le « tube » autour de $\mathscr{C}_f$ de largeur ε. Pour n assez grand, toutes les courbes représentatives des fonctions f_n sont dans ce tube.

■ **Exemple I.4** On peut étudier la convergence uniforme de $x \mapsto x^n$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. ■

Un autre point de vue que l'on va revoir plus bas est le suivant : en utilisant $\varepsilon = 1$ dans la définition, on voit qu'à partir d'un certain rang $f_n - f$ est bornée. On peut donc considérer $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$.

On peut alors changer la définition :

Proposition I.2 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \to \mathbb{K}$.
La suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si :

$$\lim_{n\infty} \left(\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Démonstration. La preuve est très simple car on peut remplacer la proposition :

$$\forall x \in I,\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

par la proposition équivalente :

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

■

Ainsi, la convergence uniforme est la convergence de la suite de réels

$$\left(\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Le problème est que cette suite de réel n'est pas toujours facile à calculer.
Parfois, on peut étudier la fonction $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ pour trouver (en utilisant un tableau de variation) la borne supérieure, mais souvent, on utilise une majoration de cette quantité.

✯ La convergence uniforme entraîne la convergence simple

Proposition I.3 Soit (f_n) une suite de fonction qui converge uniformément sur I vers une fonction f, alors la suite (f_n) converge simplement sur I vers f.

Démonstration. Considérons $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$, on a alors d'après la définition de la convergence uniforme l'existence d'un n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. En particulier, $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

On trouve bien la convergence simple.

■

La réciproque est évidement fausse.

■ **Exemple I.5** dans l'exemple de la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto x^n$ sur $[0,1]$. on voit que :

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in[0,1[} |f_n(x)| \\ &\geqslant f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

La convergence n'est pas uniforme ni sur $[0,1]$, ni sur $[0,1[$.

Par contre, si on considère un $a \in]0,1[$, et que l'on regarde la convergence sur $[0,a]$, on a :

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| \\ &= a^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

La convergence est ainsi uniforme sur $[0,a]$ pour tout $a < 1$.

On parle alors de **convergence uniforme sur tout segment** de $[0,1[$.

■

■ **Exemple I.6** Pour le deuxième exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \longmapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

on voit que :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$$

Ainsi, il n'y a pas convergence uniforme ni sur $[0,1]$, ni sur $]0,1]$

Par contre, si on considère $a \in]0,1[$, et que l'on regarde la convergence uniforme sur $[a,1]$, on a :

$$\forall x \in [a,1], \forall n \geqslant \left\lfloor \frac{2}{a} \right\rfloor + 1, f_n(x) = 0$$

et donc on a bien convergence uniforme sur $[a,1]$.

On dit de même qu'il y **convergence uniforme sur tout segment** de $]0,1]$.

■

■ **Exemple I.7** Pour le troisième exemple, fixons $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n \implies \left| f_n\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k}\right) \right| = \left| \frac{n^2}{k} - k \right|$$

Comme

$$\lim_{k\infty} \left| \frac{n^2}{k} - k \right| = +\infty$$

on en déduit que $|f_n - f|$ n'est même pas une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$ ni sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ ni sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par contre, si on fixe $a > 0$, alors pour un n tel que $\frac{1}{n} < a$, on a :

$$\forall x \geqslant a,\ f_n(x) = f(x) \text{ et donc } \sup_{x \geqslant a} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Il y a bien convergence uniforme sur $[a, +\infty[$. Il y a donc convergence uniforme sur tout segment de $]0, +\infty[$. ■

✯ Norme de la convergence uniforme

Définition I.3 Soit $\mathscr{B}(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.

Sur cet espace vectoriel, on considère la norme définie par :

$$\|\cdot\| : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{B}(I,\ K) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \sup_{x \in I}(|\varphi(x)|). \end{array} \right.$$

On appelle cette norme la norme de la convergence uniforme (on dit aussi norme infinie).

Notation I.1. *On note cette norme $\|\varphi\|$ ou encore $\|\varphi\|_\infty$ ou encore $\|\varphi\|_\infty^I$.*

On peut facilement vérifier que c'est bien une norme.

Pour une fonction φ :

$$\begin{aligned} \|\varphi\| = 0 &\iff \sup_{x \in I} |\varphi(x)| = 0 \\ &\iff \forall x \in I,\ \varphi(x) = 0 \\ &\iff \varphi = 0 \text{ ie est la fonction nulle sur } I. \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda\varphi\| &= \sup_{x \in I} |\lambda\varphi(x)| \\ &= |\lambda| \sup_{x \in I} |\varphi(x)| && \text{car } \lambda \text{ est une constante} \\ &= |\lambda| \|\varphi\| \end{aligned}$$

Pour deux fonctions φ et ψ on a l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|\varphi + \psi\| &= \sup_{x \in I} |\varphi(x) + \psi(x)| \\ &\leqslant \sup_{x \in I} (|\varphi(x)| + |\psi(x)|) \\ &\leqslant \sup_{x \in I} |\varphi(x)| + \sup_{x \in I} |\psi(x)| \\ &\leqslant \|\varphi\| + \|\psi\| \end{aligned}$$

On verra dans un prochaine chapitre les normes, mais on peut déjà indiquer que cette norme n'est pas associée à un produit scalaire.

C'est $\|f\|_\infty$ (norme de la fonction) et non $\|f(x)\|_\infty$ (norme du réel $f(x)$) même si parfois l'écriture porte à confusion.
Idéalement, on devrait écrire :

$$\|x \mapsto \sin(x)\|_\infty \text{ et non } \|\sin(x)\|_\infty$$

(même si parfois cela se fait).

Il s'agit de la borne supérieure : cette valeur n'est pas nécessairement atteinte.
De plus,

$$\forall x \in I,\ \|f\|_\infty^I \geqslant |f(x)|$$

Si b est un bords de I et si la fonction admet une limite finie en b, alors :

$$\|f\|_\infty^I \geqslant \lim_{x \to b} |f(x)|$$

Avec ce que l'on a vu précédemment, on obtient :

Proposition I.4 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \to \mathbb{K}$.
La suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si :

$$\lim_{n\infty} \|f_n - f\|_\infty^I = 0.$$

Méthode : pour montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f, on majore $|f_n(x) - f(x)|$ à n fixé, indépendamment de x (mais en fonction de n) par une quantité a_n qui tends vers 0.
On construit ainsi une suite de réels (a_n) qui tends vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n - f\|_\infty \leqslant a_n$$

On peut éventuellement étudier la fonction $|f_n - f|$ (à n fixé) et choisir pour suite a_n la valeur précise de $\|f_n - f\|_\infty$ mais il suffit d'avoir un majorant de cette valeur.

Méthode : pour montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f, on peut étudier la fonction $|f_n - f|$ et calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$.
on peut aussi trouver une suite de réels positifs (b_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n - f\|_\infty \geqslant b_n$$

et que la suite (b_n) ne tends pas vers 0, alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f.
En particulier, on peut choisir pour b_n la valeur de $f_n - f$ en un point x_n bien

choisi. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n - f\|_\infty \geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)|$$

il faut choisir (x_n) pour que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tends pas vers 0.
On peut aussi prendre une limite.

En conséquence de l'inégalité triangulaire, on a la linéarité :

Proposition I.5 si les suites de fonctions (f_n) et (g_n) convergent uniformément vers f et g, alors pour toute valeur de $\alpha \in \mathbb{K}$, la suite de fonctions $(f_n + \alpha g_n)$ converge uniformément vers $f + \alpha g$

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$\|(f_n + \alpha g_n) - (f + \alpha g)\| \leqslant \|f_n - f\| + |\alpha| \|g_n - g\|$$

Le terme de droite tends vers 0. ■

! Si les suites de fonctions (f_n) et (g_n) convergent uniformément vers f et g, alors la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge simplement vers fg mais pas uniformément dans le cas général.

■ **Exemple I.8** Considérons la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n : x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$$

Pour montrer la convergence uniforme de f_n vers $f : x \mapsto \sqrt{x}$, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) - f(x) &= \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{1}{n}}} \\ &\leqslant \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\infty} 0$$

On a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

(par les accroissements finis, on peut majorer $\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}$ par $\frac{1}{n}\frac{1}{2\sqrt{c}}$ où $c \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right]$) ■

✯ Convergence uniforme sur tout segment

L'étude des exemples précédents montre l'intérêt d'introduire une forme faible de la convergence uniforme : la convergence uniforme dès que l'on se restreint à un segment de I. On rappelle que l'on considère un intervalle I et donc que dès que l'on prends $(a,b) \in I^2$, avec $a < b$, on a $[a,b] \subset I$.

Définition I.4 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $f : I \to \mathbb{K}$.

On dit que la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction f si

$$\forall (a,b) \in I^2, \text{ avec } a < b, \text{ la suite } (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,b].$$

Autrement dit si pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la suite de fonction (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

✎ Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors pour toute partie $J \subset I$, on a (f_n) converge uniformément vers f sur J, puisque $\|f_n - f\|_J \leqslant \|f_n - f\|_I$.
La convergence uniforme sur tout segment est donc moins forte que la convergence uniforme.
Pour la convergence simple, la « convergence simple sur tout segment » n'a pas d'intérêt : c'est équivalent à la convergence simple.
Si I est un segment lui-même, la convergence sur tout segment de I signifie la convergence sur I.

✎ La convergence uniforme sur tout segment implique la convergence simple puisque pour tout élément x de I, on peut trouver un segment $[a,b]$ inclus dans I tel que $x \in [a,b]$.

■ **Exemple I.9** Pour reprendre l'exemple de $f_n : x \mapsto x^n$. Soit $[a,b]$ un segment de $[0,1[$, ie on considère deux réels (a,b) avec $0 \leqslant a < b < 1$. On a alors :

$$\|f_n\|_{[a,b]} = b^n \text{ ainsi : } \lim_{n\infty} \|f_n\|_{[a,b]} = 0.$$

On voit :

- Il y a convergence simple sur $[0,1]$.
- Il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1[$.
- Il y a convergence uniforme sur tout segment de $[0,1[$.
- **Attention :** par de convergence uniforme sur tout segment de $[0,1]$

■

✎ L'idée dans l'exemple précédent est que l'on montre la convergence uniforme sur tout segment de $[0,1[$ en prenant une « distance de sécurité » avec 1. Cette idée se retrouve dans plusieurs exemples.

✎ On simplifie parfois les notations : plutôt que prendre tout segment de l'intervalle $]-R,R[$, on se restreint parfois au segment de la forme $[-A,A]$ avec $A < R$. Ou si l'intervalle est $]0,\pi[$, on va parfois considérer tous les segments de la forme $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$.

C'est bien sûr équivalent de traiter tous les segments ou uniquement ceux de cette forme.

Méthode : pour montrer la convergence uniforme de la suite (f_n) sur tout segment de I, on considère un segment quelconque $[a,b]$ de I. On montre alors que :

$$\lim_{n\infty} \|f_n - f\|_{[a,b]} = 0$$

Pour cela, on peut étudier la fonction $f_n - f$ à n fixé pour trouver précisément la valeur de $\|f_n - f\|_{[a,b]}$, ou on peut trouver une suite (α_n) telle que :

$$\forall x \in [a,b], |f_n(x) - f| \leqslant \alpha_n \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\infty} \alpha_n = 0$$

Attention : la suite (α_n) peut dépendre de (a,b).

Autrement dit, on majore $|f_n(x) - f|$ pour $x \in [a,b]$ indépendamment de x, mais en fonction de a et/ou b !

I.2 Régularité de la limite d'une suite de fonctions

✯ Continuité de la limite d'une suite de fonctions

Proposition I.6 Soit f_n une suite de fonctions continues en un point x_0 de I qui converge uniformément vers une fonction f sur I, alors la fonction f est continue en x_0.

En conséquence, si la suite de fonction f_n est continue sur I et converge uniformément vers la fonction f sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration. On considère $\varepsilon > 0$, et le rang n_0 à partir duquel $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. En utilisant la continuité de la fonction f_{n_0} en x_0, on considère ensuite la valeur α tel que :

$$\forall x \in I, \left(|x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

On a alors pour x vérifiant $|x - x_0| \leqslant \alpha$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Le deuxième résultat se déduit en appliquant sur toutes les valeurs x_0. ■

Or la continuité est une propriété locale : si la fonction f est continue sur tout segment de I, alors elle est continue sur I. En effet, si $x \in I$, alors il existe nécessairement un segment $[a,b]$ de I qui contient I, la continuité sur $[a,b]$ entraîne donc la continuité au point x.

On peut donc reformuler le résultat précédent :

Proposition I.7 Soit (f_n) une suite de fonction continues sur I qui converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction f, alors f est continue sur I.

Démonstration. Soit $[a,b]$ un segment de I, alors avec le résultat précédent, f est continue sur $[a,b]$, ainsi f est continue en tout segment donc sur I. ■

■ **Exemple I.10** La suite de fonctions $x \mapsto x^n$ converge vers une fonction continue sur $[0,1[$ (et non sur $[0,1]$!). ■

✯ Théorème de la double limite

Théorème I.8 — de la double limite. Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie).

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite notée l_n en a.

Alors :

- la suite (l_n) admet une limite l
- La fonction f admet une limite en a et cette limite est l.

Démonstration. ADMIS (conformément au programme) ■

On peut donc écrire (dans ces conditions) :

$$\lim_{n\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\infty} f_n(x)\right)$$

Au sens où le théorème affirme que le membre de droite existe et qu'il y a égalité.

! Il faut la vraie convergence uniforme pas la convergence uniforme sur tout segment !

✯ Intégration sur un segment

Proposition I.9 Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Alors la suite de réel $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_n$ converge et on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\infty}\int_a^b f_n(t)dt$$

On peut dire que l'on a échangé les symboles limites et intégrales : la limite des intégrales est l'intégrale des limites.

On peut ainsi écrire :

$$\lim_{n\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\infty} f_n(t)\right)dt$$

Dans ce résultat on se place dans le cas d'une convergence sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Ce résultat est faux sur un intervalle de taille quelconque ! Comme on l'a vu c'est aussi faux si on considère la convergence simple.

Démonstration. Le résultat consiste à utiliser l'inégalité triangulaire pour les inté-

grales :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-f_n(t))\,dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f-f_n(t)|\,dt \\ &\leqslant \int_a^b \|f-f_n\|_\infty dt\end{aligned}$$

puisque $\forall t \in [a,b],\ |f_n(t)-f(t)| \leqslant \|f-f_n\|_\infty$.

On obtient :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt\right| \leqslant (b-a)\|f-f_n\| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, on obtient :

$$\lim_{n\infty}\left|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt\right| = 0 \qquad \text{ie} \qquad \lim_{n\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

■

✎ L'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt\right| \leqslant (b-a)\|f-f_n\|$$

est à retenir. Lorsqu'on intègre sur un intervalle de taille infinie, on ne va pas pouvoir utiliser cette inégalité.

⋆ Dérivation d'une limite

Proposition I.10 Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite des fonctions dérivées (f_n') converge uniformément sur I vers h. On a alors :

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = h$.

Démonstration. Déjà, on peut voir que h est continue comme limite de fonction continue

Considérons $x \in I$ et $x_0 \in I$, on a alors :

$$\begin{aligned}f(x)-f(x_0) &= \lim_{n\infty}(f_n(x)-f_n(x_0)) \\ &= \lim_{n\infty}\left(\int_{x_0}^x f_n'(t)dt\right) && \text{car } f_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \\ &= \int_{x_0}^x \lim_{n\infty} f_n'(t)dt && \text{par convergence uniforme de la suite } (f_n') \\ &= \int_{x_0}^x h(t)dt\end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto f(x)-f(x_0)$ est une primitive de la fonction continue h, c'est donc une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f' = h$. ■

Ce n'est pas un résultat qui permet d'intervertir limite et dérivée. En effet, il faut la convergence uniforme de la suite des fonctions dérivées. On n'a aucun résultat du type : « Si f_n converge uniformément vers f, alors f_n' converge vers f' ». On peut trouver des contre-exemples.

On peut par contre montrer que dans les hypothèses précédentes, la convergence de f_n vers f est en fait uniforme sur tout segment.
En effet, si $[a,b]$ est un segment de I, on a :

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)| &\leqslant |(f_n(x)-f(x))-(f_n(a)-f(a))|+|(f_n(a)-f(a))|\\ &\leqslant \left|\int_a^x (f_n-f)'(t)dt\right|+|(f_n(a)-f(a))|\\ &\leqslant \|(f_n-f)'\|_\infty^I |x-a|+|(f_n(a)-f(a))|\\ &\leqslant \|f_n'-f'\|_\infty^I |b-a|+|(f_n(a)-f(a))|\end{aligned}$$

ainsi :

$$\|f_n-f\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \|f_n'-f'\|_\infty^I |b-a|+|(f_n(a)-f(a))|$$

Comme la convergence de f_n' vers f' est uniforme sur I, on en déduit que :

$$\lim_{n\infty}\|f_n-f\|_\infty^{[a,b]}=0 \text{ et donc la convergence uniforme sur tout segment.}$$

La dérivation est aussi une propriété locale : si une fonction est dérivable sur tout segment de I, alors elle est dérivable sur I. De plus, la valeur $f'(x)$ de la fonction dérivée en un point x ne dépends que du comportement locale de f en x (puisque c'est la limite du taux d'accroissement). On peut donc construire une version faible de la proposition précédente :

Proposition I.11 Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite des fonctions dérivées (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers h.
On a alors :

$$f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \text{ et } f'=h.$$

Il y a de plus de nouveau convergence uniforme de f_n vers f sur tout segment de I (la démonstration est la même).

Démonstration. En prenant un $x\in I$ et un segment $[a,b]$ de I contenant x, on a la convergence uniforme sur $[a,b]$ et donc la dérivabilité en x.

■

☆ Dérivations successives

On peut aussi généraliser au dérivées successives :

Proposition I.12 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle I telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^k$.
- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(j)}\right)$ converge simplement.
- La suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément.

On note alors f la limite simple de la suite de fonctions (f_n). On a alors :

- f est de classe $\mathscr{C}^k$.
- pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $f^{(j)}$ est la limite simple de la suite de fonctions $\left(f_n^{(j)}\right)$

Démonstration. Il suffit d'appliquer récursivement la propriété précédente. ■

Il faut donc convergence simple de toutes les dérivées et convergence uniforme de la dernière. En fait, cette dernière hypothèse implique la convergence uniforme sur tout segment comme on l'a vu dans le cas $k = 1$.

Ici aussi on peut généraliser à la convergence uniforme sur tout segment puisque la dérivation est une propriété locale. :

Proposition I.13 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle I telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^k$.
- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(j)}\right)$ converge simplement.
- La suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur tout segment de I.

On note alors f la limite simple de la suite de fonctions (f_n). On a alors :

- f est de classe $\mathscr{C}^k$.
- pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, $f^{(j)}$ est la limite simple de la suite de fonctions $\left(f_n^{(j)}\right)$

On peut aussi généraliser aux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$:

Proposition I.14 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle I telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur tout segment de I.

On note alors f la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
On a alors :

- f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}$ est la limite de la suite de fonctions $\left(f_n^{(j)}\right)$

R Ces résultats ne peuvent être utilisés que dans le cas (assez rare) où on peut calculer les dérivées successives.

II Convergence d'une série de fonctions

Dans cette section, on étudie la convergence d'une série de fonctions $(\sum f_n)$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ vers une fonction S définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Une série de fonctions $\sum f_n$ est la suite des sommes partielles : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite des sommes partielles est donc une suite de fonctions.

II.1 Mode de convergence d'une série de fonctions

✯ Convergence simple et uniforme

Définition II.1 On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction S sur I, lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur I.

La fonction S est alors définie par :

$$\forall x \in I, \qquad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\infty} S_n(x).$$

On dit que la fonction S est la fonction somme de la série $\sum f_n$ et on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

On appelle alors reste de la série de fonction, la suite de fonctions :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k = S - S_n$$

La suite des restes converge simplement vers la fonction nulle.

La convergence simple est ainsi la convergence de la série $\sum f_n(x)$ pour toute valeur de x (comme si x est un paramètre de la série)

Méthode : pour montrer la convergence simple on fixe x et on étudie la série (numérique donc) $\sum f_n(x)$. On utilise alors les techniques habituelles sur les séries numériques :

- si c'est une série à termes positifs, on essaie une comparaison, ou la règle des $n^\alpha u_n$, ou le critère de d'Alembert,
- si c'est une série à termes quelconque, on regarde si elle est absolument convergente, ou si c'est une série alternée.

On a une définition un peu plus forte que la convergence simple :

Définition II.2 Si pour tout x de I, la série numérique $(\sum f_n(x))$ est absolument convergente, c'est-à-dire si la série de réels positifs $(\sum |f_n(x)|)$ est convergente, alors on dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge absolument.

À x fixé, si la série $(\sum f_n(x))$ est absolument convergente, alors elle est convergente. Cela donne donc :

Proposition II.1 La convergence absolue entraîne la convergence simple.

Comme pour les suites de fonctions la convergence simple n'est pas la bonne notion de convergence : il s'agit uniquement de regarder à x fixé. On introduit alors la convergence uniforme comme pour les suites de fonctions :

Définition II.3 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction S sur I, lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément vers S sur I.

Cette définition impose de calculer explicitement la valeur de S, ce qui n'est pas toujours facile. Or la convergence de (S_n) vers S revient à la convergence du reste vers la fonction nulle. On utilise donc souvent la définition équivalente suivante qui évite de faire référence à la somme :

Définition II.4 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si elle converge simplement et si la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Méthode : Pour montrer la convergence uniforme, il faut donc calculer la limite simple S (ie la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$), puis majorer $|S_n(x) - S(x)|$ pour toute valeur de x (ie majorer $\|S_n - S\|_\infty$).

Autrement dit, il faut trouver une suite de réels (b_n), qui ne dépends pas de x telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |S_n(x) - S(x)| \leqslant b_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\infty} b_n = 0.$$

La plupart du temps, on ne calcule pas $S(x)$, on utilise $|R_n(x)|$. Ainsi, on cherche une suite (b_n) (qui ne dépends pas de x) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |R_n(x)| \leqslant b_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\infty} b_n = 0.$$

Les résultat d'estimation du reste des comparaisons série / intégrale ou pour les séries alternées sont ainsi particulièrement utiles.

■ **Exemple II.1** Considérons la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ sur $[0,1]$.

Pour la convergence simple, on applique le résultat sur les séries alternées : la suite $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ est décroissante et de limite nulle. Donc,

$$\forall x \in [0,1],\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n \text{ est convergente.}$$

Pour la convergence uniforme, on a l'estimation du reste d'une série alternée :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|R_n(x)\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

on a donc convergence uniforme sur $[0,1]$. ■

On voit déjà un abus de langage courant pour l'étude de fonctions. On devrait écrire :

$$\text{Soit la série de fonctions } \sum \left(x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n} x^n \right) \text{ sur } [0,1]$$

$$\text{et non : soit la série de fonctions} \sum \frac{(-1)^n}{n} x^n \text{ sur } [0,1].$$

C'est pratique souvent fait sur les énoncés, mais cette confusion expression / fonction est à éviter.
Il faut donc plutôt définir la fonction f_n et écrire : soit la série de fonctions $\sum f_n$.

■ **Exemple II.2** Considérons la série de fonctions $\sum \frac{1}{x+n^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
La série converge simplement puisqu'à x fixé, on a :

$$\frac{1}{x+n^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \qquad \sum \frac{1}{x+n^2} \text{ est une série à termes positifs} \qquad \text{et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

Pour la convergence uniforme, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x+k^2} \right| \leqslant \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right|$$

ce que l'on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|R_n\|_\infty \leqslant \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right|$$

Or :

$$\lim_{n\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 0 \text{ car c'est le reste d'une série convergente.}$$

■

✯ Convergence normale

En fait avec les séries, on a une troisième notion de convergence :

Définition II.5 La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, lorsque la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Cette dernière définition est assez étonnante : il n'y a pas de référence à la limite, donc on montre la convergence sans calculer la somme. On peut aussi voir que l'on se ramène à l'étude de la convergence d'une série numérique à terme positif.

Méthode : Autrement dit, pour montrer la convergence normale, on construit une suite de réels (α_n) qui ne dépendent pas de x tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n \qquad \text{et} \qquad \sum \alpha_n \text{ est convergente}$$

On peut éventuellement prendre $\alpha_n = \|f_n\|_\infty$ que l'on obtient en étudiant la fonction.

Pour montrer la non convergence normale, on doit minorer $\|f_n\|_\infty$ par une quantité dont la série diverge. Autrement dit, on doit trouver une suite de réels positifs (β_n) qui ne dépendent pas de x tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty \geqslant \beta_n \qquad \text{et} \qquad \sum \beta_n \text{ est divergente}$$

On peut éventuellement prendre $\beta_n = |f_n(x_n)|$ avec x_n bien choisi ou utiliser une limite.

■ **Exemple II.3** Considérons la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

Ainsi, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$.

■

■ **Exemple II.4** Considérons la série $\sum (x(1-x))^n$ sur $[0,1]$.

On étudie rapidement $x \mapsto x(1-x)$, ce qui donne

$$\forall x \in [0,1],\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$$

et donc :

$$\forall x \in [0,1],\ (x(1-x))^n \leqslant \frac{1}{4^n} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{4^n} \text{ converge.}$$

Ainsi, la série est normalement convergente sur $[0,1]$.

■

✯ La convergence normale entraîne la convergence uniforme

Proposition II.2 La convergence normale entraîne la convergence absolue et la convergence uniforme.

Ce résultat est fondamental : cela permet de montrer la convergence sans avoir besoin de calculer la somme.

Il a la même place que le théorème qui assure la convergence d'une série si elle converge absolument.

Méthode : pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, on commence par regarder si il y a convergence normale.

La réciproque n'est pas vraie : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément mais pas normalement, puisque

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{(-1)^n}{n} x^n \right| = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

Démonstration. On suppose donc la convergence normale, ie la convergence de la série : $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|$.

Soit x dans I, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} |f_n(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \|f_n\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ est absolument convergent donc convergente.

D'autre part :

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ |R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_n(x)| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n(x)\| \end{aligned}$$

et donc on a la majoration de la norme infinie du reste :

$$\|R_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n(x)\|$$

or on a :

$$\lim_{n\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n(x)\| = 0 \text{ car c'est le reste d'une série convergente.}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\infty} \|R_n\| = 0$$

ie la convergence uniforme de la suite de fonctions (R_n) vers la fonction nulle et donc la convergence uniforme de la série de fonction $\sum f_n$. ■

✯ Extension à la convergence sur tout segment

Comme pour les suites de fonctions, les notions de convergence uniforme et normale peuvent se décliner sous une forme faible : on peut avoir convergence normale (ou uniforme) sur tout segment de I. Comme pour les suites de fonctions, cela n'a pas d'intérêt pour la convergence simple et cela n'a pas d'intérêt si I est lui-même un segment.

Les définitions (évidentes) sont :

Définition II.6 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction S sur I, si :

- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I
- et si pour tout segment $[a,b]$ de I, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur $[a,b]$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I si : pour tout segment $[a,b]$ de I, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

La notion de convergence uniforme / normale sur tout segment est une notion plus faible que la convergence uniforme / normale sur I entier.

De la même manière, la convergence normale sur tout segment entraîne la convergence uniforme sur tout segment.

Méthode : pour montrer la convergence normale sur tout segment de I, on considère un segment quelconque $[a,b]$ de I, et on cherche une suite de réels (α_n), tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n \qquad \text{et} \qquad \sum \alpha_n \text{ est convergente}$$

Les valeurs (α_n) peuvent dépendre de a et b (et bien sûr n), mais pas de x.

Éventuellement, on peut étudier la fonction $|f_n|$ et poser précisément $\alpha_n = \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$.

Pour montrer la convergence uniforme sur tout segment de I, on commence par regarder la convergence normale sur tout segment de I.

Si ce n'est pas le cas, on considère un segment quelconque $[a,b]$ de I et le reste $R_n(x)$.

On majore $|R_n(x)|$ par une quantité (β_n) qui peut dépendre de a, b et n, mais pas de x. Autrement dit, on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ |R_n(x)| \leqslant \beta_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\infty} \beta_n = 0.$$

Souvent on utilise le théorème sur les séries alternées ou la comparaison avec une intégrale.

Enfin, dans les deux cas, à la place d'un segment $[a,b]$ quelconque, on peut prendre un intervalle d'une forme particulière (ex : $[a,+\infty[$, $[-M,M]$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$) si cela facilite les calculs. À condition bien sûr que la convergence sur tout intervalle de cette forme implique la convergence sur tout segment.

■ **Exemple II.5** Considérons la fonction ζ :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

On cherche tout d'abords l'ensemble de définition, c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $\zeta(x)$ converge (ie on cherche l'ensemble sur lequel il y a convergence simple).

On a pour $x \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x} \text{ est une série de Riemann}$$

Ainsi, la série converge si et seulement si $x > 1$.

On a donc $\mathscr{D} =]1, +\infty[$ et convergence simple sur $\mathscr{D}$.

Regardons si il y a convergence normale sur $]1, +\infty[$. On pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ et on a :

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$$

donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathscr{D}$.

Par contre, si on considère une segment $[a,b]$ quelconque de $\mathscr{D}$, ie on considère (a,b) avec $1 < a < b$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \left|\frac{1}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{n^a}$$

ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{1}{n^a}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge, la série $\sum \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$ il y a donc convergence normale sur tout segment de $\mathscr{D}$.

En conséquence, il y a convergence uniforme sur tout segment de $\mathscr{D}$. ■

R Ici on aurait pu prendre « tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ » plutôt que « tout segment $[a,b]$ ».

II.2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

✯ Continuité de la somme d'une série de fonctions

Proposition II.3 Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I et que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la somme S de la série est continue.

C'est le même résultat que pour une suite de fonctions (puisqu'en fait c'est la suite des sommes partielles). En pratique, on utilise souvent la convergence normale.

Démonstration. On considère la suite des sommes partielles (S_n). Comme chaque fonction f_n est continue, chaque fonction S_n est aussi continue comme somme (finie) de fonctions continues. Comme la suite de fonctions (S_n) converge uniformément vers S, la fonction S est continue. ■

Comme la continuité est une notion locale, on a la même résultat avec une version faible des hypothèses :

Proposition II.4 Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I et que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la somme S de la série est continue.

Démonstration. Si $x \in I$, on peut toujours trouver un segment $[a,b]$ de I qui contient x. On a donc convergence uniforme sur $[a,b]$, donc continuité en x. ■

■ **Exemple II.6** La fonction ζ est donc continue sur $]1,+\infty[$, puisque à n fixé quelconque la fonction $f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^x} = \exp(-x\ln(n))$ est continue et qu'il y a convergence normale (donc uniforme) sur tout segment de $]1,+\infty[$. ■

✯ Théorème de la double limite

Théorème II.5 soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie) ; si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, de somme S, et si, pour tout n, f_n admet une limite l_n en a alors :

- la série $\sum \ell_n$ converge,
- la fonction S admet une limite en a et :

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$$

! Il faut la vraie convergence uniforme pas la convergence uniforme sur tout segment !

Démonstration. ADMIS conformément au programme. ■

✎ Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

on peut donc intervertir $\sum$ (infinie) et limite.

■ **Exemple II.7** Pour la fonction ζ.
Supposons par l'absurde qu'il y a convergence uniforme sur $]1,+\infty[$,
Comme on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to 1} f_n(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$$

on a : la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, ce qui est absurde. On montre ainsi qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]1,+\infty[$. ■

Méthode : Pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément, on peut raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de la double limite.

■ **Exemple II.8** Pour la fonction ζ, cherchons la limite en $+\infty$.
à n, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On a :

- Pour chaque n, la fonction f_n admet une limite en $+\infty$,
- il y a convergence normale sur $[2,+\infty[$.

Ainsi la série $\sum \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ converge (on le savait déjà car la série est nulle à partir du rang 1) et :

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1.$$

■

✯ Intégration sur un segment

Proposition II.6 Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$. On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Alors :

- la série des intégrales $\sum \left(\int_a^b f_n(t)dt \right)$ converge
- et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$$

! Ce résultat s'applique uniquement au cas d'un segment et non à un intervalle quelconque.

Démonstration. Considérons la suite (S_n) des somme partielles. Comme cette suite converge uniformément sur $[a,b]$, la suite $\left(\int_a^b S_n(t)dt \right)$ converge. Or en échangeant somme (finie) et intégrale, on a :

$$\int_a^b S_n(t)dt = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(t)dt$$

ainsi la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(t)dt \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ce qui signifie que la série (numérique) : $\sum \int_a^b f_n(t)dt$ converge.

De plus, on a la relation :

$$\int_a^b \lim_{n\infty} S_n(t)dt = \lim_{n\infty} \int_a^b S_n(t)dt$$

On ré-écrit chaque terme :

$$\begin{aligned}\int_a^b \lim_{n\infty} S_n(t)dt &= \int_a^b \lim_{n\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(t)dt \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)dt\end{aligned}$$

et en intervertissant intégrale et somme finie :

$$\begin{aligned}\lim_{n\infty}\int_a^b S_n(t)dt &= \lim_{n\infty}\int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(t)dt\\ &= \lim_{n\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(t)dt\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^b f_k(t)dt\end{aligned}$$

ce qui s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt$$

■

✯ Dérivation terme à terme

On peut aussi intervertir série et dérivation sous la condition de la convergence uniforme de la série des dérivées.

Proposition II.7 Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I.

Si la série $\sum f_n$ converge simplement et que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors :

- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$
- et :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Très souvent, on va utiliser la convergence normale à la place de la convergence uniforme.

Démonstration. Même idée que précédemment : on applique le résultat vu sur les suites de fonctions à la suite des sommes partielles.

Comme la suite (S_n') converge uniformément et que la suite (S_n) converge simplement, on peut écrire que S est dérivable. De plus :

$$\forall x \in I,\ S'(x) = \lim_{n\infty} S_n'(x)$$

Or par interversion de la dérivation et de la somme finie :

$$S_n' = \sum_{k=0}^{n} f_k'$$

Ainsi :

$$\forall x \in I,\ S'(x) = \lim_{n\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x)$$

■

Ici encore, on a une notion avec des hypothèses plus faibles : il suffit d'avoir la convergence uniforme sur tout segment de I.

Proposition II.8 Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Si la série $\sum f_n$ converge simplement et que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Démonstration. Soit $x \in I$, on peut trouver une segment $[a,b]$ de I tel que $x \in [a,b]$, on a convergence uniforme sur $[a,b]$ donc la dérivabilité en x et la valeur de $S'(x)$. ■

■ **Exemple II.9** Sur la fonction ζ. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathscr{D},\ f_n'(x) = -\ln(n)\exp(-x\ln(n)) = -\frac{\ln(n)}{n^x}$$

Si on considère $[a,b]$ un segment quelconque de $\mathscr{D}$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \left|f_n'(x)\right| = \frac{\ln(n)}{n^x} \leqslant \frac{\ln(n)}{n^a}$$

il faut maintenant montrer que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^a}$ converge. Pour cela, on peut utiliser la règle du $n^\alpha u_n$ en écrivant :

$$n^{\frac{1+a}{2}}\frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{a-1}{2}}} \to 0 \text{ par croissance comparée avec } \frac{a-1}{2} > 0$$

Ainsi :

$$\frac{\ln(n)}{n^a} = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}}\right) \text{ et comme } \sum \frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}} \text{ converge car } \frac{1+a}{2} > 1$$

on en déduit que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^a}$ converge.

Ainsi, il y a convergence normale sur $[a,b]$ et comme $[a,b]$ est quelconque, il y a convergence normale sur tout segment de $\mathscr{D}$. On en déduit la dérivabilité de ζ sur $\mathscr{D}$ et la relation :

$$\forall x > 1,\ \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$$

■

⋆ Dérivations successives

R Ces résultats ne peuvent être utilisés que lorsque l'on peut calculer effectivement les dérivées successives.

On a aussi les mêmes résultats que pour les suites :

Proposition II.9 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle I telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^k$.
- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\left(\sum f_n^{(j)}\right)$ converge simplement.
- La série de fonctions $\left(\sum f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur I.

On note alors S la somme de la série de fonctions $(\sum f_n)$.
On a alors :

- S est de classe $\mathscr{C}^k$.
- pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $S^{(j)}$ est somme de la série de fonctions $\left(\sum f_n^{(j)}\right)$

Et avec des hypothèses plus faibles :

Proposition II.10 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle I telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^k$.
- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\left(\sum f_n^{(j)}\right)$ converge simplement.
- La série de fonctions $\left(\sum f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur tout segment de I.

On note alors S la somme de la série de fonctions $(\sum f_n)$.
On a alors :

- S est de classe $\mathscr{C}^k$.
- pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $S^{(j)}$ est somme de la série de fonctions $\left(\sum f_n^{(j)}\right)$

On peut en particulier montrer que la somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec cette méthode :

Proposition II.11 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle I telles que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$,
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\left(\sum f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément (au moins sur tout segment) de I.

On note alors S la somme de la série de fonctions $(\sum f_n)$. Alors la fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $S^{(j)}$ est somme de la série de fonctions $\left(\sum f_n^{(j)}\right)$.

■ **Exemple II.10** Pour la fonction ζ.

On a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathscr{D},\ f_n(x) = \exp(-x\ln(n))$$

permet de calculer directement les dérivées successives :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathscr{D},\ f_n^{(k)}(x) = (-1)^k (\ln(n))^k \exp(-x\ln(n))$$

Considérons un segment quelconque $[a,b]$ inclus dans $\mathscr{D}$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \left|f_n^{(k)}(x)\right| = (\ln(n))^k \exp(-x\ln(n))$$
$$\leqslant (\ln(n))^k \exp(-a\ln(n)) = \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \|\|f_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$$

Il faut maintenant montrer la convergence de la série :

$$\sum \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$$

on utilise la même méthode que précédemment : on note $\beta = \frac{1+a}{2}$ $\gamma = \frac{a-1}{2}$ si bien que $a = \beta + \gamma$ avec $\gamma > 0$ et $\beta > 1$.

On a :

$$\frac{(\ln(n))^k}{n^a} = \frac{1}{n^\beta}\frac{(\ln(n))^k}{n^\gamma}$$

Or en utilisant les croissances comparées (avec $\frac{\gamma}{k} > 0$), on obtient :

$$\frac{(\ln(n))^k}{n^\gamma} = \left(\underbrace{\frac{\ln n}{n^{\frac{\gamma}{k}}}}_{\to 0}\right)^k \to 0$$

R Raisonnement à retenir : autant que possible, on doit revenir aux croissances comparées usuelles !

Ainsi, on a :

$$\frac{(\ln(n))^k}{n^a} = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

comme la série $\sum \frac{1}{n^\beta}$ converge car $\beta > 1$, par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\dfrac{(\ln(n))^k}{n^a}$ converge.

On en déduit qu'il y a convergence normale de la série $\sum f_n^{(k)}$ sur $[a,b]$ donc sur tout segment de $\mathscr{D}$.

Ainsi, la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 1,\ \zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^k}{n^x}$$

■

Suites et séries de fonctions

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

Exercice 1 Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

$\boxed{1}$ $\left\{\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{nx+3}{x+1}\right) \end{array}\right.$ $\boxed{2}$ $\left\{\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{n+1}\ln\left(\frac{nx+3}{x+1}\right) \end{array}\right.$

$\boxed{3}$ $\left\{\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{x+n} \end{array}\right.$ $\boxed{4}$ $\left\{\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n\frac{\sin x}{x+n} \end{array}\right.$

Correction :
Suite 1 : à $x>0$ fixé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{nx+3}{x+1}\right) = +\infty$$

il n'y a pas de convergence simple.
Suite 2 : On a :

$$\forall x>0,\ f_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\ln(nx+3)-\ln(x+1)\right) = \frac{1}{n+1}\left(\ln(n)+\ln\left(x+\frac{3}{n}\right)-\ln(x+1)\right)$$

On crée le tableau de variation. à n fixé, on a :

$$f_n'(x) = \frac{1}{n+1}\frac{n-3}{(x+1)(nx+3)} \geqslant 0 \text{ pour } n \geqslant 3$$

(nb pour n petit cela n'est pas important). Ainsi, à n fixé, f_n est croissante et varie de $\frac{\ln 3}{n+1}$ à $\frac{\ln n}{n+1}$.
On vérifie les signes, pour affirmer que : $\|f_n\|_\infty^{]0,+\infty[} = \frac{\ln n}{n+1}$ cela tend vers 0, donc il y a convergence uniforme.
Suite 3 : à $x>0$ fixé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x}{x+n} = 0$$

il convergence simple vers la fonction nulle.
CV uniforme :

$$\left|\frac{\sin x}{x+n}\right| \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Donc il y a convergence uniforme.
Suite 4 : à $x>0$ fixé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n\frac{\sin x}{x+n} = \sin x$$

il convergence simple vers la fonction sinus.
Montrons qu'il n'y a pas convergence uniforme, pour cela, on choisit : $x_n = \frac{\pi}{2}+2n\pi$, cela donne :

$$f_n(x_n)-f(x_n) = \frac{n}{\frac{\pi}{2}+n(2\pi+1)}-1 \to \frac{1}{2\pi+1}-1$$

ainsi, $|f_n(x_n)-f(x_n)|$ ne tend pas vers 0, or :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \leqslant |f_n(x_n)-f(x_n)| \leqslant \|f_n-f\|_\infty$$

Ainsi, $\|f_n-f\|_\infty$ ne tend pas vers 0 et il n'y a donc pas convergence uniforme.

Sur un segment $[a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b],\ |f_n(x)-f(x)| &= \left| n\frac{\sin x}{x+n} - \sin x \right| \\ &= |\sin(x)|\,\frac{x}{x+n} \\ &\leqslant \frac{x}{x+n} \leqslant \frac{b}{a+n} \to 0\end{aligned}$$

On peut ensuit voir que sur un intervalle de la forme $]0,b]$ on a :

$$\forall x \in]0,b],\ |f_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{x}{x+n} = 1-\frac{n}{x+n} \leqslant 1-\frac{n}{b+n} \to 0$$

Il y a donc convergence uniforme.

Exercice 2 Étudier la convergence des suites de fonctions :

$\boxed{1}$ $\left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n(1-x)\end{array}\right.$

$\boxed{2}$ $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x^2}\end{array}\right.$

$\boxed{3}$ $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(x+\dfrac{1}{n}\right)^2\end{array}\right.$

$\boxed{4}$ $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(x+\dfrac{e^{-x}}{n}\right)^2\end{array}\right.$

Correction : Suite 1 : Il faut étudier la fonction $x \mapsto x^n(1-x)$ sur $[0,1]$. On constate que :

$$\sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

Le premier terme tends vers e^{-1}, le deuxième vers 0. D'où la convergence uniforme.

Suite 2 : Pour la convergence simple, à x fixé, on a :

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \longrightarrow 0.$$

Pour la convergence uniforme, on a :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \leqslant \|f_n\|$$

donc il n'y a pas convergence uniforme.

On peut aussi faire le tableau de variation sur $\mathbb{R}^+$ (par imparité). La fonction est croissante jusqu'à $\frac{1}{n}$ puis décroissante. Nulle en 0 et en $+\infty$.

Si on considère un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_*^+$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| \leqslant \frac{nb}{1+n^2a} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_*^+$.

Suite 3 : On voit clairement que à x fixé, $\lim_{n\infty} f_n(x) = x^2$. D'où la convergence simple. Pour la convergence uniforme, on a pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)| = \left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 - x^2\right| &= \left|\frac{2}{n}x+\frac{1}{n^2}\right| \\ &= \frac{2}{n}x+\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|f_n-f\|_\infty^{\mathbb{R}^+} \geqslant (f_n-f)(n) = 2+\frac{1}{n^2} \geqslant 2$$

En particulier, ainsi $\|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}^+}$ ne tends pas vers 0 et il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

On va montrer la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}^+$. Pour cela, on considère $M > 0$ fixé et on montre la convergence uniforme sur $[0, M]$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, M],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{2}{n}M + \frac{1}{n^2}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n - f\|_\infty^{[0,M]} \leqslant \frac{2}{n}M + \frac{1}{n^2}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\infty} \|f_n - f\|_\infty^{[0,M]} = 0$$

il y a donc convergence uniforme sur $[0, M]$ et donc convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.

Suite 4 : On voit clairement que à x fixé, $\lim_{n\infty} g_n(x) = x^2$. D'où la convergence simple.

Pour la convergence uniforme, on a :

$$\begin{aligned}|g_n(x) - g(x)| &= \left|\left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right)^2 - x^2\right| \\ &= \frac{2e^{-x}}{n}x + \frac{e^{-2x}}{n^2} = \frac{e^{-x}}{n}\left(2x + \frac{e^{-x}}{n}\right)\end{aligned}$$

Pour majorer on a deux choix :

- étudier la fonction $d : x \longmapsto \frac{e^{-x}}{n}\left(2x + \frac{e^{-x}}{n}\right)$ et calculer la valeur de la norme infinie,
- majorer.

Cela donne pour la première méthode :

$$\begin{aligned}d'(x) &= \frac{e^{-x}}{n}\left(-2x - \frac{e^{-x}}{n} + 2 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \\ &= \frac{e^{-x}}{n}\left(-2x - 2\frac{e^{-x}}{n} + 2\right) \\ &= 2\frac{e^{-x}}{n}\left(-x - \frac{e^{-x}}{n} + 1\right)\end{aligned}$$

C'est du signe de $h : x \mapsto -x - \frac{e^{-x}}{n} + 1$. Il faut re-dériver une seconde fois ....

Pour la deuxième : On a :

$$\left(2x\frac{e^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(2xe^{-x} + \frac{1}{n}\right)$$

en majorant e^{-2x} par 1. On étudie donc simplement $\varphi : x \mapsto xe^{-x}$ ce qui donne :

$$\varphi'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

La plus grande valeur est en $x = 1$ et est e^{-1}. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant 0,\ |g_n(x) - g(x)| \leqslant \frac{1}{n}\left(2e^{-1} + \frac{1}{n}\right)$$

Ainsi, $\lim_{n\infty} \|g_n - g\|_\infty^{\mathbb{R}^+} = 0$ et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}+$

Exercice 3 Soit la suite de fonctions : $f_n :\ x \mapsto \dfrac{\sin(3^n x)}{2^n}$.

Montrer que cette suite de fonctions converge uniformément vers la fonction nulle.

Montrer que la suite de fonctions (f_n') ne converge même pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Correction :
On a pour $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(3^n x)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Ainsi :

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$$

D'où la convergence uniforme vers la fonction nulle.
La suite des dérivées est : $f_n' : x \mapsto \frac{3^n}{2^n}\cos(3^n x)$
Par exemple, pour $x = 2\pi$, on a : $f_n'(2\pi) = \frac{3^n}{2^n} \to +\infty$. La suite (f_n') ne converge donc pas simplement sur $\mathbb{R}$.
REM : Pour x fixé non nul, la suite $u_n = \frac{3^n}{2^n}\cos(3^n x)$ n'a pas de limite mais c'est un peu technique à démontrer.

R Cela montre l'importance de l'hypothèse dans le théorème de dérivation de la limite : c'est la suite des dérivées qui converge uniformément, non la suite de fonctions.

Exercice 4 Soit α un réel, pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = x\left(1 + n^\alpha e^{-nx}\right)$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles (f_n) converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx$.

Correction :
1. à x fixé, on a $\lim_{n\infty} f_n(x) = x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on étudie $g_n : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$. On a :

$$\forall x \geqslant 0,\ g_n'(x) = n^\alpha e^{-nx}(-nx+1)$$

Après le tableau de variation, on voit que la plus grande valeur est pour $x = \frac{1}{n}$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \|g_n\| = n^{\alpha-1}e^{-1}$$

on a convergence vers 0 si et seulement si $\alpha - 1 < 0$.
3. On applique le cas précédent avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\lim_{n\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx &= \int_0^1 \lim_{n\infty} x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx \qquad \text{par convergence uniforme sur } [0,1]\\ &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 5 Soit la suite de fonction (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{array}\right.$$

1. Montrer que chaque fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qui n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Que peut-on en conclure quant au mode de convergence sur $\mathbb{R}$ de la suite (f_n') ? Pouvait-on vérifier cela par un autre procédé ?

Correction :

1. Il faut bien préciser que $x^2+\frac{1}{n}$ reste strictement positif. La plus simple est un schéma de composition :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+\frac{1}{n} & & \\ & & t & \longmapsto & \sqrt{t} \\ x & & \longmapsto & & \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \end{array}$$

Cela démontre que à n fixé, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$.
De plus, à $x \in \mathbb{R}$ fixé, on voit que :

$$\lim_{n\infty} f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

La fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$
Pour la convergence uniforme, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned} |f_n(x)-f(x)| &= \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}} && \text{quantité conjuguée} \\ &\leqslant \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \||f_n-f\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

Ainsi, f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2. Supposons que a suite (f_n') converge uniformément vers une fonction h, alors f serait de classe $\mathscr{C}^1$.
On peut aussi voir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = (2x)\frac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$$

Ainsi, la limite simple de (f_n') est la fonction :

$$h : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n' est continue et que h n'est pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.

✯ Exercices théoriques

Exercice 6 Soit f_n une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1[$ et si la suite de réels $(f_n(1))$ converge, alors la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. En déduire que si la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1[$ et que toutes les fonctions (f_n) sont continues sur $[0,1]$, alors la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
3. On considère la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto x^n$.
Vérifier que :
   - la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur tout segment $[0,1[$,
   - toutes les fonctions (f_n) sont continues,
   - la suite de réels $(f_n(1))$ converge,
   - la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Commentaire : il faut clairement passer par les définitions avec des ε.

Correction :

1. On suppose donc que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1[$ et que la suite de réels $(f_n(1))$ converge. Déjà, on peut noter que la suite de fonctions (f_n) converge simplement. Puisque si $x<1$, il y a convergence uniforme donc simple et si $x=1$ il y a convergence simple.
   Soit $\varepsilon>0$, on sait alors qu'il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$, tel que pour tout $n\geqslant n_0$, les deux conditions suivantes sont vérifiées :
   $$|f_n(1)-f(1)|\leqslant\varepsilon \text{ et } \forall x\in[0,1[,\ |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$$
   On peut donc assurer que :
   $$\forall x\in[0,1],\ |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \qquad \text{ie } \|f_n-f\|\leqslant\varepsilon$$
2. Sous ces hypothèses, il y a convergence simple sur $[0,1[$ vers une fonction f qui est continue sur $[0,1[$.
   De plus, le thm de la double limite s'applique en 1 puisqu'il y a convergence uniforme et que :
   $$\forall n\in\mathbb{N}, \lim_{x\to1} f_n(x)=f_n(1)$$
   On peut donc affirmer que la suite $(f_n(1))$ admet une limite et appliquer le point précédent.

Exercice 7 Soit $d\in\mathbb{N}$, et $[a,b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$. On considère $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications polynomiales de degré au plus d qui converge simplement vers une fonction f sur $[a,b]$.

Montrer que f est une application polynomiale.

Indication : considérer des polynômes de Lagrange.

Soit (P_k) une suite d'applications polynomiales (de degré quelconque cette fois) qui convergent uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$.

Montrer alors que f est polynomiale.

Indication : Considérer un rang n_0 à partir duquel : $\|P_n-f\|_\infty\leqslant1$, pour $n\geqslant n_0$ majorer alors $\|P_n-P_{n_0}\|_\infty$, puis utiliser le fait qu'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$ est constant.

R La suite de polynôme :
$$P_n : x\longmapsto x^n$$
converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction qui n'est pas un polynôme.
La suite de polynôme :
$$P_n : x\longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$$
converge uniformément sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ vers une fonction qui n'est pas un polynôme.

Correction : Dans le premier cas, on discrétise l'intervalle en $d+1$ points :
$$a=x_0<x_1<\cdots<x_d=b$$
On considère $(L_i)_{i\in[\![0,d]\!]}$ les $d+1$ polynômes de Lagrange associés à ces points. On rappelle que :
$$\forall j\in[\![0,d]\!],\ L_j=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{d}\frac{(X-x_i)}{x_j-x_i}$$
on a donc :
$$\forall j\in[\![0,d]\!],\ \forall i\in[\![0,d]\!],\ L_j(x_i)=\begin{cases}0 & \text{si } i\neq j\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$
Ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_d[X]$ avec :
$$\forall P\in\mathbb{R}_d[X],\ P=\sum_{i=0}^{d}P(x_i)L_i$$

On décompose donc la suite (P_k) dans cette base :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_k = \sum_{i=0}^{d} P_k(x_i) L_i$$

En évaluant en un $x \in [a,b]$ fixé, cela donne :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_k(x) = \sum_{i=0}^{d} P_k(x_i) L_i(x)$$

on fait alors tendre k vers $+\infty$, ce qui donne :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{d} f(x_i) L_i(x)$$

Comme x est quelconque dans $[a,b]$, cela prouve le résultat.

Pour le deuxième cas, on considère maintenant une suite (P_k) de degré quelconque qui converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. On sait alors qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \|P_n - f\|_\infty \leqslant 1$$

et donc :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \|P_n - P_{n_0}\|_\infty \leqslant \|P_n - f\|_\infty + \|P_{n_0} - f\|_\infty \leqslant 2$$

Ainsi, $P_n - P_{n_0}$ est un polynôme borné donc constant.

Ainsi :

$$\forall n \geqslant n_0, \exists c_n \in \mathbb{R},\ P_n = P_{n_0} + c_n$$

on peut donc utiliser la question précédente, puisque le degré de P_n est celui de P_{n_0}.

On peut aussi raisonner directement. On prend un x quelconque par exemple $x = 0$, et on a :

$$\forall n \geqslant n_0, P_n(0) = P_{n_0}(0) + c_n$$

On fait tendre n vers $+\infty$ pour obtenir que la suite (c_n) converge et que $\lim_{n\infty} c_n = f(0) - P_{n_0}$.

On reprend ensuite x quelconque dans $\mathbb{R}$ et on passe à la limite dans l'expression :

$$\forall n \geqslant n_0, P_n(x) = P_{n_0}(x) + c_n$$

ce qui donne :

$$f(x) = P_{n_0}(x) + f(0) - P_{n_0}(0)$$

ce qui prouve que f est un polynôme.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < b$ deux réels. Pour $x \in [a,b]$, on pose :

$$f_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[a,b]$.
2. Montrer la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,b]$.
   Indication : utiliser l'uniforme continuité sur $[a,b+1]$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x,y) \in [a,b+1]^2,\ |x-y| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha$$

Correction :

1. C'est une somme de Riemman qui converge vers $\int_x^{x+1} f(t)dt$ (thm de 1ère année).

2. Soit $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|f_n(x) - \int_x^{x+1} f(t)dt\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}} \left(f\left(x+\frac{k}{n}\right) - f(t)\right) dt\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}} \left|f\left(x+\frac{k}{n}\right) - f(t)\right| dt$$

On considère ensuite $\varepsilon > 0$.
Par uniforme continuité sur $[a,b+1]$ comme $[x,x+1] \subset [a,b+1]$, on sait qu'il existe $\alpha > 0$, tel que :

$$\forall (u,v) \in [a,b+1]^2,\ |u-v| \leqslant \alpha \implies |f(u)-f(v)| \leqslant \varepsilon$$

Soit N tel que $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ et $n \geqslant N$.

$$\left|f_n(x) - \int_x^{x+1} f(t)dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}} \varepsilon dt$$
$$\leqslant \varepsilon$$

On a bien montré l'uniforme convergence de (f_n), c'est uniforme parce que le rang N ne dépend pas de x.

✯ Exercices de concours sur les suites de fonctions

Exercice 9 On pose, pour tout entier naturel n et tout réel x, $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1}e^{-nx^2}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonction (f_n).
2. La suite de fonction (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Correction :

1. à x fixé dans $\mathbb{R}^*$, on a :

$$\lim_{n\infty} f_n(x) = 0 \text{ car } \lim_{n\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \text{ et } \lim_{n\infty} e^{-nx^2} = 0$$

tandis que $\lim_{n\infty} f_n(0) = 1$. Il y a convergence simple vers la fonction f qui vaut 0 sur $\mathbb{R}^*$ et 1 en 0.

2. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue et que la fonction limite f n'est pas continue, il ne peut y avoir de convergence uniforme.
3. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,+\infty[,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{n+2}{n+1}e^{-na^2}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n - f\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \frac{n+2}{n+1}e^{-na^2} \longrightarrow 0$$

Il y a donc convergence uniforme sur tout segment de $]0,+\infty[$.

4. On peut considérer la suite $x_n = \frac{1}{n}$:

$$\|f_n\|_\infty^{]0,+\infty[} \geqslant \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{n+2}{n+1}e^{-1} \longrightarrow e^{-1} \neq 0$$

Ainsi, on ne peut pas avoir : $\lim_{n\infty} \|f_n\|_\infty^{]0,+\infty[} = 0$. Il n'y a pas de convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.

NB : on peut aussi faire le tableau de variations de $|f_n - f|$ (par parité) sur $\mathbb{R}^+$ (en 0 la valeur est $\frac{n+2}{n+1} - 1$, puis c'est décroissante de $\frac{n+2}{n+1}$ à 0, on a donc :

$$\|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}^+} \|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}_*^+} = \|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{n+2}{n+1}$$
$$\|f_n - f\|_\infty^{[a,+\infty]} = f_n(a) \to 0$$

(attention dans le tableau de variation à la valeur et la limite en 0). Ce qui donne la réponse à toutes les questions.

Autre méthode dernière question : Sur $]0,+\infty[$, on peut utiliser le thm de la double limite en 0 :

Exercice 10 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$).
3. Même question sur $]0,+\infty[$.

Correction :

1. à x fixé dans $\mathbb{R}^*$, on a :

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+n^2x^2} \longrightarrow 0$$

pour $x=0$, on a $f_n(x)=0$ pour toute valeur de n. Ainsi, il y a convergence simple vers la fonction nulle.

2. On a de même :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,+\infty[,\ |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+n^2a^2} \longrightarrow 0$$

Ainsi : il y a convergence sur tout segment de $]0,+\infty[$.

3. On peut regarder en $x_n = \frac{1}{n}$.

$$\|f_n\|_\infty^{]0,+\infty[} \geqslant \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{\sin(1)}{2}$$

Il n'y a pas de convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.

Exercice 11 Soit f une fonction continue de $I=[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1)=0$.

Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ f_n(x) = x^n f(x)$$

converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Correction : il faut raisonner avec des ε.

On fixé $\varepsilon > 0$, et on peut trouver $\alpha > 0$, tel que :

$$\forall x \in [1-\alpha,1],\ |f(x)| \leqslant \varepsilon$$

en utilisant la continuité de la fonction f. En majorant x^n par 1, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [1-\alpha,1],\ |x^n f(x)| \leqslant \varepsilon$$

La fonction f est bornée sur $[0,1]$, on note M tel que :

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leqslant M$$

Comme la série de fonctions $x \longmapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1-\alpha]$, on a :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_0,\ \forall x \in [0,1-\alpha],\ x^n \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$$

Ainsi pour $n \geqslant N_0$ et $x \in [0,1-\alpha]$, on a :

$$|f(x)x^n| \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} \leqslant \varepsilon$$

ainsi, pour $n \geqslant N_0$, on a $|f(x)x^n| \leqslant \varepsilon$ dans les cas où $x \leqslant 1-\alpha$ et $x > 1-\alpha$.

On a donc convergence uniforme.

Exercice 12 On souhaite montrer la réciproque de l'exercice précédent.

Soit f une fonction de $I = [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et (f_n) la suite de fonctions définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ f_n(x) = x^n f(x)$$

On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

1. Montrer que $f(1) = 0$
2. Montrer : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f(x)| \leqslant M$
3. Montrer que f est continue en 1.

Correction : Puisqu'il y a convergence simple, on regarde la limite en 1. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(1) = f(1)$, et comme il y a convergence simple vers la fonction nulle :

$$\lim_{n\infty} f_n(1) = 0$$

Ce qui donne donc $f(1) = 0$.

On commence par appliquer la convergence uniforme de la suite $(x^n f(x))$ vers la fonction nulle, avec $\varepsilon = 1$. On a alors :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in [0,1],\ x^n |f(x)| \leqslant 1$$

On considère donc le rang N, et on a :

$$\forall x \in]0,1],\ |f(x)| \leqslant \frac{1}{x^N}$$

et donc :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ |f(x)| \leqslant 2^N$$

(**NB :** le $\frac{1}{2}$ est arbitraire, il faut prendre une partie qui contient 1). On note donc $M = 2^N$, et on a que f est majorée par 2^N sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Il faut ensuite montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in]1-\alpha, 1],\ |f(x)| \leqslant \varepsilon$$

NB : Il faut partir de :

$$|f(x)| = |f(x)| x^n + |f(x)| (1 - x^n)$$

Si on choisit n suffisamment grand, on a $|f(x)| x^n$ aussi petit que l'on veut. Si on choisit x suffisamment proche de 0, alors $(1 - x^n)$ est aussi petit que l'on veut. Il faut donc commencer par vérifier que f est bornée (pour x proche de 1).

Soit donc $\varepsilon > 0$, on rapplique la convergence uniforme en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2}$, on sait alors qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, vérifiant :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [0,1],\ x^n |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On considère en particulier le premier rang n_0 qui vérifie donc :

$$\forall x \in [0,1], x^{n_0} |f(x)| \leqslant \varepsilon$$

On sait ensuite que $\lim_{x \to 1} x^{n_0} = 1$, donc il existe un $\alpha > 0$, que l'on peut toujours diminuer pour supposer $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ vérifiant :

$$\forall x \in]1-\alpha, 1],\ |x^{n_0} - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \text{ ie } 1 - x^{n_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

Comme on a pris $\alpha < \frac{1}{2}$, on a pour $x \in]1-\alpha, 1]$, $|f(x)| \leqslant M$.

Cela donne donc pour $x \in]1-\alpha, 1]$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x)| x^{n_0} + |f(x)| (1 - x^{n_0}) \\ &\leqslant M \times \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc bien la continuité en 1.

✯ Convergence d'une série de fonctions

Exercice 13 Étudier la convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions de terme général :

$\boxed{1}$ $\left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+\frac{x}{n^2+1}\right) \end{array}\right.$ $\boxed{2}$ $\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n\frac{x+n}{n^2x+n^2} \end{array}\right.$

$\boxed{3}$ $\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^{-nx}}{n+1} \end{array}\right.$ $\boxed{4}$ $\left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(nx)}{x+n^2} \end{array}\right.$

$\boxed{5}$ $\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{n}xe^{-nx} \end{array}\right.$ $\boxed{6}$ $\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n\frac{nx}{x+n^2} \end{array}\right.$

Correction : $\boxed{1}$: à $x \in [0,1]$ fixé, on a : $\sum f_n(x)$ est une série à termes positifs.

$$\ln\left(1+\frac{x}{n^2+1}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{x}{n^2+1} \underset{n\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$$

Et $\sum \frac{x}{n^2}$ converge d'où la convergence simple.

de plus :

$$\forall x \in [0,1],\ \ln\left(1+\frac{x}{n^2+1}\right) \leqslant f_n(1)$$

et donc la convergence normale donc uniforme sur $[0,1]$.

$\boxed{2}$ Pour $x > 0$ fixé, c'est une série alternée.

On a :

$$|f_{n+1}(x)| - |f_n(x)| = \frac{-n^2-x-n(1+2x)}{(n+1)^2(x+1)n^2} \leqslant 0$$

On peut aussi écrire :

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x+1}\frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

C'est le produit de deux suites décroissante et positives.

$\lim_{n\infty}|f_n(x)| = 0$ D'où la convergence simple pas TSSA.

On utilise la majoration du reste :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x+n+1}{(n+1)^2(x+1)} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2(x+1)} \leqslant \frac{2}{(n+1)^2}$$

on a convergence uniforme.

NB : il n'y a pas de convergence normale car pas de convergence absolue.

$\boxed{3}$: à $x > 0$ fixé, $\sum \frac{e^{-nx}}{n+1}$ est une série à termes positifs, qui converge par l'utilisation du critère de d'Alembert, puisque le quotient de deux termes consécutifs tend vers $e^{-x} < 1$.

Pour la non convergence normale, on prend $x_n = \frac{1}{n}$. et on a $f_n(x_n) = \frac{e^{-1}}{n+1}$ qui n'est pas sommable.

Pour la non convergence uniforme, on applique le thm de la double limite. On a :$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \frac{1}{n+1}$ Supposons qu'il y ait convergence uniforme, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) \text{ existe ie } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \text{ existe}$$

ce qui est une contradiction.

Soit maintenant $a > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant a,\ \frac{e^{-nx}}{n+1} \leqslant \frac{e^{-na}}{n+1}$$

et $\sum \frac{e^{-na}}{n+1}$ converge (toujours série à termes positifs et d'Alembert). D'où la convergence normale sur tout segment.

$\boxed{4}$: pour $x \geqslant 0$ fixé, $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$ D'où la convergence absolue et normale.

$\boxed{5}$: Pour $x > 0$, $\sum \frac{1}{n} x e^{-nx}$ cv par d'alembert (le quotient tend vers e^{-x}).

Il faut ensuite étudier $x \mapsto \frac{1}{n} x e^{-nx}$ pour avoir la convergence normale. croissant pour $x \leqslant \frac{1}{n}$ et décroissant ensuite. on obtient :

$$\|f_n\|_\infty^{]0,+\infty[} = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{n^2}$$

Cette série converge d'où la cv normale.

$\boxed{5}$: on a une série alternée pas de convergence absolue.

à x fixé, on a une série alternée, avec :

$$\lim_{n\infty} \frac{nx}{x+n^2} = 0$$

On regarde la décroissance :

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)x}{x+(n+1)^2} - \frac{nx}{x+n^2} =& x\frac{(n+1)\left(x+n^2\right) - n\left(x+(n+1)^2\right)}{\left(x+(n+1)^2\right)\left(x+n^2\right)} \\ =& \oplus nx + x + n^3 + n^2 - n(x+n^2+2n+1) \\ =& \oplus x - n^2 - n\end{aligned}$$

C'est négatif à partir d'un certain rang. On peut donc utiliser le théorème spécial des séries alternées qui indique que la série converge.

Pour la convergence uniforme. Par l'absurde on suppose la convergence uniforme. On a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = (-1)^n n$ Donc avec le thm de la double limite, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n$ ce qui est absurde.

Pour la convergence uniforme sur tout segment, on considère $M > 0$, et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \geqslant M,\ |R_n(x)| \leqslant& \frac{(n+1)x}{x+(n+1)^2} && \text{premier terme négligé} \\ \leqslant& \frac{(n+1)M}{(n+1)^2} = \frac{M}{(n+1)}\end{aligned}$$

D'où la cv uniforme du reste vers la fct nulle et donc la cv uniforme de $\sum f_n$ sur tout segment.

Exercice 14 Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Correction : on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+n^2}$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\| \leqslant \frac{1}{1+n^2}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{1+n^2}$ converge, la série $\sum \|f_n\|$ converge et donc la série de fonction converge normalement.

Exercice 15 Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+nx^2+x^{24}+n^2}$$

Étudier la convergence de la série de fonction $\sum f_n$.

Correction : on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+n^2}$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\| \leqslant \frac{1}{1+n^2}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{1+n^2}$ converge, la série $\sum \|f_n\|$ converge et donc la série de fonction converge normalement.

Exercice 16 Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = nx^2e^{-nx}$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement mais pas normalement sur $[0,+\infty[$
2. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de $]0,+\infty[$.

Correction :

1. Soit $x \geqslant 0$, on a trois méthodes.
   La méthode des $n^\alpha u_n$:

$$nx^2e^{-nx} = \underset{n\infty}{o}\left(n^2\right) \qquad \text{car} \qquad \lim_{n\infty} n^3x^2e^{-nx} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

   la série $\sum nx^2e^{-nx}$ est à termes positifs et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum nx^2e^{-nx}$ converge.
   Le critère de d'Alembert (pour $x > 0$) :

$$\sum nx^2e^{-nx} \text{ converge car } \frac{(n+1)x^2e^{-(n+1)x}}{nx^2e^{-nx}} \longrightarrow e^{-x} < 1.$$

   (le cas $x = 0$ doit être traité à part).
   On peut aussi utiliser la série géométrique dérivée :

$$\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

   On a pour la convergence normale :

$$\begin{aligned}\sum \|f_n\|_\infty &\geqslant \sum \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| \\ &\geqslant \sum \frac{1}{n}e^{-1}\end{aligned}$$

   Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge. Il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}^+$.
   On peut aussi étudier la fonction $f_n : x \mapsto nx^2e^{-nx}$ et vérifier que la borne supérieure est en $\frac{2}{n}$.
2. On considère un segment $[a,b]$ de $]0,+\infty[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ |nx^2e^{-nx}| \leqslant nb^2e^{-na}.$$

   Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant nb^2e^{-na}$$

   Or la série $\sum n^2b^2e^{-na}$ converge, car $nb^2e^{na} = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (encore par croissance comparée : $n^3b^2e^{-na} \longrightarrow 0$ ou d'alembert).
   Donc la série $\sum \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge et donc on a convergence normale sur tout segment.

Exercice 17 Discuter selon les valeurs de α de la convergence normale sur $[0,1]$ de la série de fonctions : $\sum n^\alpha x^n(1-x)$

Correction : comme il y a un paramètre, le plus simple est d'étudier la fonction pour calculer explicitement la valeur de la norme infinie :

$$f_n : x \mapsto n^\alpha x^n (1-x)$$

ainsi :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) =& n^\alpha \left(nx^{n-1}(1-x) - x^n\right)\\ =& n^\alpha x^{n-1}\left(n-(n+1)x\right)\end{aligned}$$

ainsi, le maximum est en $\frac{n}{n+1}$. (c'est croissant puis décroissant).

On calcule la valeur de la norme infinie :

$$\begin{aligned}\|f_n\|_\infty^{[0,1]} =& f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)\\ =& n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\\ \underset{n\infty}{\sim} & e^{-1} n^{\alpha-1} = e^{-1}\frac{1}{n^{1-\alpha}}\end{aligned}$$

Il y a convergence normale si et seulement si $\alpha < 0$.

Exercice 18 Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+2n+x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Calculer alors $\lim_{x\longrightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+x^2}$.

On admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction : On a :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \left|\frac{1}{n^2+2n+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

D'où la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$.

Comme chaque fonction f_n est continue et qu'il y a convergence normale donc uniforme, la fonction somme est continue. Ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+x^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1}{n^2+2n+x^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{\pi^2}{6} - 1\end{aligned}$$

Exercice 19

1. Déterminer les domaines de convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{n}$
2. Montrer que la somme de cette série de fonctions est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.
3. Exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles et en déduire l'expression de la fonction somme en fonction à une constante près.
4. En déduire la fonction somme.

Correction :

Convergence simple : Déjà il est clair que si $x < 0$ $\frac{e^{-nx}}{n}$ ne tends pas vers 0. Pour $x = 0$, on retrouve la série harmonique qui diverge.

On considère donc $x > 0$, on a trois méthodes.

La règle du $n^\alpha u_n$

$$\lim_{n\in} n^2 \frac{e^{-nx}}{n} = \lim_{n\infty} n e^{-nx} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Ainsi, $\frac{e^{-nx}}{n} = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ Ainsi, par comparaison il y a convergence de la série (à termes positifs) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{n}$.

Le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n\in} \frac{e^{-(n+1)x}}{(n+1)} \frac{n}{e^{-nx}} = e^{-x} < 1$$

Ou dire que c'est une série géométrique intégrée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$$

(dans ce cas la suite de l'exercice est évidente).

Il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}_*^+$.

Convergence normale :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_*^+} \geqslant \lim_{x\longrightarrow 0} f_n(x) = \frac{1}{n}$$

or $\sum \frac{1}{n}$ ne converge pas. Donc la série ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_*^+$.

On peut aussi écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_*^+} \geqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{n}$$

et la série $\sum \frac{e^{-1}}{n}$ ne converge pas.

Considérons maintenant un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_*^+$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ 0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{n} \leqslant \frac{e^{-na}}{n}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{e^{-na}}{n}$$

Or la série $\sum \frac{e^{-na}}{n}$ est convergente (ce que l'on montre avec d'Alembert ou en vérifiant que $\frac{e^{-na}}{n} = \underset{n\infty}{o}\ \frac{1}{n^2}$). Ainsi, la série $\sum \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$ est convergente, et donc la série de fonction converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_*^+$.

Pour montrer que la somme de cette série de fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, il faut travailler sur la série dérivée. On a : $\sum_{n\geqslant 1} f_n'(x) = -\sum_{n\geqslant 1} e^{-nx}$. Il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_*^+$ (pour le vérifier on peut poser $x_n = \frac{1}{n}$).

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur tout segment.

On considère donc $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_*^+$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ 0 \leqslant e^{-nx} \leqslant e^{-na}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n'\|_\infty^{[a,b]} \leqslant e^{-na}$$

or la série $\sum e^{-na}$ converge puisque c'est une série géométrique de raison $e^{-a} < 1$. donc la série $\sum \|f_n'\|_\infty^{[a,b]}$ converge et on a convergence normale sur tout segment de $[a,b]$.

Ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_*^+$.
- La série $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_*^+$.

On en déduit que la somme est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

On a de plus (en notant S) la somme :

$$\forall x > 0,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \text{ série géométrique de raison } e^{-x}.$$

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$, ce qui donne :

$$\forall x > 0,\ S(x) = -\ln(1-e^{-x}) + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Il reste à déterminer C.

Pour cela, on peut appliquer le théorème de la double limite :

- Il y a convergence uniforme sur $[1,+\infty[$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ admet la limite 0 en $+\infty$.

Ainsi, la série $\sum \lim_{x\longrightarrow+\infty} f_n(x)$ existe (c'est évident, cela fait 0), la fonction S admet une limite en $+\infty$. mais aussi :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \sum f_n(x) = \sum \lim_{x\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 0$$

On en déduit $C = 0$.

Exercice 20

1. Justifier la définition de la fonction :

$$f : \begin{cases}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\cos^n x \sin nx \end{cases}$$

2. Écrire du code `Python` donnant une représentation de la fonction f.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$. Calculer f' sous la forme d'une somme infinie.
4. Montrer que $\forall x \in]0,\pi[,\ f'(x) = -1$. En déduire f sur $]0,\pi[$.

Correction :

1. Pour $x \in]0,\pi[$, on a :

$$\left|\frac{1}{n}\cos^n x \sin nx\right| \leqslant \frac{|\cos x|^n}{n}$$

On regarde si la série $\sum \frac{|\cos x|^n}{n}$ est convergente pour $x \in]0,\pi[$.
On utilise d'Alembert : le quotient de deux termes consécutifs est : $|\cos x|\frac{n+1}{n} \longrightarrow |\cos(x)| < 1$. Ainsi, la série à termes positifs $\sum \frac{|\cos x|^n}{n}$ est convergente, donc $\sum \frac{1}{n}\cos^n x \sin nx$ est absolument convergente et donc il y a convergence simple.
On peut aussi écrire :

$$\frac{|\cos x|^n}{n} = \underset{n\infty}{o}\left(|\cos(x)|^n\right) \text{ et } \sum |\cos(x)|^n \text{ converge car } |\cos(x)| < 1$$

Si on considère un segment de la forme $[\varepsilon, \pi-\varepsilon] \subset]0,\pi[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,\pi[,\ \left|\frac{1}{n}\cos^n x \sin nx\right| \leqslant \frac{1}{n}\cos^n \varepsilon$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}\cos^n \varepsilon$ converge, il y a convergence normale sur $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, donc sur tout segment de $]0,\pi[$.

2. On peut par exemple écrire :

```python
from pylab import *

def f(N, x):
    S = 0
    for n in range(1,N):
        S += cos(x)**n * sin(n*x)/n
    return S

eps = 10**(-15)
listeX = linspace(eps, pi-eps, 300)
listeY =[]
for x in listeX :
    listeY.append( f(30,x) )
plot(listeX,listeY)
```

3. On dérive la série terme à terme :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n' : x \mapsto & -\sin x \cos^{n-1} x \sin nx + \cos^n x \cos(nx) \\ & \cos^{n-1} x\left(\cos x \cos(nx) - \sin x \sin(nx)\right) \\ & \cos^{n-1} x \cos((n+1)x) \end{aligned}$$

Il n'y a pas de convergence normale sur $]0,\pi[$, puisque

$$\|f_n'\| \geqslant \lim_{x\longrightarrow 0} \cos^{n-1} x\cos((n+1)x) = 1.$$

Considérons $\varepsilon > 0$, on regarde la convergence normale sur $]\varepsilon,\pi-\varepsilon[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]\varepsilon,\pi-\varepsilon[,\ \left|\cos^{n-1} x\cos((n+1)x)\right| \leqslant \cos^{n-1}\varepsilon$$

Or la série $\sum \cos^{n-1}\varepsilon$ converge (série géométrique de raison $\cos\varepsilon < 1$). On a donc convergence normale sur $]\varepsilon,\pi-\varepsilon[$ et donc sur tout segment de $]0,\pi[$.
On a donc :

- Les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,\pi[$.
- La série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]0,\pi[$.

On en déduit que $\sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
De plus :

$$\forall x \in]0,\pi[,\ f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \cos^{n-1} x\cos((n+1)x)$$

4. Il faut calculer la valeur de cette somme. Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1} \cos^{n-1}(x)\cos((n+1)x) + i\sum_{n\geqslant 1} \cos^{n-1}(x)\sin((n+1)x) &= \sum_{n\geqslant 1} \cos^{n-1}(x)e^{i(n+1)x} \\
&= e^{2ix}\frac{1}{1-\cos(x)e^{ix}} \\
&= e^{2ix}\frac{1-\cos(x)e^{-ix}}{(1-\cos^2(x))^2+\cos^2(x)\sin^2(x)} \\
&= \frac{e^{2ix}-\cos(x)e^{ix}}{\sin^2(x)\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)} \\
&= \frac{e^{2ix}-\cos(x)e^{ix}}{\sin^2(x)}
\end{aligned}$$

On prends la partie réelle :

$$\sum_{n\geqslant 1} \cos^{n-1} x\cos((n+1)x) = \frac{\cos(2x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -1.$$

On obtient donc :

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0,\pi[,\ f(x) = -x + C$$

Il reste à calculer C.
Pour cela, on prend la valeur en $\frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ainsi, $f : x \longmapsto -\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 21 Soit la fonction :

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right) \end{array}\right.$$

Montrer que la fonction f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,+\infty]$.

Correction :

Pour $x \geqslant 0$ fixé, on a :

$$\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ CV d'où la CV simple et f est bien définie.

Il faut ensuite dériver k fois $f_n : x \longmapsto \ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)$. Cela donne :

$$\begin{aligned} f_n' &: x \mapsto \frac{1}{n^2+x} \\ f_n^{(2)} &: x \mapsto -\frac{1}{(n^2+x)^2} \\ f_n^{(k)} &: x \mapsto (-1)^k \frac{1}{(n^2+x)^k} \end{aligned}$$

REM : c'est une des rares fonctions où on peut calculer les dérivées successives et donc appliquer le thm sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

On a pour $k \geqslant 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \left|f_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{n^{2k}}$$

Ainsi : $\sum f_n^{(k)}$ CV normalement sur $\mathbb{R}^+$ (pour toute valeur de k) et donc en appliquant le thm de dérivation $\mathscr{C}^\infty$ (après bilan des hypothèses), on obtient que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 22 Soit la suite de fonction :

$$f_n : x \geqslant 0 \longmapsto \frac{x}{x^2+n^2} \text{ pour } n \geqslant 1$$

1. On considère la série de fonction $\sum f_n$.
   Montrer que cette série converge simplement vers une fonction S. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$, mais qu'il n'y a pas de convergence uniforme sur R^+.
   Indication : on vérifiera que
   $$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geqslant \frac{1}{5}$$
2. On considère la série de fonction $\sum (-1)^n f_n$. Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ mais qu'il n'y a pas de convergence normale.

Correction :

1. Pour $x > 0$ fixé, on a :
   $$f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \frac{x}{n^2} \text{ et } \sum \frac{x}{n^2} \text{ converge}$$
   Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour toute valeur de n, donc il y a convergence simple/
   Soit $A > 0$, on a alors :
   $$\forall x \in [0,A],\ |f_n(x)| = \frac{x}{x^2+n^2} \leqslant \frac{A}{n^2}$$
   donc $\|f_n\|_\infty^{[0,A]} \leqslant \frac{A}{n^2}$ et donc il y a convergence normale sur $[0,A]$ donc sur tout segment de $\mathbb{R}^+$. En conséquence, la fonction S est continue.
   On commence par regarder l'indication : soit $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$, alors :
   $$2n^2+2n+1 \leqslant n^2+k^2 \leqslant 5n^2$$
   et donc :
   $$\frac{n}{n^2+k^2} \geqslant \frac{1}{5n}$$

et donc :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geqslant n \times \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}$$

On va en déduire qu'il n'y a pas de convergence uniforme. Pour cela, on va montrer que le reste

$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+k^2}$$

ne tend pas uniformément vers la fonction nulle.
On a

$$\begin{aligned} \|R_n\|_\infty^{\mathbb{R}^+} &\geqslant R_n(n) \\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+k^2} \\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geqslant \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Donc : $\|R_n\|$ ne tend pas vers 0.
La série $\sum f_n$ ne converge donc pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

2. pour $x \geqslant 0$, la série numérique : $\sum(-1)^n f_n(x)$ est alternée, car $f_n(x) \geqslant 0$. de plus :

$$\lim_{n\infty} f_n(x) = 0 \text{ et } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}$$

ainsi, $\sum(-1)^n f_n(x)$ converge par le théorème spécial des séries alternées.
Pour n fixé, on étudie f_n. On a :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^2+n^2-2x^2}{(x^2+n^2)} = \frac{n^2-x^2}{x^2+n^2}$$

Ainsi, f_n est croissante pour $x \leqslant n$ puis décroissante. On peut donc écrire que :

$$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}^+} = f_n(n) = \frac{1}{2n}$$

On voit donc que $\sum\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}^+}$ diverge : il n'y a pas de convergence normale.
On note R_n le reste et on a en utilisant la majoration du reste par le premier terme négligé :

$$\forall x \geqslant 0,\ |R_n(x)| \leqslant f_{n+1}(x) = \frac{x}{x^2+(n+1)^2} \leqslant \|f_{n+1}\|_\infty^{\mathbb{R}^+} \frac{1}{2(n+1)}$$

On en déduit :

$$\|R_n\|_\infty^{\mathbb{R}^+} \leqslant \frac{1}{2(n+1)} \to 0$$

Ainsi, il y a convergence uniforme du reste vers la fonction nulle et donc convergence uniforme de la série $\sum(-1)^n f_n$.

✯ Exercices de concours sur les séries de fonctions

Exercice 23

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.
2. Sur cet ensemble de définition, la fonction f est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$?

Correction :

1. si $|x| < 1$, on a : $\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \underset{n\infty}{\sim} |x|^n$ (ou d'Alembert) série géométrique convergente, d'où la convergence simple. si $x > 1$, alors $\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \underset{n\infty}{\sim} 1$ divergence grossière. Pour $x = 1$, $f_n(x)$ n'est pas défini. ainsi $\mathscr{D} =]-1,1[$.

2. Il y a convergence normale sur tout segment de la forme $[-a,a]$. En effet :

$$\forall x \in [-a,a],\ \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant \frac{a^n}{1-a^n} \text{ car } |1-x^n[\geqslant ||1|-|x^n|| = 1-|x|^n \geqslant 1-a^n$$

cette série converge. D'où la continuité.
Autre argument pour le dénominateur : déjà on peut enlever les valeurs absolues car c'est positif. On étudie $x \mapsto 1-x^n$ sur $[-a,a]$ pour chercher le minimum. La dérivée est $x \mapsto -nx^{n-1}$ Si n est pair, alors la fonction est paire, décroissante sur $[0,a]$, donc :

$$\forall x \in [-a,a], 1-x^n \geqslant 1-a^n$$

Si n est impair, alors la dérivée est négative sur $[-a,a]$, donc la fonction est décroissante, ce qui donne encore :

$$\forall x \in [-a,a], 1-x^n \geqslant 1-a^n$$

Pour le caractère $\mathscr{C}^1$, on calcule la dérivée :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

On démontre que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment :

$$\forall x \in [-a,a],\ \left|\frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}\right| \leqslant \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \underset{n\infty}{\sim} na^{n-1}$$

on utilise encore le même argument : $\forall x \in [-a,a], 1-x^n \geqslant 1-a^n$. Cette dernière série converge (d'alembert, ou $na^{n-1} \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ou série géométrique dérivée).
D'où le caractère $\mathscr{C}^1$.

Exercice 24 On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la série converge,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$$

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Déterminer $S'(1)$

Correction :

1. Pour la convergence simple :

$$u_n(x) \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ avec un DL}$$

On démontre la convergence normale de la série des dérivées sur $[0,1]$:

$$\forall x \in [0,1],\ |u_n'(x)| = \left|\frac{-x}{n(n+x)}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

d'où S est de classe $\mathscr{C}^1$.

2. Avec le théorème de dérivation termes à termes :

$$\begin{aligned} S'(1) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ qui se calcule par somme téléscopique} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Exercice 25 Soit la série de fonctions de terme général :

$$u_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n+n^2x^2} \end{cases} \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer que la série $\left(\sum_{n\geqslant 1} u_n\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \qquad \text{et} \qquad g = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$$

3. Montrer que f est impaire.
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
6. Soit h définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$h : x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$$

   Montrer que h est décroissante sur $]0,+\infty[$.
   Montrer en utilisant une somme partielle que f n'est pas dérivable en 0 et admet en 0 une tangente verticale.
7. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
8. Soit la fonction :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+n^2x^2} \end{cases}$$

   Justifier la définition de φ. Montrer ensuite que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que la fonction g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.
9. Tracer la courbe de f.

Correction :

1. **NB :** attention au signe de (u_n) ! ! c'est impair donc on étudie sur $\mathbb{R}^+$ On étudie : $u_n : x \longmapsto \frac{x}{n+n^2x^2}$, cela donne :

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= \frac{1}{n+n^2x^2} - 2\frac{n^2x^2}{(n+n^2x^2)^2} \\ &= \frac{n-n^2x^2}{(n+n^2x^2)^2} \end{aligned}$$

   (on fait alors le tableau de variation : c'est croissant puis décroissant et toujours positifs sur $\mathbb{R}^+$).
   Ainsi :

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{n+n} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

   donc la convergence normale donc uniforme.
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la série cv simplement (car normalement).
   La série $\sum(-1)^n u_n$ va aussi converger normalement (on regarde en valeur absolue donc le $(-1)^n$ n'intervient pas).
   Donc g est aussi définie sur $\mathbb{R}$.
   Autre méthode : À x fixé, la série : $\sum(-1)^n \frac{x}{n+n^2x^2}$ est alternée avec :

$$\lim_{n\infty} \frac{|x|}{n+n^2x^2} = 0 \text{ et } \left(\frac{|x|}{n+n^2x^2}\right) \text{ est décroissante}$$

   (attention pour la monotonie : si $x<0$, alors la suite $\left(\frac{x}{n+n^2x^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante !)
   On a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ et donc g est définie sur $\mathbb{R}$.

3. évident, car u_n est impaire.
4. Comme u_n est continue et que l'on a convergence normale donc uniforme, on a continuité de f sur $\mathbb{R}$.
5. Il faut regarder la convergence de la série $\sum u_n'$, ie $\sum \frac{n-n^2x^2}{(n+n^2x^2)^2}$
   Considérons un segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$,

$$\forall x \in [a,b],\ \left|\frac{n-n^2x^2}{(n+n^2x^2)^2}\right| \leqslant \frac{n^2x^2+n}{(n+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n+n^2a^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{a^2n^2}$$

   On voit donc que :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$,
   - $(\sum u_n)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers f,
   - $(\sum u_n')$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$,

   On en déduit donc que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-n^2x^2}{(n+n^2x^2)^2}$$

6. On a :

$$\forall x > 0,\ h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$$

   Notons : $h_n : x \longmapsto \frac{1}{n+n^2x^2}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n$ est décroissante , donc h est décroissante (il suffit de fixer $a < b$ et de sommer les inégalités $h_n(b) < h_n(a)$.
   Il faut vérifier ensuite que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$, car h est la taux d'accroissement en 0 de f.
   Comme h est décroissante, on a deux choix : soit $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$, soit $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ existe (et c'est un réel). Considérons $M > 0$, on a alors :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=1}^{N} h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geqslant M$$

   Soit $\alpha < \frac{1}{N}$, on a alors :

$$\forall x < \alpha,\ \forall n \in \mathbb{N},\ h_n(x) \geqslant h_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

   on somme alors pour $n \in [\![1,N]\!]$, cela donne :

$$\forall x < \alpha,\ \sum_{n=1}^{N} h_n(x) \geqslant M$$

   et $h(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} h_n(x)$ car tous les h_n sont positifs. Ainsi :

$$\forall x < \alpha,\ h(x) \geqslant M$$

   On a donc $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$.
   Ainsi, f a un taux d'accroissement en 0 qui tend vers $+\infty$, ainsi, f n'est pas dérivable et admet une tangente verticale en 0.
7. On peut utiliser le théorème de la double limite par convergence uniforme sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x)\\ &=0.\end{aligned}$$

8. À $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, on a

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+n^2x^2}\right| = \frac{1}{n+n^2x^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$$

Ainsi, pour x non nul, on a convergence absolue.
Pour $x=0$, la convergence provient du théorème spécial des séries alternées.
Pour la convergence uniforme, on n'a pas de convergence normale, il faut donc utiliser l'estimation du reste pour une série alternée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)+(n+1)^2x^2} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, la suite de fonction (R_n) tend uniformément vers 0, ce qui signifie que la série de fonction $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
La continuité des fonction u_n passe alors à la fonction $\sum u_n$.
Enfin, on a :

$$\forall x \neq 0,\ \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \varphi(x)$$

et donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \varphi(x) = \varphi(0)$$

Ainsi, g est dérivable et $g'(0) = \varphi(0)$.

9. Il faut mettre sur le dessin toutes les informations obtenues dans l'exercice.

✯ Théorème de la double limite

Exercice 26

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x > 0,\ f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$$

   (a) Montrer que (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers une fonction f à déterminer.
   (b) Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

   (a) Étudier la convergence simple de $\sum g_n$.
   (b) Montrer que $\sum g_n$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

Correction :

1. (a) on écrit :

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ f_n(x) &= \exp\left(nx\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right)\\ &= \exp\left(n\ln(n)\left(\frac{x\ln(x)}{\ln(n)} - x\right)\right)\end{aligned}$$

   à $x > 0$ fixé, on a :

$$\frac{x\ln(x)}{\ln(n)} - x \longrightarrow -x$$

$$n\ln(n)\left(\frac{x\ln(x)}{\ln(n)} - x\right) \longrightarrow -\infty$$

   D'où la convergence de (f_n) vers la fonction nulle.

   (b) On peut faire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \text{ car } x\ln\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0 \text{ à } n \text{ fixé}$$

   et donc contradiction avec le théorème de la double limite (en 0).
   Ou encore simplement :

$$\|f_n - f\| \geqslant \lim_{x\longrightarrow 0} f_n(x) = 1$$

2. Fait en cours (fonction ζ).

Exercice 27 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$$

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.

   Sur le domaine de convergence de cette série de fonctions, on pose alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

Correction :

1. Si $x < 0$, alors $f_n(x) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$ donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. $f_n(0) = 1$ donc idem en 0.

   Si $x > 0$, alors $f_n(x) = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où la convergence simple sur $]0, +\infty[$ et f est définie sur $]0, +\infty[$.
2. On applique le théorème de la double limite sur $[1, +\infty[$, en effet, on a :

$$\|f_n\|_\infty^{[1,+\infty[} = f_n(1) = e^{-\sqrt{n}} = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   D'où la convergence normale (donc uniforme) sur $[1, +\infty[$.
   à n fixé, on a $\lim_{n\infty} f_n(x) = 0$ SAUF pour $n = 0$ où f_n est constante , égale à 1, d'où $\lim_{n\infty} f(x) = 1$.

Exercice 28 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2x^2}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

   On note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour $x > 0$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En considérant la série de fonction $\sum g_n$, où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = x^2 f_n(x)$ et en admettant l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$

Correction :

1. à $x > 0$ fixé, on a $f_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$. D'où la convergence simple.

   Il faut montrer la convergence sur tout segment. On considère $a > 0$ et on montre la convergence sur l'intervalle $[a, +\infty[$, comme a est quelconque, on en déduira la convergence sur tout segment. On a :

$$\forall x \geqslant a,\ f_n(x) \leqslant \frac{1}{1 + n^2a^2} \leqslant \frac{1}{na^2}$$

   D'où la convergence normale sur tout segment. Puis la continuité.
2. Il y aconvergence normale sur $[1, +\infty[$, on peut donc appliquer le théorème de la double limite, qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{x \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

   d'où $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$.
3. On démontre qu'il y a convergence normale de la série $\sum g_n$ sur $[1, +\infty[$.
   On a :

$$1 + n^2x^2 \geqslant n^2x^2 \qquad \text{donc } \frac{x^2}{1 + n^2x^2} \leqslant \frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2}$$

   et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV D'où la convergence normale sur $[1, +\infty[$.
   D'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x \longrightarrow +\infty} g_n(x) = \frac{1}{n^2}$$

On peut alors appliquer le théorème de la double limite qui donne :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \longrightarrow +\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^2} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$$