Table des matières

Les fonctions trigonométriques réciproques 3

Exercices sur les fonctions trigonométriques réciproques 17

Fonctions trigonométriques hyperboliques 43

Lien entre l'algèbre linéaire et l'étude des suites 49

Formules de Taylor 55

Théorème de la limite de la dérivée 65

Compléments sur la manipulation des relations de comparaison 69

4 **Séries entières** 73

I **Lemme d'Abel et rayon de convergence** 73

I.1 Définitions 73

I.2 Lemme d'Abel 74

I.3 Calculs de rayon de convergence 77

II **Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle** 83

III **Développement en série entière** 86

III.1 Fonctions développables en série entière 86

III.2 Développements en série entière des fonctions usuelles 91

III.3 Extension au cas de la variable complexe 98

Exercices 101

Calcul de DSE en utilisant des équations différentielles 127

Étude de fonctions définies par une intégrale 131

Résolution d'un système avec paramètres 139
Passage d'un mode de représentation d'un sev à l'autre 143
Révisions algèbre linéaire 147
Exercices : Rappels et compléments d'algèbre linéaire 155
Fonctions génératrices 173
Rappels sur les polynômes 189
Exercices classiques sur les polynômes 217

5 Réduction des endomorphismes 241

I Éléments propres 241
I.1 Valeurs et vecteurs propres 242
I.2 Sous-espace propre 243
I.3 Valeurs propres et polynôme d'endomorphisme 253

II Polynôme caractéristique 253
II.1 Définition 253
II.2 Lien avec les valeurs propres 255
II.3 Coefficients 258
II.4 Mutliplicité d'une valeur propre 260

III Diagonalisation en dimension finie 264
III.1 Définitions 264
III.2 Lien avec la dimension des sous-espaces propres 267
III.3 Lien avec le polynôme caractéristique 268
III.4 Calcul effectif de la diagonalisation 270

IV Diagonalisation et polynômes annulateurs 274
IV.1 Théorème de Cayley-Hamilton 274
IV.2 Condition de diagonalisation et polynôme annulateur 274
IV.3 Application aux endomorphisme induit 276

V Trigonalisation 276
V.1 Définitions 276
V.2 Lien avec le polynôme caractéristique 277
V.3 Exemple de réalisation de la trigonalisation 277

Exercices 283

Les fonctions trigonométriques réciproques

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

⋆ Rappel sur les équations trigonométriques

Cosinus égaux

$$\begin{aligned}\cos x = \cos\alpha &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi \\ &\iff x \equiv \alpha\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\alpha\,[2\pi]\end{aligned}$$

Sinus égaux

$$\begin{aligned}\sin x = \sin\alpha &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi \\ &\iff x \equiv \alpha\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \alpha\,[2\pi]\end{aligned}$$

Tangentes égales

$$\begin{aligned}\tan x = \tan\alpha &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + k\pi \\ &\iff x \equiv \alpha\,[\pi]\end{aligned}$$

⋆ Fonction arcsinus

Proposition .1 La fonction :

$$\begin{array}{ccc}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x)\end{array}$$

i.e. la restriction de la fonction sin à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est bijective.

Définition .1 On appelle fonction arcsinus, la bijection réciproque de la fonction précédente. C'est donc la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$\arcsin : \begin{cases}[-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution } x \text{ de l'équation } \sin(x) = y \text{ avec } x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

Ce n'est pas la bijection réciproque de la fonction sinus (qui n'est pas injective), c'est la bijection réciproque de la restriction de la fonction sinus à l'intervalle « *naturel* » $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition .2 Par définition, on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1,1],\ \sin(x) = y \iff x = \arcsin(y)$$

Ce qui donne aussi :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin(x)) = x$$

et

$$\forall y \in [-1,1],\ \sin(\arcsin(y) = y.$$

(!) La première relation a un sens si $x \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, mais elle n'est pas vraie alors : par exemple, $\arcsin(\sin(3\pi))) = \arcsin(0) = 0 \neq 3\pi$.
Un exercice classique est d'exprimer $\arcsin(\sin(x))$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Lorsque l'on travaille avec les fonction trigonométriques réciproques, le plus important est les intervalles.

Tableau de valeurs :

On « renverse » le tableau de valeur de la fonction cosinus.

y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(y)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Représentation graphique

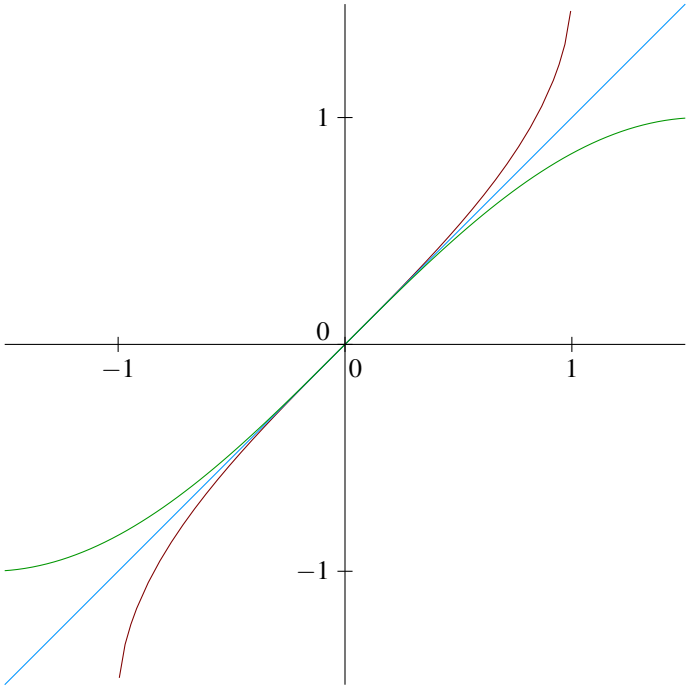


FIGURE 3.1 – **Représentation graphique** Fonction sin et arcsin

Proposition .3 La fonction arcsinus est impaire, strictement croissante, continue sur $[-1,1]$, et dérivable sur $]-1,1[$.

La dérivée est :

$$\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

R La continuité est une conséquence du théorème de la bijection continue, la dérivabilité et l'expression de la dérivée proviennent de la dérivation des bijections réciproques.

Démonstration. **imparité :**

Déjà $[-1,1]$ est symétrique par rapport à 0.

Soit $x \in [-1,1]$, il faut montrer que $\arcsin(x) = -\arcsin(-x)$.

Par définition, $\arcsin(x)$ est la solution de l'équation (E) $\sin(t) = x$ d'inconnue $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tandis que $\arcsin(-x)$ est la solution de l'équation (E') $\sin(t) = -x$ d'inconnue $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Il y a donc deux choses à vérifier :

- que $\sin\Big(-\arcsin(-x)\Big) = x$, *i.e.* que $-\arcsin(-x)$ est aussi une solution de l'équation (E),
- et que $-\arcsin(-x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *i.e.* que c'est une solution dans le bon intervalle.

Pour la première partie, on a :

$$\begin{aligned} \sin\Big(-\arcsin(-x)\Big) &= -\sin\Big(\arcsin(-x)\Big) && \text{imparité de la fonction sinus} \\ &= -(-x) = x && \text{car } \sin(\arcsin(-x)) = -x. \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie : on sait que $\arcsin(-x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, $-\arcsin(-x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, comme l'équation (E) $\sin(t) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit : $\arcsin(x) = -\arcsin(-x)$.

Puis comme x est quelconque, on en déduit l'imparité de la fonction arcsinus. ■

R On peut montrer que si f est impaire et bijective, alors f^{-1} est aussi impaire

Autre manière de voir

On a : $\sin\Big(-\arcsin(-x)\Big) = \sin(\arcsin(x))$, donc (par égalité de sinus) :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ -\arcsin(-x) = \arcsin(x) + 2k\pi,\ \text{ou}\ -\arcsin(-x) = \pi - \arcsin(x) + 2k\pi,$$

Comme,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant -\arcsin(-x) \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$\text{et } -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$\text{on en déduit } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant \arcsin(x) + 2k\pi \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

La première relation n'est donc possible que si $k = 0$.

Pour la deuxième relation, on a :

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant -\arcsin(-x) \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$\text{et } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant \pi - \arcsin(x) + 2k\pi \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Ainsi, cette relation est impossible.

R Cette remarque montre le lien entre la non-unicité des équations trigonométriques (*i.e.* la non injectivité des fonctions trigonométriques) et les problèmes liés aux intervalles lorsque l'on manipule les fonctions trigonométriques réciproques.

Démonstration. **stricte croissance :** Soit x et y deux éléments de $[-1,1]$, on a alors :

$$\arcsin(x) \text{ et } \arcsin(x) \text{ sont éléments de } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\text{la fonction sinus est strictement croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\text{ainsi : } \arcsin(x) \leqslant \arcsin(y) \Leftrightarrow \sin(\arcsin(x)) \leqslant \sin(\arcsin(y)) \Leftrightarrow x \leqslant y$$

On reconnaît la caractérisation des fonctions strictement croissante par équivalence.

Autre rédaction : Soit x et y deux éléments de $[-1,1]$, avec $x < y$. Supposons par l'absurde que $\arcsin(x) \geqslant \arcsin(y)$, comme il s'agit de deux éléments de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit par croissance de la fonction sinus sur cette intervalle :

$$\sin(\arcsin(x)) \geqslant \sin(\arcsin(y)) \text{ soit } x \geqslant y,$$

contradiction avec l'hypothèse $x < y$. ■

R En adaptant, on voit que si f est strictement croissante et bijective, alors f^{-1} est aussi strictement croissante. Ce qui est une conséquence du théorème de la bijection continue.

⋆ Fonction arccosinus

Proposition .4 La fonction :

$$\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

i.e. la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0,\pi]$ est bijective. On a donc :

$$\forall y \in [-1,1],\ \exists! x \in [0,\pi],\ \cos(x) = y.$$

La fonction cosinus n'est évidement pas bijective. C'est sa restriction qui est bijective.

Définition .2 On appelle fonction arccosinus, la bijection réciproque de la fonction précédente. C'est la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$\arccos : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution } x \text{ de l'équation } \cos(x) = y \text{ avec } x \in [0,\pi] \end{array} \right.$$

Proposition .5 Par définition, on a :

$$\forall x \in [0,\pi], \forall y \in [-1,1], \cos(x) = y \Longleftrightarrow x = \arccos(y)$$

ce qui donne aussi :

$$\forall x \in [0,\pi], \arccos(\cos(x)) = x$$

et

$$\forall y \in [-1,1], \cos(\arccos(y) = y.$$

Tableau de valeurs :

y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(y)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Proposition .6 La fonction arccosinus est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.
Elle est dérivable sur $]-1,1[$, avec :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La continuité est une conséquence du théorème de la bijection continue.

La dérivabilité et l'expression de la dérivée proviennent de la dérivation des bijections réciproques.

Représentation graphique

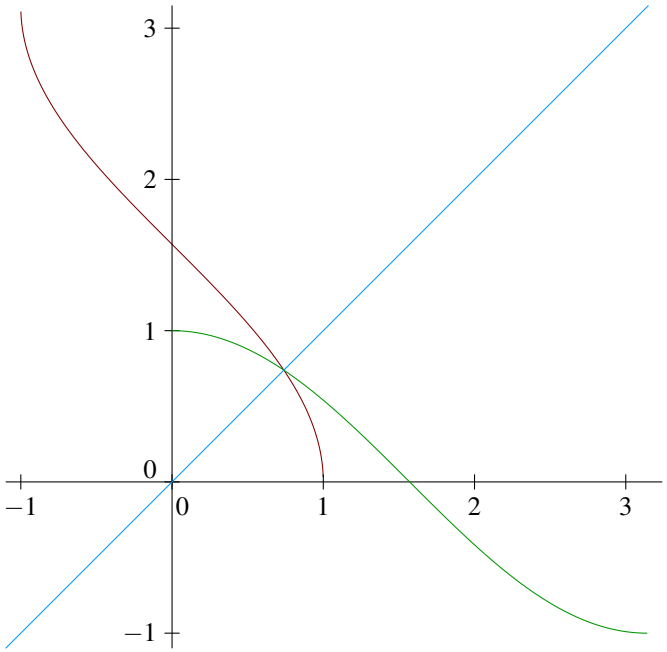


FIGURE 3.2 – **Représentation graphique :** Fonction cos et arccos

✯ Relation entre arccos et arcsin

Un exercice classique et important consiste à montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

On fixe $x \in [-1,1]$, et on montre la relation : $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.
Par définition, $\arccos(x)$ est la solution de l'équation $\cos(t) = x$ d'inconnue $t \in [0,\pi]$. Il faut donc montrer que :

- $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ est une solution de l'équation,
- $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ est un élément de $[0,\pi]$.

Pour la première partie, on a :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) &= \sin\Big(\arcsin(x)\Big) \qquad \text{en utilisant } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \\ &= x. \end{aligned}$$

D'où $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ est une des solutions de l'équation $\cos(t) = x$.
Pour les intervalles, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(x) &\leqslant \frac{\pi}{2} \\ \text{donc } 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) &\leqslant \pi \end{aligned}$$

D'où $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ est LA solution de l'équation $\cos(t) = x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$. On en déduit la relation.

Autre point de vue :

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) &= \sin(\arcsin(x)) \\ &= x = \cos(\arccos(x)) \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \cos(\arccos(x))$$

On a donc une égalité du type : $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$. On applique donc l'égalité de cosinus pour obtenir :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \arccos(x) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = -\arccos(x) + 2k\pi.$$

L'examen des intervalles assure que la seule possibilité est la première relation avec $k = 0$.

R On peut aussi montrer cette relation en dérivant. Puisque la fonction $x \mapsto \arccos(x) + \arcsin(x)$ a une dérivée nulle et est donc constante.

✯ Cosinus de arcsinus

Un autre exercice important est de montrer :

$$\forall x \in [-1,1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Pour cela, on fixe $x \in [-1,1]$, on utilise la relation « *à angle constant* » entre les fonctions cosinus et sinus :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$
$$\text{donc} |\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

En appliquant à $\alpha = \arcsin x$, cela donne :

$$|\cos\arcsin x| = \sqrt{1-\sin^2\arcsin(x)} = \sqrt{1-x^2}$$

Il reste à enlever les valeur absolue :

$$\text{on a } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$\text{et donc } \cos\arcsin x \geqslant 0.$$

On en déduit donc :

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

C'est en utilisant ces relations que l'on peut calculer la dérivée :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arccos(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arcsin(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

✯ Fonction arctangente

Proposition .7 La fonction :

$$\begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

i.e. la restriction de la fonction tan à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est bijective.

Définition .3 On appelle fonction arctangente, la bijection réciproque de la fonction précédente. C'est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\arctan : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ y & \longmapsto & \text{l'unique solution } x \text{ de l'équation } \tan(x) = y \text{ avec } x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{array} \right.$$

Proposition .8 Par définition, on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R}, \tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan(y)$$

ce qui donne aussi :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x$$

et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(y) = y.$$

Tableau de valeurs :

y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\infty$
$\arctan(y)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

Proposition .9 La fonction arctangente est continue, impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Représentation graphique

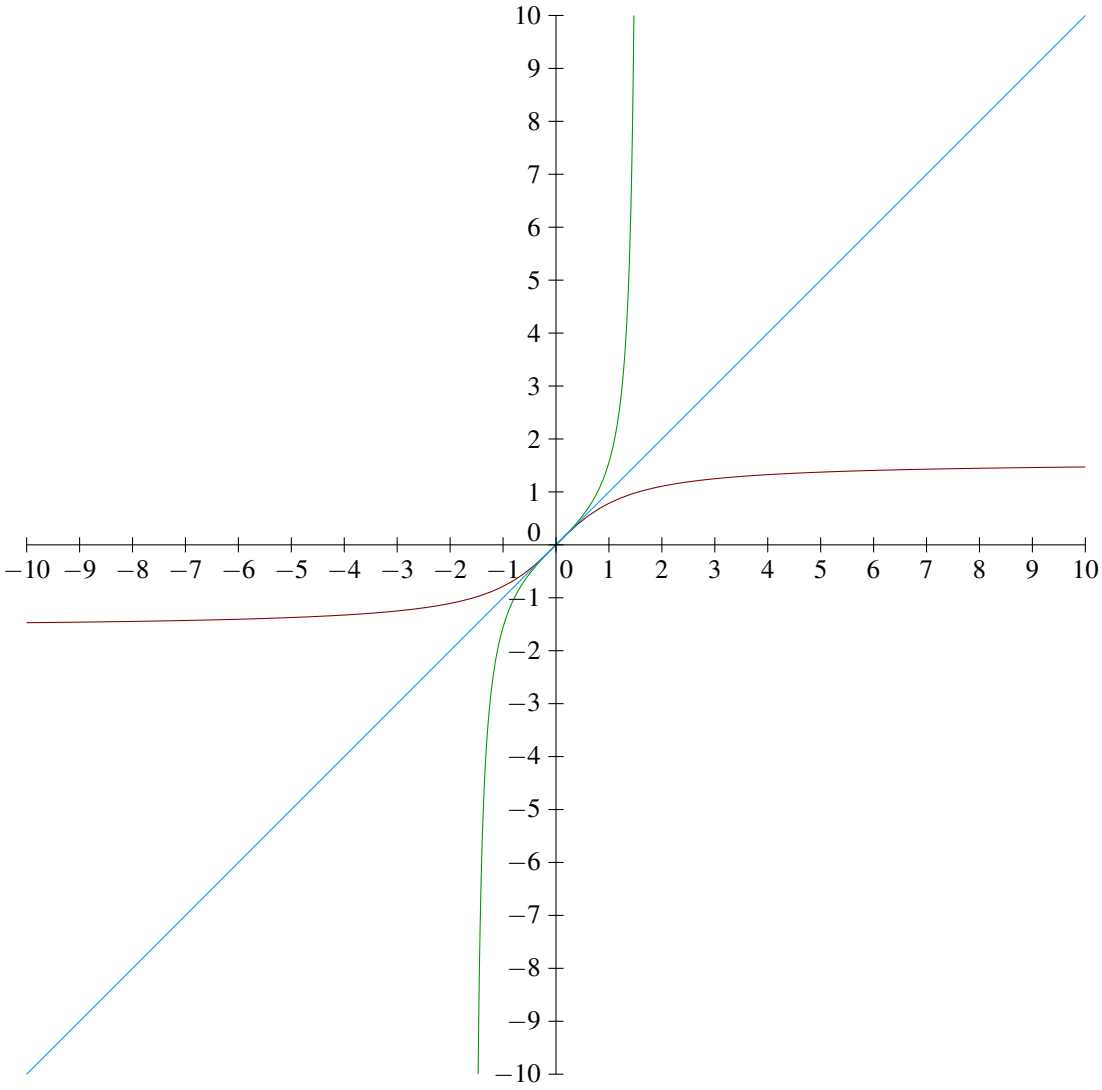


FIGURE 3.3 – **Représentation graphique :** Fonction tangente et arctangente

✯ **Relation entre** $\arctan(x)$ **et** $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Montrons que :

$$\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Fixons $x > 0$ et montrons : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Comme par définition, $\arctan(x)$ est la solution de l'équation : $\tan(t) = x$ d'inconnue $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il y a deux choses à démontrer :

- $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est aussi solution de l'équation.
- $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est aussi élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour la première partie :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

en utilisant $\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

Ainsi, $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est une solution de $\tan(t) = x$.

Pour la deuxième partie :

$$\text{on a } \frac{1}{x} > 0 \text{ donc } 0 < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$$
$$\text{d'où } 0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

En particulier, $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est aussi élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi, $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est LA solution de $\tan(t) = x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ce qui donne :

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puis la relation puisque x est un réel strictement positif quelconque.

Cherchons de même un lien entre $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x < 0$. Soit $x < 0$ fixé, on a toujours la relation :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x = \tan(\arctan(x)).$$

mais cette fois, on a :

$$\frac{1}{x} < 0 \text{ donc } -\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$
$$\text{d'où } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \pi.$$

En particulier, $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est élément de $\left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$, et donc pas dans le « même ensemble » que $\arctan(x)$. Précisément, ils ne sont pas élément d'un ensemble sur lequel la fonction tangente est injective.

Il faut alors « enlever » π pour avoir les deux éléments dans le même ensemble.

Cela s'écrit :

$$\text{on sait } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tan(\arctan(x))$$
$$\text{on en déduit : } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \pi\right) = \tan(\arctan(x))$$
$$\text{par périodicité de la fonction tangente}$$
$$\text{c'est-à-dire } \tan\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tan(\arctan(x)).$$

Cette fois-ci, on a :

$$\frac{1}{x} < 0 \text{ donc comme on l'a vu } -\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$
$$\text{d'où } -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < 0.$$

En particulier, $-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ainsi que $\arctan(x)$.

On est donc sur un intervalle sur lequel la fonction tangente est injective, donc de la relation : $\tan\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tan(\arctan(x))$, on déduit :

$$-\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(x),$$

ce qui s'écrit puisque x est quelconque :

$$\forall x < 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Obtenir cette relation en dérivant

Considérons la fonction :

$$f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, comme somme et composée de fonctions dérivables.

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) =& \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ =& \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction f est nulle sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. La fonction f est donc constante sur ces deux intervalles.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, f(x) =& f(1) = \frac{\pi}{2} \\ \text{et } \forall x < 0, f(x) =& f(-1) = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

R On peut aussi calculer la limite de f en $\pm\infty$.

⋆ Exercices à savoir faire

Exercice 1 Tracer les courbes suivantes après les avoir étudiées :

$$f(x) = \arcsin(\sin(x)), \qquad g(x) = \arccos(\cos(x)), \qquad h(x) = \arctan(\tan(x)).$$

Correction :

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ & f(x) = x \\ \forall x \in [0, \pi],\ & g(x) = x \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ & h(x) = x\end{aligned}$$

et

f est 2π périodique

g est 2π périodique

h est π périodique

h est alors entièrement déterminée. Enfin :

$$\begin{aligned}\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],\ f(x) =& \arcsin(\sin(x)) \\ =& \arcsin(\sin(x-\pi)) = x - \pi\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\forall x \in [-\pi, 0],\ g(x) =& \arccos(\cos(x)) \\ =& \arccos(\cos(-x)) = -x.\end{aligned}$$

Exercice 2 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Correction :

Classiquement, on part de la relation à angle constant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ |\cos(\alpha)| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

On remplace α par $\arctan(x)$. Ce qui donne :

$$|\cos(\arctan(x))| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Il reste à enlever les valeurs absolues, en remarquant que $\cos(\arctan(x)) \geqslant 0$ car $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour le deuxième :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ |\sin(\alpha)| = \frac{|\tan(\alpha)|}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

Ce qui donne :

$$|\sin(\arctan(x))| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

On peut enlever les valeurs absolues par disjonction des cas selon le signe de x.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}, \qquad \arcsin x = 2\arctan x.$$

Correction première équation : Soit x la solution de (E). On a alors : $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On applique la fonction tangente à (E) pour obtenir :

$$\tan\left(\arctan x + \arctan(2x)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

On utilise alors la formule : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$. en remplaçant a par $\arctan(x)$ et b par $\arctan(2x)$.

On a bien :

$$\begin{aligned} 0 < a < \frac{\pi}{4} \text{ donc} &\qquad \tan(a) \text{existe} \\ 0 < b < \frac{\pi}{4} \text{ donc} &\qquad \tan(b) \text{existe} \\ 0 < a+b < \frac{\pi}{4} \text{ donc} &\qquad \tan(a+b) \text{existe}, \end{aligned}$$

donc on peut appliquer cette formule.

REM : penser à le vérifier !

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{x+2x}{1-2x^2} &= 1 \\ 3x &= 1-2x^2 \\ 2x^2+3x-1 &= 0. \end{aligned}$$

La solution x est donc solution de cette équation de degré 2.

On résout rapidement cette équation : $\Delta = 9+8 = 17$ et les solutions sont

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \qquad x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}.$$

On a donc deux solutions candidates.

Réciproquement. On sait que :

$$\tan\left(\arctan x_1 + \arctan(2x_1)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Il reste à estimer la valeur $\arctan x_1 + \arctan(2x_1)$ pour savoir dans quel intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ cette quantité se situe.

On a :

$$\frac{-3+4}{4} = \frac{1}{4} < x_1 < \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 < x_1 < 1 \text{ donc } 0 < \arctan(x_1) &< \frac{\pi}{4} \\ 0 < 2x_1 < 1 \text{ donc } 0 < \arctan(2x_1) &< \frac{\pi}{4} \\ \text{donc } 0 < \arctan x_1 + \arctan(2x_1) &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Au final, on a :

$$\begin{aligned} \tan\left(\arctan x_1 + \arctan(2x_1)\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \arctan x_1 + \arctan(2x_1) &\in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{\pi}{4} &\in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \tan \text{ injective sur } &\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

D'où :

$$\arctan x_1 + \arctan(2x_1) = \frac{\pi}{4}$$

et x_1 est bien solution.

Pour x_2, même démarche :

$$\frac{-3-5}{4} = -2 < x_2 < \frac{-3-4}{4} = -\frac{7}{4}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} x_2 < -1 \text{ donc } -\frac{\pi}{2} < \arctan(x_2) &< -\frac{\pi}{4} \\ 2x_2 < 0 \text{ donc } -\frac{\pi}{2} < \arctan(2x_2) &< 0 \\ \text{donc } -\pi < \arctan x_2 + \arctan(2x_2) &< -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Donc x_2 n'est pas solution. Plus précisément, on sait :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \arctan x_2 + \arctan(2x_2) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Comme $-\pi < \arctan x_2 + \arctan(2x_2) < -\frac{\pi}{4}$, nécessairement $k = -1$ et donc :

$$\arctan x_2 + \arctan(2x_2) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Correction deuxième équation : Déjà $\mathscr{D}_f = [-1,1]$.

Soit x solution de $\arcsin x = 2\arctan x$, on a alors :

$$\begin{aligned} x = \sin(\arcsin(x)) &= \sin(2\arctan x) \\ &= 2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x) \\ &= 2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, x est solution de $x = \frac{2x}{1+x^2}$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} x + x^3 &= 2x \\ x^3 &= x \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x &= -1. \end{aligned}$$

On a trois solutions candidates : 0, 1 et -1.

On peut alors vérifier, puisque :

$$\begin{aligned} \arcsin(0) = 0 \text{ et } \arctan(0) &= 0 \\ \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \arctan(1) &= \frac{\pi}{4} \\ \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \arctan(-1) &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

D'où ces trois valeurs sont bien solutions.

On peut aussi remarquer que pour $x \in [-1,1]$, $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ etarctan$(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ donc $2\arctan(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. finalement,

$$\forall x \in [-1,1], \arcsin x = 2\arctan x \Leftrightarrow \sin(\arcsin(x)) = \sin(2\arctan(x)).$$

Cela donne :

$$\mathscr{S} = \left\{0, 1, -1\right\}$$

Exercices sur les fonctions trigonométriques réciproques

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Exercice 1

1. Monter que :

$$\forall \in \mathbb{R},\ \arctan(x)-\arctan(x+1)=\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

2. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

Calculer la valeur de u_n explicitement, en déduire $\lim\limits_{n\infty} u_n$

Exercice 2 Soit $x\in\mathbb{R}$ et $\theta=\arctan(x-1)$.

1. Exprimer en fonction de θ

$$T(x)=\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+1}}$$

2. En déduire que $-1\leqslant T(x)\leqslant 1$ pour tous les x réels.
3. En discutant sur x, exprimer $\arcsin(T(x))$ en fonction de $\arctan(x-1)$.

Correction :

1. Par définition de θ comme une arctan, $\cos\theta>0$ et $x-1=\tan\theta$ donc

$$T(x)=\frac{1+\tan\theta}{\sqrt{2}\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\frac{|\cos\theta|}{\sqrt{2}}(1+\tan\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

2. L'expression précédente de $T(x)$ comme un sin montre que $-1\leqslant T(x)\leqslant 1$ pour tous les x réels.
3. D'après les questions précédentes, $\arcsin(T(x))=\arcsin(\sin(\theta+\frac{\pi}{4}))$.
   Lorsque $\theta+\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, on a évidemment $\arcsin(T(x))=\theta+\frac{\pi}{4}$. Pour quels x cela se produit-il ?
   Si $x\leqslant 2$, alors $x-1\leqslant 1$ donc $\theta=\arctan(x-1)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}]$ donc $\theta+\frac{\pi}{4}\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ et

$$\arcsin(T(x))=\arctan(x-1)+\frac{\pi}{4}$$

   Si $x>2$, alors $x-1>1$ donc $\theta=\arctan(x-1)\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ donc $\theta+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}[$ et $\theta+\frac{\pi}{4}$ a le même sin que

$$\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$$

   On en déduit

$$\arcsin(T(x))=\frac{3\pi}{4}-\arctan(x-1)$$

Exercice 3

1. **Approximation de** $\tan x$**.**
   Soit a et b deux réels fixés dans $]0,\frac{\pi}{4}[$, soit x un réel quelconque dans $]0,\frac{\pi}{4}[$, montrer que dans

$$\{\tan(a+nb),n\in\mathbb{Z}\}$$

il existe un u tel que $u \leqslant \tan x < u + 2b$.

2. **Mise en oeuvre matricielle.**
Soit $b \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et λ un réel non nul quelconque, on pose $k = \tan b$ et on définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ x_0 &= \lambda \sin a \\ y_0 &= \lambda \cos a \end{aligned}$$

Calculer $\frac{x_n}{y_n}$

3. **Intérêt d'une approche gloutonne.**
On considère trois nombres b, b_0, L tels que

$$0 < b_1 < b_0 < L$$

On considère les propositions suivantes :

Pour tout $x \in [0, L]$, il existe un unique $n(x)$ entier tel que $x = n(x)b + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
Pour tout $x \in [0, L]$, il existe un unique couple $(n_0(x), n_1(x))$ d'entiers tels que $x = n_0(x)b_0 + r_0$ avec $0 \leqslant r_0 < b_0$ et $r_0 = n_1(x)b + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

(a) Justifier ces propositions en précisant les entiers $n(x)$, $n_0(x)$, $n_1(x)$.
(b) Calculer les intégrales suivantes pour $L = 1$, $b_0 = 0.1$, $b = 0.01$.

$$\frac{1}{L}\int_0^L n(x)\,dx, \frac{1}{L}\int_0^L (n_0(x) + n_1(x))\,dx$$

(c) Présenter una algorithme donnant une approximation par défaut de $\tan x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ à 0.05 près en moins de 10 itérations.
Comment s'interprètent les calculs de la question précédente ?

Correction :

1. La fonction est définie dans $\mathbb{R}$ car $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\frac{2x}{1+x^2}$ sont dans $[-1, 1]$. En effet :

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} - 1 = \frac{-2x^2}{1+x^2} \leqslant 0 \qquad \frac{1-x^2}{1+x^2} + 1 = \frac{2}{1+x^2} \geqslant 0$$
$$\frac{2x}{1+x^2} - 1 = -\frac{(1-x)^2}{1+x^2} \leqslant 0 \qquad \frac{(1+x)^2}{1+x^2} + 1 \geqslant 0$$

2. (a) On utilise les formules de cours

$$\arccos(-u) = \pi - \arccos u \qquad \arcsin(-u) = -\arcsin u$$

(b) En combinant les relations précédentes, on obtient

$$\left.\begin{aligned} f(\frac{1}{x}) &= \arccos\left(-\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} \\ f(-x) &= \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\frac{1}{x}) + f(-x) = \pi$$

3. On reconnait les formules donnant le sin et le cos en fonction des tan de la moitié. On a donc, pour $x = \tan\theta$:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos(2\theta) \qquad \frac{2x}{1+x^2} = \sin(2\theta)$$

4. On pose $\theta = \arctan x$ et on exprime $f(x)$ dans quatre cas selon le tableau suivant :

x	$]-\infty,-1]$	$[-1,0]$	$[0,1]$	$[1,+\infty[$
θ	$]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}]$	$[-\frac{\pi}{4},0]$	$[0,\frac{\pi}{4}]$	$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$
2θ	$]-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi[$
$\arccos(\cos(2\theta))$	-2θ	-2θ	2θ	2θ
$\arcsin(\sin(2\theta))$	$-\pi-2\theta$	2θ	2θ	$\pi-2\theta$
$f(x)$	$-\pi-4\arctan x$	0	$4\arctan x$	π

On en déduit le graphe de f. On aurait pu se limiter aux deux intervalles dans $\mathbb{R}_+$ et obtenir les autres expressions avec le résultat de 2.b.

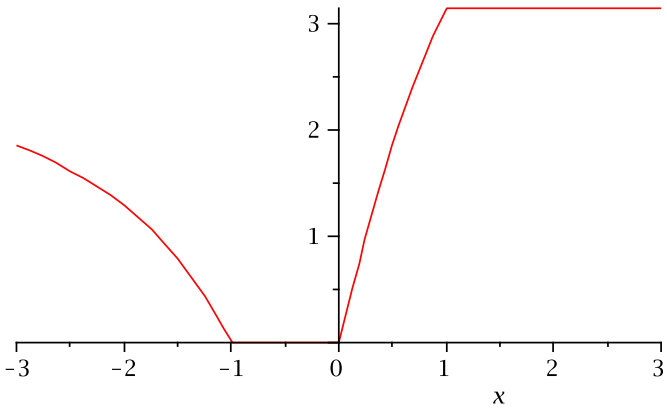


FIGURE 3.4 – Graphe de $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

Exercice 4 Soit la fonction $f : x \longmapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. (a) Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la fonction f est impaire.
2. (a) Déterminer le plus grand ensemble $\mathscr{E}$ sur lequel la fonction f est dérivable.
   (b) Montrer :

$$\forall x \in \mathscr{E},\ f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1,1[\\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(c) Calculer $f(0)$ puis exprimer simplement $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

3. (a) Pour $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, exprimer $\sin(\alpha)$ en fonction de $\tan(\alpha)$, et $\cos(\alpha)$ en fonction de $\tan(\alpha)$.
(b) Pour $x \in [0,1]$, exprimer $\sin(\arctan(x))$ et $\cos(\arctan(x))$. En déduire $\sin(2\arctan(x))$.
(c) Retrouver la valeur de $f(x)$ pour $x \in [0,1]$.

Commentaire : il s'agit de dériver puis de reconnaître une dérivée usuelle. On doit alors en déduire l'expression de f. On retrouve alors le résultat par des manipulations des fonctions trigonométriques réciproques.

Correction :

1. (a) On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1+x^2 & & \\ & & y & \mapsto & \frac{1}{y} \end{array}$$

qui montre par composition que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Par produit, on en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$..
On a de plus pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 &\Leftrightarrow 2x \leqslant 1+x^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant 1-2x+x^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant (1-x)^2 \text{ vrai.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$. On a de même pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} \geqslant -1 &\Leftrightarrow 2x \geqslant -1-x^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant -(1+x)^2 \text{ vrai.} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction :

$$x \mapsto \frac{2x}{1+x^2} \text{ est à valeur dans } [-1,1].$$

Cela n'est pas évident. 0 pour ceux qui cachent cette difficulté.

On a donc le schéma de composition suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1+x^2} & & \\ & & y & \mapsto & \arcsin(y) \end{array}$$

qui montre que la fonction $x \longmapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) On a $\mathbb{R}$ symétrique, et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) &= \arctan\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x). \end{aligned}$$

D'où f est impaire.

2. (a) En suivant les calculs faits dans la première question, on déduit

$$\frac{2x}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow (1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{2x}{1+x^2} = -1 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

On en déduit le schéma de composition suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} & \to &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1+x^2} & & \\ & & y & \mapsto & \arcsin(y) \end{array}$$

qui montre que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. On a donc : $\mathscr{E} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(b) On a pour $x \in \mathscr{E}$, $f(x) = \arctan(u(x))$, en notant $u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. On a alors :

$$u'(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathscr{E},\ f'(x) =& \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\ =& \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} \qquad \text{car } 1+x^2>0\end{aligned}$$

NB : 0.5 pour ceux qui s'arrêtent à la première ligne sans erreurs. L'énoncé donne l'indication de simplifier l'expression.
On peut alors soit utiliser $(1+x^2)^2-4x^2 = (1+x^2+2x)(1+x^2-2x)$, soit développer pour obtenir :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathscr{E},\ f'(x) =& \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}\frac{1}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} \\ =& \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \\ =& \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}\frac{1}{|1-x^2|}\end{aligned}$$

NB : la relation $\sqrt{x^2} = |x|$ est trop souvent oubliée ! Pourtant l'énoncé indique clairement que l'on doit séparer différent cas.
On trouve :

$$\forall x \in \mathscr{E},\ f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1,1[\\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(c) On a $\forall x < -1$, $f'(x) = -2\arctan'(x)$. Donc les deux dérivées coïncident sur l'intervalle $]-\infty,-1[$, donc les deux fonctions sont égales à une constante près. On en déduit : $\exists k_1 \in \mathbb{R}$, $\forall x < -1$, $f(x) = -2\arctan(x) + k_1$. on en déduit de même les relations :

- ⋆ $\exists k_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = 2\arctan(x) + k_2$, et
- ⋆ $\exists k_3 \in \mathbb{R}$, $\forall x > 1$, $f(x) = -2\arctan(x) + k_3$

Il reste deux points : déterminer les constantes, puis expliquer ce qui se passe en 1 et -1.
Pour les constantes, on peut par exemple considérer la limite lorsque $x \to 1$.
On a :

$$\begin{aligned}\text{d'un côté : } f(1) =& \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \\ \text{par continuité en} 1^- \text{ on a : } f(1) =& \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2\arctan(x) + k_2 = \frac{\pi}{2} + k_2 \\ \text{d'où} \qquad & k_2 = 0 \\ \text{on refait pareil en} 1^+ f(1) =& \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -2\arctan(x) + k_3 = -\frac{\pi}{2} + k_3 \\ \text{d'où} \qquad & k_3 = \pi.\end{aligned}$$

Par imparité, on en déduit : $k_1 = -\pi$. D'où l'expression de f :

$$f(x) = \begin{cases} -2\arctan(x) - \pi & \text{si } x < -1 \\ 2\arctan(x) & \text{si } x \in]-1,1[\\ -2\arctan(x) + \pi & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Par continuité, on en déduit que ces expressions sont valables en -1 et en 1. D'où :

$$f(x) = \begin{cases} -2\arctan(x) - \pi & \text{si } x < -1 \\ 2\arctan(x) & \text{si } x \in [-1,1] \\ -2\arctan(x) + \pi & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(d) On a

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{1+x^2} = 1$$
$$\text{et } \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{2}{1+x^2} = -1$$

La dérivée à droite n'est pas égale à la dérivée à gauche donc la fonction f n'est pas dérivable en 1.

3. (a) **Commentaire :** cette question et la suivante ont été traitées en cours.
On a

$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1,$$

D'où en divisant par $\cos^2(\alpha)$:

$$\tan^2(\alpha)+1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$
$$\text{c'est-à-dire } \cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$$
$$\text{d'où } |\cos(\alpha)| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

Comme $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\alpha) \geqslant 0$, on en déduit :

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}.$$

NB : 0 si pas d'argument de signe !
On repart de la relation : $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$, en divisant par $\sin^2$. Cela donne :

$$1+\frac{1}{\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$$
$$\frac{\tan^2(\alpha)+1}{\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$$
$$\text{c'est-à-dire} \qquad \sin^2(\alpha) = \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha)+1}$$
$$|\sin(\alpha)| = \frac{|\tan(\alpha)|}{\sqrt{\tan^2(\alpha)+1}}$$

Comme $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(\alpha) \geqslant 0$, et $\tan(\alpha) > 0$, on en déduit :

$$\sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}.$$

(b) On remplace alors α par $\arctan(x)$ ce qui est bien valide car comme $x \in [0,1]$, $\arctan(x) \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
NB : avant d'appliquer une relation avec un $\forall$, on vérifie que l'on est bien dans le domaine d'application !
On en déduit :

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{\tan(\arctan(x))}{\sqrt{\tan^2(\arctan(x))+1}}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Puis de même :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(\arctan(x))+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

On en déduit :

$$\sin(2\arctan(x)) = 2\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x))$$
$$= \frac{2x}{1+x^2}.$$

(c) Ainsi, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \sin(2\arctan(x)) = \sin\left(\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right) = \sin(f(x)).$$

NB : il est clair qu'avant d'en déduire : $2\arctan(x) = f(x)$, on doit donner un argument d'intervalle. On peut au plus écrire à ce stade :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists k_x \in \mathbb{Z},\ f(x) = 2\arctan(x) + 2k_x\pi \text{ ou } \pi - 2\arctan(x) + 2k_x\pi.$$

(le k dépends a priori de x).
Fixons $x \in [0,1]$, on a donc l'égalité $(*)$: $\sin(2\arctan(x)) = \sin(f(x))$.
Or on a : $\arctan(x) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, puisque $x \in [0,1]$, et donc : $2\arctan(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
D'un autre côté, $\frac{2x}{1+x^2} \geqslant 0$, donc

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ainsi $(*)$ est une égalité de sinus de deux quantités de l'intervalle : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme le sinus est injectif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on déduit de $(*)$ $f(x) = 2\arctan(x)$.
Comme x est quelconque, on en déduit : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 2\arctan(x)$.
REM : on peut bien sûr procéder de même sur les autres intervalles.

Exercice 5 On rappelle que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Résoudre l'équation suivante :

$$(E) \qquad \arccos(x) = 2\arctan(x).$$

Correction : déjà (E) est définie sur $[-1,1]$.
Considérons x solution de (E), on a alors :

$$\begin{aligned}\cos(\arccos(x)) = x &= \cos(2\arctan(x)) \\ &= 2\cos^2(arctan(x)) - 1 \\ &= 2\frac{1}{1+x^2} - 1 \\ &= \frac{1}{1+x^2}(2 - 1 - x^2) \\ &= \frac{1-x^2}{1+x^2}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'équation :

$$x + x^3 = 1 - x^2.$$

Que l'on écrit :

$$x + x^2 + x^3 = 1$$

c'est-à-dire $\frac{1-x^4}{1-x} = 1$ car $x \neq 1$.

Exercice 6

1. Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Résoudre l'équation suivante : $\arcsin(x) = \arctan(x)$ d'inconnue x réel.
3. Résoudre l'équation suivante : $\arccos(x) = \arctan(x)$ d'inconnue x réel.

Correction :

1. **Commentaire :** fait en cours.
   Soit x un réel. Comme $\arctan(x)$ apartient à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout α de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1+\tan^2(\alpha)$$

   on obtient :

$$\begin{aligned}\cos^2(\arctan(x)) &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}\\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

   Comme $\arctan(x)$ apartient à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et cos est positif sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que :

$$\cos(\arctan(x)) = \sqrt{\cos^2(\arctan(x))}$$

   On peut désormais conclure :

$$\begin{aligned}\cos(\arctan(x)) &= \sqrt{\cos^2(\arctan(x))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned}\sin(\arctan(x)) &= \tan(\arctan(x))\times\cos(\arctan(x))\\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

   (on peut aussi faire une disjonction des cas $x>0$ et $x<0$)
   En conclusion, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ \text{ et } \ \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Soit x un élément de $[-1,1]$. $\arcsin(x)$ et $\arctan(x)$ étant tous deux dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et sin étant injective sur cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned}\arcsin(x)=\arctan(x) &\Leftrightarrow \sin(\arcsin(x)) = \sin(\arctan(x))\\ &\Leftrightarrow x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\ &\Leftrightarrow x=0 \ \text{ ou } \ \sqrt{1+x^2}=1\\ &\Leftrightarrow x=0 \ \text{ ou } \ 1+x^2=1\\ &\Leftrightarrow x=0.\end{aligned}$$

   Pour tout x de $[-1,1]$, on a donc : $\arcsin(x)=\arctan(x)\Leftrightarrow x=0$
   Au final l'ensemble des solutions est le singleton $\left\{0\right\}$.

3. Déjà, soit $x\in[-1,0[$,
   On a alors $\arccos(x)\neq\arctan(x)$ car $\arccos(x)$ est strictement positif et $\arctan(x)$ est strictement négatif. On a donc aucune solution dans $[-1,0[$.
   On peut donc écrire :

$$\arccos(x)=\arctan(x)\Leftrightarrow \arccos(x))=\arctan(x)) \text{ et } x\in[0,1]$$

Dans la suite, on cherche donc des solutions dans $[0,1]$.
Or si $x \in [0,1]$, $\arccos(x)$ et $\arctan(x)$ sont tous deux dans $[0,\pi]$ et cos étant injective sur cet intervalle, on garde l'équivalence en composant par cosinus :

$$\begin{aligned}
\arccos(x)) = \arctan(x)) \text{ et } x \in [0,1] & \\
\Leftrightarrow \cos(\arccos(x)) = \cos(\arctan(x)) \text{ et } x \in [0,1] & \\
\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } x \in [0,1] & \\
\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{1+x^2} \text{ et } x \in [0,1] & \\
\text{car } x \geqslant 0 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant 0 & \\
\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0 \text{ et } x \in [0,1] & \\
\Leftrightarrow \left(x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x^2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \text{ et } x \in [0,1] & \\
\Leftrightarrow x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x \in [0,1] & \\
\text{car } \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ et } x^2 \geqslant 0 & \\
\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \text{ et } x \in [0,1] & \\
\text{car } -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < 0 \text{ et } x \geqslant 0 &
\end{aligned}$$

Cette solution convient bien car $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ appartient à $[0,1]$.

Pour tout x de $[-1,1]$, on a donc : $\arccos(x) = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$. L'ensemble des solution est donc le singleton : $\left\{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right\}$.

Exercice 7 **Application directe du cours**

Montrer :

$$\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

1. Sans utiliser la dérivation.
2. En utilisant la dérivation.
3. Adapter les deux méthodes lorsque $x < 0$.

Correction :

1. si $x > 0$, on pose

$$\alpha = \arctan(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

. On a :

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= x \\
\tan(\beta) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\tan(\arctan\left(\frac{1}{x}\right))} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$.

Comme $x>0$, on a $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\beta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Comme la fonction tangente est bijective sur cet intervalle, on a :

$$\alpha=\beta\iff\tan(\alpha)=\tan(\beta).$$

D'où le résultat : $\alpha=\beta$.

La formule de $\tan(a+b)$ n'est valable que si $a+b$ ne s'écrit pas sous la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, ce qui n'est pas le cas ici.

2. Considérons la fonction : $f:\ x\longmapsto\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, f est alors dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et on a :

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\times\frac{1}{x^2}=0.$$

Donc f est constante sur chacun des intervalles où elle est dérivable. Elle est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc : donc

$$\forall x>0,\ f(x)=f(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

(on peut aussi prendre les limites en 0^+ ou $+\infty$).

3. Pour la deuxième méthode, on a de même f constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et :

$$\forall x<0,\ f(x)=f(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

Pour la première méthode : on a toujours $\tan(\alpha)=\tan(\beta)$, mais si $x<0$, on a $\beta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. On écrit donc $\tan(\alpha)=\tan(\beta-\pi)$, comme $\beta-\pi\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, et $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$. On en déduit $\alpha=\beta-\pi$. Ainsi, $\forall x<0,\ \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 8 Arctangente et argument

1. Soit z un complexe de partie réelle non nulle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\arctan\frac{\operatorname{Im}z}{\operatorname{Re}z}$ soit un argument de z.
   Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, exprimer un argument de z en fonction de $\arctan\frac{\operatorname{Im}z}{\operatorname{Re}z}$.
2. Montrer que $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}\qquad(1)$
   Indication : On pourra calculer $(5+i)^4(1-i)$

Correction :

1. Notons dans toute la question $x=\operatorname{Re}z$ et y=Imz.
   - On a $\forall t\in\mathbb{R}$, $\arctan t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
     On obtient donc une condition nécessaire évidente (pour que $\arctan\frac{y}{x}$ soit argument de z) : il faut que z admette un argument dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, c'est-à-dire $x>0$.
   - Montrons que c'est une condition suffisante, c'est-à-dire si $x>0$, alors $\underbrace{\arctan\frac{y}{x}}_{\theta}$ est un argument de z.
     On doit donc montrer que $x=|z|\cos\theta$ et $y=|z|\sin\theta\qquad(3)$
     On sait (voir un exercice de TD) que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\cos\arctan t=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\sin\arctan t=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, donc :
     $\cos\theta=\cos\arctan\frac{y}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}$
     Après simplification, et tenant compte du fait que $\sqrt{x^2}=|x|$, on obtient :
     $\cos\theta=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

De même, $\sin\theta = \dfrac{y\times\dfrac{x}{|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Comme on a supposé que $x>0$, on a $|x|=x$, donc $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, d'où (3).

Finalement : $\arctan\dfrac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z}$ est un argument de $z \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Re}\,z>0}$

- Supposons $\mathrm{Re}\,z<0$. On a alors $|x|=-x$, donc
  $\cos\theta = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
  C'est-à-dire $\dfrac{z}{|z|} = -e^{i\theta}$, donc $\dfrac{z}{|z|} = e^{i(\pi+\theta)}$
  Donc $\boxed{\pi+\arctan\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{\mathrm{Im}\,z} \text{ est un argument de } z}$

2. On trouve $(5+i)^4(1-i) = 4(239+i)$
   Or d'après la question précédente, comme $\mathrm{Re}(5+i)>0$, $\arctan\dfrac{1}{5}$ est un argument de $5+i$.
   De même, $\arctan\dfrac{1}{-1} = -\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de $1-i$
   Enfin, $\arctan\dfrac{1}{239}$ est un argument de $4(239+i)$.
   D'après les propriétés sur les arguments, $4\arctan\dfrac{1}{5}-\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de $(5+i)^4(1-i)$.
   Donc $\underbrace{4\arctan\dfrac{1}{5}-\dfrac{\pi}{4}}_{\theta}$ et $\underbrace{\arctan\dfrac{1}{239}}_{\theta'}$ sont deux arguments d'un même complexe : il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta=\theta'+2k\pi$ (4).
   Il faut montrer que θ et θ' sont dans un même ensemble de longueur 2π :
   Par définition de arctan : $\theta' \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ (5)
   D'autre part, $0<\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
   On applique arctan (strictement croissante) : $0<\arctan\dfrac{1}{5}<\dfrac{\pi}{6}$
   On multiplie par 4 : $0<4\arctan\dfrac{1}{5}<\dfrac{2\pi}{3}$
   On soustrait $\dfrac{\pi}{4}$: $-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{5\pi}{12}$
   Donc $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ (6).
   D'après (4), (5) et (6), $\theta=\theta'$, d'où (1).

Exercice 9 Résoudre l'équation :

$$\arctan x+\arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}.$$

On remarquera que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$.

Correction : *Méthode astucieuse :* On a :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{3} = \arctan\sqrt{3}.$$

D'où 1 est solution, d'autre part, la fonction :

$$x \longmapsto \arctan x+\arctan(x\sqrt{3})$$

est strictement croissante (comme somme de fonctions strictement croissantes). Ainsi, 1 est la seule solution et $\mathscr{S}=\{1\}$.

Méthode sans astuce : On a : $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$, on peut alors appliquer la formule sur $\tan(a+b)$, avec $a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{3}$, et $a+b=\frac{7\pi}{12}$, car la tangente de ces trois réels est bien définie. Cela donne :

$$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}.$$

Soit x solution, On peut alors de nouveau appliquer la formule de $\tan(a+b)$, avec $a = \arctan x$, et $b = \arctan\left(\sqrt{3}x\right)$ et $a+b = \frac{7\pi}{12}$, car la tangente de ces trois réels est bien définie.

Cela donne :

$$\tan\left(\arctan x + \arctan(x\sqrt{3})\right) = \frac{x + x\sqrt{3}x}{1 - x^2\sqrt{3}}.$$

Ainsi, on obtient l'équation :

$$\frac{x + x\sqrt{3}x}{1 - x^2\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

qui donne : $x(1-\sqrt{3}) = 1 - x^2\sqrt{3}$

puis $x^2\sqrt{3} + x(1-\sqrt{3}) - 1 = 0.$

Commentaire : toujours tester les solutions évidentes ! Ici 1 est solution évidente,on trouve alors facilement la deuxième.

Si vraiment on veut calcule le discriminant, il est assez compliqué de l'écrire sous la forme d'un carré :

$$\Delta = (1-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} + 3 + 4\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = (1+\sqrt{3})^2.$$

On retrouve la solution évidente et la deuxième solution :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Réciproquement, x_1 est bien solution, par contre, on voit que : $\arctan x_2 + \arctan(x_2\sqrt{3}) < 0$.

Ainsi, $\mathscr{S} = \{1\}$.

Rappel : la relation :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

est valable si $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(a+b)$ existent, par exemple si ils sont tous les trois dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 10 Le but de l'exercice est d'établir une relation entre $\arctan(a) + \arctan(b)$ et $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$, pour a et b réels.

1. (a) Pour des valeurs de α et β à préciser, donner les valeurs de $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction des valeurs de $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$.
   (b) Pour des valeurs de x à préciser, donner la valeur de $\tan(2x)$ en fonction de la valeur de x.
   (c) Pour $x \neq 0$, donner la valeur de $\arctan x + \arctan\frac{1}{x}$.
2. On pose $\alpha = \arctan(a)$, et $\beta = \arctan(b)$.
   (a) À quel intervalle la somme $\alpha+\beta$ appartient-elle ?
   (b) On suppose qu'il n'existe pas de k tel que $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, autrement dit que $\alpha+\beta \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, calculer $\tan(\alpha+\beta)$.
   (c) On suppose que $ab = 1$, que vaut $\alpha+\beta$?
   (d) On suppose que $ab < 1$, montrer que $\alpha+\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire $\alpha+\beta$.
   (e) On suppose que $ab > 1$, et $a > 0$ montrer que $\alpha+\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Calculer $\alpha+\beta$.
   (f) On suppose que $ab > 1$ et $a < 0$ montrer que $\alpha+\beta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $\alpha+\beta$.
   (g) Conclure : établir une relation entre $\arctan(a) + \arctan(b)$ et $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$, pour a et b réels, selon les différents cas.
3. Retrouver les résultats précédents en étudiant (pour $a \in \mathbb{R}$ fixé) la fonction

$$f_a(x) = \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$$

(Discuter pour $a > 0$, $a < 0$, ou $a = 0$).

Correction :

1. (a) Supposons que α et b soient tels que

$$\begin{cases} \alpha+\beta \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \\ \alpha \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \\ \beta \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases} \qquad \text{c'est-a-dire} \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ \begin{cases} \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ et} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ et} \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Attention, on peut avoir $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, tandis que : $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Exemple le plus simple si $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$.
Enfin, il ne faut pas se contenter d'écrire a, b et $a+b$ doivent appartenir à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Si bien que $\tan(\alpha)$, $\tan(\beta)$ et $\tan(\alpha+\beta)$ sont bien définie. On a alors :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)} \\ &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en divisant par $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ qui non nul par hypothèse.

(b) En appliquant à x tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ (*i.e.* $\tan(2x)$ existe), et $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\left[\pi\right]$ (*i.e.* $\tan(x)$ existe).
On obtient :

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}.$$

Ici encore attention aux intervalles : on peut avoir $\tan(2x)$ qui existe, sans que $\tan(x)$ n'existe ou l'inverse (exemple $x = \frac{\pi}{2}$).

(c) Deux techniques :

- si $x > 0$, on pose $\alpha = \arctan(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\beta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme $x > 0$, on a $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\beta \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme la fonction tangente est bijective sur cet intervalle, on a :

  $$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \tan(\alpha) = \tan(\beta).$$

  Or $\tan(\alpha) = x$, et $\tan(\beta) = \dfrac{1}{\tan(\arctan\left(\frac{1}{x}\right))} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Ainsi $\alpha = \beta$ et le résultat.
  Si $x < 0$, on a $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, et donc

  $$\alpha = \beta - \pi \Longleftrightarrow \tan(\alpha) = \tan(\beta).$$

  Ainsi, $\forall x < 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
- Considérons la fonction : $f :\ x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, f est alors dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et on a :

  $$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{x^2} = 0.$$

  Donc f est constante sur chacun des intervalles où elle est dérivable, et donc

  $$\forall x > 0,\ f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2},\ \text{et } \forall x < 0,\ f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

2. (a) On a $\alpha + \beta \in]-\pi, \pi[$, car somme de deux éléments de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

(b) Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \\ &= \frac{a+b}{1-ab} \\ &= \tan\left(\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)\right).\end{aligned}$$

Tout le sujet est basé sur le fait que l'on ne peut conclure $\alpha + \beta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ que sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Sur d'autre intervalle, c'est $\alpha + \beta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Si $ab = 1$, on a $b = \frac{1}{a}$, donc

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \\ &= \begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a < 0\end{cases}\end{aligned}$$

(d) Trois cas sont possibles : $a>0$, $a<0$ et $a=0$.
Supposons tout d'abords $a>0$, on a alors $b<\frac{1}{a}$. Et donc par croissance de la fonction arctangente :
$$-\frac{\pi}{2}<\arctan(b)\leqslant\arctan(a)+\arctan(b)<\arctan(a)+\arctan\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\pi}{2}.$$
D'où le résultat.
Si maintenant $a<0$, on a alors $b>\frac{1}{a}$. et donc :
$$-\frac{\pi}{2}=\arctan(a)+\arctan\left(\frac{1}{a}\right)<\arctan(a)+\arctan(b)\leqslant\arctan(b)<\frac{\pi}{2}.$$
On obtient le même résultat.
Dernier cas : si $a=0$ on a $\alpha=0$ et $\alpha+\beta=\arctan(b)$, et donc la propriété est évidente.
Dans tous les cas, on obtient donc : $\alpha+\beta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction tangente étant bijective sur cet intervalle, on en déduit que :

$$\alpha+\beta=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

(e) Dans le cas où $ab>1$ et $a>0$, on obtient alors : $b>\frac{1}{a}$, et donc :
$$\frac{\pi}{2}=\arctan(a)+\arctan\left(\frac{1}{a}\right)<\arctan(a)+\arctan(b)<\pi.$$
Dans ce cas, comme on a :

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\alpha+\beta-\pi)=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

On en déduit : $\alpha+\beta=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)+\pi$.

(f) Si $ab>1$ et $a<0$, on a alors : $b<\frac{1}{a}$, et donc :
$$-\pi<\arctan(a)+\arctan(b)<\arctan(a)+\arctan\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$
On en déduit de même : $\alpha+\beta=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)-\pi$.

(g) On a donc :

$$\arctan(a)+\arctan(b)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } ab=1 \text{ avec } a>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } ab=1 \text{ avec } a<0\\ \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) & \text{si } ab<1\\ \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)+\pi & \text{si } ab>1 \text{ avec } a>0\\ \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)-\pi & \text{si } ab>1 \text{ avec } a<0\end{cases}$$

3. Si $a=0$, la fonction f_a est la fonction arctangente. Sinon la fonction f_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{a}\right\}$, avec :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(1-ax)+a(a+x)}{(1-ax)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2}\\ &= \frac{(1+a^2)}{(1-ax)^2+(a+x)^2}\\ &= \frac{(1+a^2)}{1-2ax+a^2x^2+a^2+2ax+x^2}\\ &= \frac{(1+a^2)}{(1+a^2)+(1+a^2)x^2}\\ &= \frac{1}{1+x^2}\\ &= \arctan'(x).\end{aligned}$$

On a donc (pour $a\neq 0$)

$$\begin{cases}\exists C_1\in\mathbb{R},\ \forall x<\frac{1}{a},\ f(x)=\arctan(x)+C_1\\ \exists C_2\in\mathbb{R},\ \forall x>\frac{1}{a},\ f(x)=\arctan(x)+C_2\end{cases}$$

On a : $\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -\frac{1}{a}$. Donc par continuité de la fonction arctangente, on a : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arctan(-\frac{1}{a}) = -\arctan(\frac{1}{a})$. On obtient donc les équations :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = C_1 - \frac{\pi}{2} = -\arctan(\frac{1}{a}) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = C_2 + \frac{\pi}{2} = -\arctan(\frac{1}{a})$$

et donc :

$$\begin{cases} \forall x < \frac{1}{a},\ f(x) = \arctan(x) - \arctan(\frac{1}{a}) + \frac{\pi}{2} \\ \forall x > \frac{1}{a},\ f(x) = \arctan(x) - \arctan(\frac{1}{a}) - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On a de plus :

- si $a > 0$, $-\arctan(\frac{1}{a}) = \arctan(a) - \frac{\pi}{2}$, tandis que
- si $a < 0$, on a : $-\arctan(\frac{1}{a}) = \arctan(a) + \frac{\pi}{2}$.

Au final :

$$\begin{cases} \text{si } a > 0 \text{ on a } \forall x < \frac{1}{a},\ f(x) = \arctan(x) + \arctan(a) & (1) \\ \text{si } a < 0 \text{ on a } \forall x < \frac{1}{a},\ f(x) = \arctan(x) + \arctan(a) + \pi & (2) \\ \text{si } a > 0 \text{ on a } \forall x > \frac{1}{a},\ f(x) = \arctan(x) + \arctan(a) - \pi & (3) \\ \text{si } a < 0 \text{ on a } \forall x > \frac{1}{a},\ f(x) = \arctan(x) + \arctan(a) & (4) \end{cases}$$

En combinant (1) et (4) avec de plus le cas $a = 0$ qui est évident, on obtient :

$$\forall (x,a) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } xa < 1,\ f(x) = \arctan(x) + \arctan(a)$$

Tandis que (2) et (3) donne :

$$\forall (x,a) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } a \neq 0, \text{ et } xa > 1,\ f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(a) - \pi & \text{si } a > 0 \\ \arctan(x) + \arctan(a) + \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

On retrouve donc le résultat.

Exercice 11 Cet exercice doit être fait en considérant les résultats de l'exercice précédent.

1. Établir que $2\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{5}{12})$, puis que $4\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{120}{119})$.
2. En déduire la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Correction :

1.

$$\begin{aligned} 2\arctan(\frac{1}{5}) &= \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{5}) \\ &= \arctan\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right) \\ &= \arctan(\frac{5}{12}). \end{aligned}$$

Puisqu'on est dans le cas où $a = b = \frac{1}{5}$, avec en particulier $ab < 1$. De même :

$$\begin{aligned} 4\arctan(\frac{1}{5}) &= \arctan(\frac{5}{12}) \\ &= \arctan\left(\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{120}{119}\right). \end{aligned}$$

Puisqu'on est dans le cas où $a = b = \frac{5}{12}$, avec en particulier $ab < 1$.

Voici une **Démonstration directe** sans les résultats de l'exercice précédent.

On sait que $0 < \frac{1}{5} < 1$, on a $\arctan(\frac{1}{5}) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, donc :

$$\begin{aligned}
\tan\left(2\arctan(\frac{1}{5})\right) &= \tan\left(\arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{5})\right) \\
&= \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} \\
&= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} \\
&= \frac{5}{12} \\
&= \tan\left(\arctan(\frac{5}{12})\right).
\end{aligned}$$

Comme : $\tan\left(2\arctan(\frac{1}{5})\right) = \tan(\arctan(\frac{5}{12})$, et que $\left(2\arctan(\frac{1}{5})\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan(\frac{5}{12}) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a : $2\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{5}{12})$.

Les arguments sur les intervalles sont essentiels !

On en déduit tout d'abords que $2\arctan(\frac{1}{5}) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, puisque $0 < \frac{5}{12} < 1$. On peut donc recommencer :

$$\begin{aligned}
\tan\left(4\arctan(\frac{1}{5})\right) &= \tan\left(2\arctan(\frac{1}{5}) + 2\arctan(\frac{1}{5})\right) \\
&= \tan\left(\arctan(\frac{5}{12}) + \arctan(\frac{5}{12})\right) \\
&= \frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}} \\
&= \frac{120}{119} \\
&= \tan\left(\arctan\frac{120}{119}\right).
\end{aligned}$$

Les deux nombres sont entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient donc : $4\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{120}{119})$.

2. On a :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \arctan(\frac{120}{119}) + \arctan\left(-\frac{1}{239}\right).$$

On est dans le cas $a = \frac{120}{119}$ et $b = -\frac{1}{239}$. On a alors : $ab < 1$, donc :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1-\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{28561}{28561}\right) = 1$$

Donc : $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 12

1. Exprimer $\tan(2\alpha)$ en fonction de $\tan\alpha$ pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.
2. En déduire l'égalité : $2\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{5}{12})$,
3. En déduire l'égalité : $4\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{120}{119})$.
4. Donne $\tan(\alpha-\beta)$ en fonction de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ pour deux réels (α, β) tels que ces quantités sont définies.

5. En déduire la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned}\tan(2\alpha) &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \\ &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \text{en divisant par } \cos^2\alpha\end{aligned}$$

2. **Commentaire :** classiquement, on montre l'égalité des tangente puis on en déduit l'égalité des angles en vérifiant que l'on est dans un intervalle sur lequel la fonction tangente est injective.
On a :

$$\begin{aligned}\tan\left(2\arctan(\frac{1}{5})\right) &= \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{2}{5}\times\frac{25}{24} \\ &= \frac{5}{12} = \tan\left(\arctan(\frac{5}{12})\right).\end{aligned}$$

On sait que $0 < \frac{1}{5} < 1$, on a $\arctan(\frac{1}{5}) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, donc : $\left(2\arctan(\frac{1}{5})\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan(\frac{5}{12}) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Ces deux valeurs sont donc dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur lequel la fonction tangente est injective. De l'égalité des tangente, on en déduit l'égalité des angles. Ce qui donne : $2\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{5}{12})$.

> Les arguments sur les intervalles sont essentiels !

3. On recommence :

$$\begin{aligned}\tan\left(4\arctan(\frac{1}{5})\right) &= \tan\left(2\arctan(\frac{5}{12})\right) \\ &= \frac{\frac{10}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{\frac{10}{12}}{\frac{144-25}{144}} = \frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}} \\ &= \frac{10}{12}\times\frac{12^2}{119} = \frac{120}{119} \\ &= \tan\left(\arctan\frac{120}{119}\right).\end{aligned}$$

Or d'après la question précédente on a : $2\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, puisque $0 < \frac{5}{12} < 1$. et donc $4\arctan(\frac{1}{5}) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
D'un autre côté, on a $\arctan\left(\frac{120}{119}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
Les deux nombres sont entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, intervalle sur lequel la fonction tangente est injective. On obtient donc : $4\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{120}{119})$.

4. On a :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad \text{en divisant par } \cos\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

Les hypothèses assurent que $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$ et que $\tan(\alpha-\beta)$ est bien défini.

5. On a :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \arctan(\frac{120}{119}) + \arctan\left(-\frac{1}{239}\right).$$

On procède de même :

$$\begin{aligned}\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right) &= \tan\left(\arctan(\frac{120}{119})+\arctan\left(-\frac{1}{239}\right)\right)\\ &= \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}}\end{aligned}$$

Il faut vérifier rapidement que cette quantité fait 1.
Rappel : présenter vos calculs. On va bien sûr utiliser $239 = 120+119$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1-\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}} &= \frac{120\times 239-119}{119\times 239+120}\\ &= \frac{120\times(120+119)-119}{119\times(120+119)-120}\\ &= \frac{120^2+119^2}{119^2+120^2} = 1\end{aligned}$$

On a donc :

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Il reste à vérifier que

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

On a : $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$.
Ainsi, on a en première approximation :

$$\begin{aligned} & 0 < \arctan\left(\frac{120}{119}\right) < \frac{\pi}{2}\\ \text{et} \quad & 0 < \arctan\left(\frac{1}{139}\right) < \frac{\pi}{2}\\ \text{ce qui donne} \quad & -\frac{\pi}{2} < -\arctan\left(\frac{1}{139}\right) < 0\\ \text{par somme :} \quad & -\frac{\pi}{2} < 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right) < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, on est bien sur un intervalle où la fonction tangente est injective. De l'égalité :

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

On déduit donc :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 13 Démontrer que : $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$.

Correction : On commence par calculer : $\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right)$ On utilise deux fois la formule :

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2(\alpha)}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}\tan\left(2\arctan\frac{1}{5}\right) &= \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}\\ &= \frac{10}{24}\end{aligned}$$

puis :

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{20}{24}}{1-\frac{100}{24^2}} = \frac{20\times 24}{24^2-100} = \frac{480}{476} = \frac{120}{119}$$

Cela permet ensuite de calculer :

$$\begin{aligned}\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}\right) &= \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\times 239}}\\ &= \frac{120\times 239-119}{119\times 239+120}\\ &= \frac{120\times(120+119)-119}{119\times(120+119)-120}\\ &= \frac{120^2+119^2}{119^2+120^2} = 1\end{aligned}$$

On a donc :

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Il reste à vérifier que

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Montrons tout d'abords que : $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$. En effet :

$$\begin{aligned}0 < \frac{1}{5} &< \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \text{donc : } 0 < \arctan\left(\frac{1}{5}\right) &< \frac{\pi}{6}\\ \text{et : } 0 < 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) &< \frac{2\pi}{3}\\ \text{d'autre part : } 0 < \frac{120}{119} &< \sqrt{3}\\ \text{donc : } 0 < \arctan\left(\frac{120}{119}\right) &< \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

De la relation :

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{120}{119} = \tan\left(\arctan\left(\frac{120}{119}\right)\right)$$

On peut donc déduire :

$$\exists k\in\mathbb{Z},\ 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)+k\pi.$$

Or $0 < 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{2\pi}{3}$ et $0 < \arctan\left(\frac{120}{119}\right) < \frac{\pi}{3}$ donc $k = 0$. On a donc bien : $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$.

Ainsi, on a alors : :

$$0 < \arctan\left(\frac{120}{119}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{cad : } 0 < 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } 0 < \arctan\left(\frac{1}{139}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ce qui donne } -\frac{\pi}{2} < -\arctan\left(\frac{1}{139}\right) < 0$$

$$\text{par somme : } -\frac{\pi}{2} < 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, on est bien sur un intervalle où la fonction tangente est injective. De l'égalité :

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

On déduit donc :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 14 **Équation avec des** arctan

1. Discuter en fonction de $t \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = t$.
2. Calculer $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3$ En déduire, pour chaque entier n, les solutions de l'équation :

$$\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = n\pi$$

Exercice 15 Démontrer la relation suivante valable sur un intervalle que l'on précisera :

$$\arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$$

Commentaire : on dispose de deux méthodes : la dérivation ou l'application des formules de trigonométrie.

Correction (méthode 1) : on considère la fonction :

$$f : x \mapsto \arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$$

Montrons tout d'abords que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce n'est pas évident. Pour cela on décompose la fonction selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1+x^2 & & \\ & & y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

Par composée, on voit donc que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par somme, il en est de même de $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - x$ sur $\mathbb{R}$.

On a ensuite une autre composée :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1+x^2} - x & & \\ & & y & \mapsto & \arctan(y) \end{array}$$

Ainsi, $x \mapsto \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et donc : $f : x \mapsto \arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On peut donc dériver la fonction f. On obtient :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}+2\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1\right)\frac{1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}\\ &= \frac{1}{1+x^2}+2\left(\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{1+(1+x^2)-2x\sqrt{1+x^2}+x^2}\right)\\ &= \frac{1}{1+x^2}+\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{1+x^2-x\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{1}{1+x^2}+\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\\ &= \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0.\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=0$, la dérivée est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc la fonction est constante sur $\mathbb{R}$ et :

$$\exists K\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=K.$$

Pour déterminer K, on a :

$$f(0)=\arctan(0)+2\arctan(1)=\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, $K=\frac{\pi}{2}$, et on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan(x)+2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Correction (méthode 2) : Considérons $x\in\mathbb{R}$, on va montrer l'égalité :

$$2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan(x).$$

NB : Pour montrer que ces deux nombres sont égaux, on va montrer que leurs images par la fonction tangente sont égales et qu'ils sont dans le même « bon intervalle » sur lequel la fonction tangente est injective.

Détail : avant de prendre la tangente du terme de gauche, on vérifie que l'on peut, *i.e.* que ce n'est pas égale à $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Ici, il faut traiter le cas $x=0$ à part.

On a :

$$\begin{aligned}&1+x^2>x^2 \text{ donc } \sqrt{1+x^2}>|x|\\ &\qquad\text{en particulier } \sqrt{1+x^2}>x \text{ car } |x|\geqslant x\\ &\qquad\text{et } \sqrt{1+x^2}-x>0\\ &\qquad\text{ce qui donne : } 0<2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)<\pi.\end{aligned}$$

On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned}2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\frac{\pi}{4}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}-x=1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}=1+x\\ &\Leftrightarrow 1+x^2=(1+x)^2 \text{ et } x\geqslant -1\\ &\Leftrightarrow 1+x^2=1+2x+x^2\Leftrightarrow x=0.\end{aligned}$$

Dans le cas où $x=0$, l'égalité $2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan(x)$ est évidente.

On considère donc le cas $x\neq 0$, et on calcule la tangente du terme de gauche qui est un élément de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, donc sa tangente est définie.

Pour cela, on utilise la formule : $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right) &= \frac{2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{1-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}\\ &= \frac{2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{1-\left(1+x^2+2x\sqrt{1+x^2}+x^2\right)}\\ &= \frac{2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{2x^2+2x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{\tan(\arctan(x))} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right).$$

et donc :

$$\exists k\in\mathbb{Z},\ 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \frac{\pi}{2}-\arctan(x)+k\pi.$$

on a vu :

$$0 < 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) < \pi,$$

on a aussi :

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$$

d'où $0 < \frac{\pi}{2}-\arctan(x) < \pi$

(plus exactement, puisque l'on a supposé $x\neq 0$, on a :

$$\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$$

Au final, on en déduit que $k=0$ et donc :

$$2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \frac{\pi}{2}-\arctan(x).$$

On a montré la formule pour $x=0$ et pour $x\neq 0$ quelconque, on obtient donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \frac{\pi}{2}-\arctan(x).$$

Exercice 16 **Résolution d'une équation avec la fonction** arctan

1. On considère l'équation :

   $$(E):\qquad \arctan x+\arctan(2x)=\frac{\pi}{4}$$

   Montrer que cette équation admet une unique solution dans l'intervalle $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ sans la calculer.
2. Résoudre l'équation (E).
3. Soit $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$. Déterminer la valeur de $\arctan x_2+\arctan(2x_2)$

Commentaire : c'est une équation, la rédaction doit clairement indiquer si on travaille par équivalence ou pas. Il faut de plus savoir faire la question 3.

Correction :

1. On étudie la fonction $f : x \mapsto \arctan x + \arctan(2x) - \frac{\pi}{4}$. On a f est croissante et continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions croissantes et continues (ou en dérivant).
   Ce qui donne :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
variation de f	$-\frac{5\pi}{4}$	↗	$-\frac{\pi}{4}$	↗	$\oplus$	↗	$3\frac{\pi}{4}$

   On a :$f(0) = -\frac{\pi}{4}$, et

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4} > 0.$$

   D'où d'après le tableau de variations : $f(x) = 0$, *i.e.* l'équation (E), admet une unique solution dans l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$.
2. **REM :** ici on sait qu'il existe une solution d'après la question précédente.
   Soit x la solution de (E). On a alors : $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On applique la fonction tangente à (E) pour obtenir :

$$\tan\left(\arctan x + \arctan(2x)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

   On utilise alors la formule : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$. en remplaçant a par $\arctan(x)$ et b par $\arctan(2x)$.
   On a bien :

$$\begin{aligned} 0 < a < \frac{\pi}{4} \text{ donc} &\qquad \tan(a) \text{existe} \\ 0 < b < \frac{\pi}{4} \text{ donc} &\qquad \tan(b) \text{existe} \\ 0 < a+b < \frac{\pi}{4} \text{ donc} &\qquad \tan(a+b) \text{existe,} \end{aligned}$$

   donc on peut appliquer cette formule.
   REM : penser à le vérifier !
   Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{x+2x}{1-2x^2} &= 1 \\ 3x &= 1-2x^2 \\ 2x^2+3x-1 &= 0. \end{aligned}$$

   La solution x est donc solution de cette équation de degré 2.
   On résout rapidement cette équation : $\Delta = 9+8 = 17$ et les solutions sont

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \qquad x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}.$$

   On a $x_2 < 0$, donc x_2 ne peut pas être égal à x.
   Ainsi, $x = x_1$.
   Comme on a vu que cette équation admet une unique solution, on a nécessairement :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$$

   REM : pas besoin ici de faire de réciproque, mais il faut le justifier !
3. **REM :** il s'agit de faire la réciproque pour x_2.
   On considère $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$. x_2 est solution de $2x^2+3x-1 = 0$, donc de $\dfrac{x+2x}{1-2x^2} = 1$. On a donc :

$$\tan\left(\arctan x_2 + \arctan(2x_2)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Et donc :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \arctan x_2 + \arctan(2x_2) = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

REM : les valeurs possibles sont donc $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, etc.
Il s'agit d'encadrer $\arctan x_2 + \arctan(2x_2)$ pour déterminer laquelle est possible.
Ici c'est très simple, le premier encadrement est : $x_2 < 0$.
On place donc cette valeur dans le tableau de la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(2x)$ pour obtenir :

x	$-\infty$		x_2		0		$+\infty$
variation de $\arctan(x) + \arctan(2x)$	$-\pi$	↗	$\arctan(x_2) + \arctan(2x_2)$	↗	0	↗	π

Ainsi, $\arctan x_2 + \arctan(2x_2) \in]-\pi, 0[$, et donc dans la relation : $\arctan x_2 + \arctan(2x_2) = \frac{\pi}{4} + k\pi$, on a $k = -1$.
Ce qui signifie :

$$\arctan x_2 + \arctan(2x_2) = -\frac{3\pi}{4}$$

Exercice 17 Démontrer que : $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$.

Correction : On commence par calculer :

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}\right)$$

Pour cela, on utilise deux fois la formule :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5}\right) &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{10}} \\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

ensuite :

$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}\right) &= \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{72}} \\ &= \frac{56+9}{72-7} = \frac{65}{65} = 1.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Il reste à vérifier que ces deux quantités sont dans un intervalle sur lequel la fonction tangente est injective. On a :

$$0 \leqslant \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant \arctan\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$$
$$0 \leqslant \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant \arctan\frac{1}{5} < \frac{\pi}{6}$$
$$0 \leqslant \frac{1}{8} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant \arctan\frac{1}{8} < \frac{\pi}{6}$$

donc au final :

$$0 \leqslant \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} < \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leqslant \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

La fonction tangente étant injective sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on peut donc déduire l'égalité.

Exercice 18 Montrer que : $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5} = \arcsin\frac{56}{65}$.

Correction : On commence par calculer :

$$\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5}\right)$$

On a :

$$\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{5}{13}\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$$

On utilise alors la formule : $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (que l'on doit redémontrer).

Cela donne :

$$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

et

$$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right) = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

Au final :

$$\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{5}{13}\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\frac{12}{13} = \frac{20+36}{13\times 5} = \frac{56}{65}$$

On a donc :

$$\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{56}{65}\right)$$

Il reste à vérifier que ces deux quantités sont dans un intervalle sur lequel la fonction sinus est injective. On a :

$$0 \leqslant \frac{5}{13} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{donc} \qquad \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \leqslant \frac{\pi}{6}$$

Montrons que $\frac{3}{5} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. On a :

$$\frac{3}{5} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \iff 6 \leqslant 5\sqrt{3} \iff 36 \leqslant 25\times 5 \text{ VRAI.}$$

Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{3}{5} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{donc} \qquad \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \leqslant \frac{\pi}{3}$$

Au final :

$$0 \leqslant \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5} \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leqslant \arcsin\frac{56}{65} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Or la fonction sinus est injective sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, comme on a :

$$\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{56}{65}\right)$$

cela donne donc :

$$\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5} = \arcsin\frac{56}{65}$$

Exercice 19 Démontrer que : $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$.

Exercice 20 Résoudre l'équation $\arctan(x) + x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Fonctions trigonométriques hyperboliques

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

⋆ Généralités, définitions

Définition .4 La fonction cosinus hyperbolique notée ch (ou parfois cosh) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La fonction sinus hyperbolique notée sh (ou parfois sinh) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

R On voit le lien avec les fonctions sinus et cosinus par la formule d'Euler.

On a la proposition évidente :

Proposition .10 — parité/imparité. La fonction cosinus hyperbolique est paire.
La fonction sinus hyperbolique est impaire.

Autre propriété partagée avec cosinus et sinus :

Théorème .11 Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont dérivable avec :

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$$

⋆ Représentation graphique

On a les tableaux de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variation de $\operatorname{sh}(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
variation de $\operatorname{ch}(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

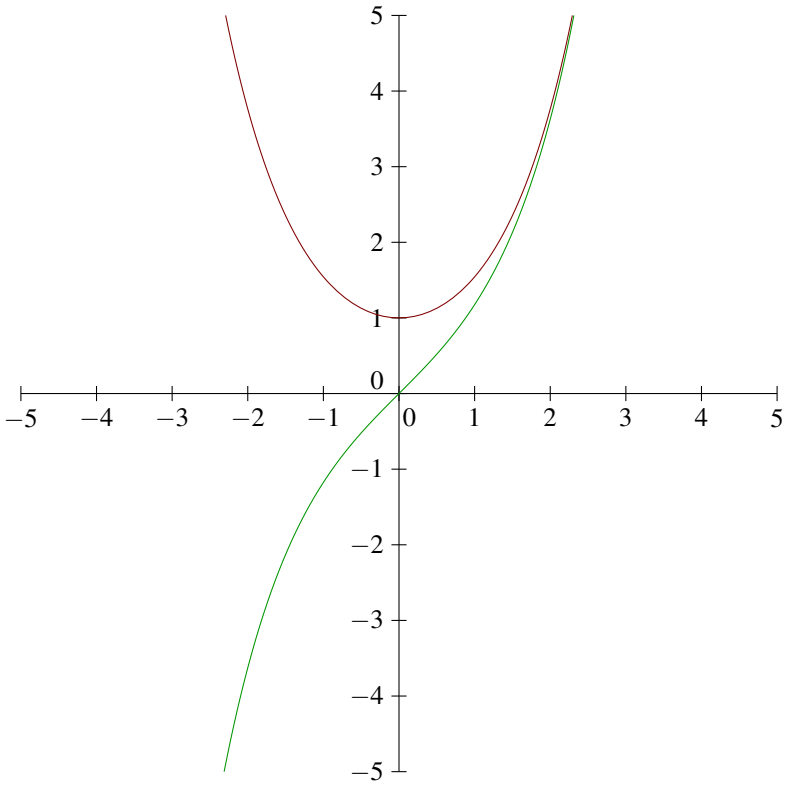
Proposition .12 On déduit de ces tableaux de variation :
- La fonction sinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- La fonction cosinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$

R On peut donc étudier leur bijection réciproque, c'est les fonctions argument cosinus hyperbolique et argument sinus hyperbolique, dont l'étude est hors-programme mais sujet de nombreux exercices.

En particulier, on pourra retenir que ces fonctions arcsinus et arccosinus hyperbolique admettent des expressions explicites, c'est-à-dire que l'on peut exprimer la solution de $\operatorname{ch}(x) = y$ en fonction de y.

⋆ Représentation graphique

On a la représentation :



✯ Relations fondamentales

Proposition .13 On a pour tout t réel :

$$\exp(t) = \operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t) \qquad \exp(-t) = \operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) \qquad \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1.$$

Démonstration. Les deux premières relations sont évidentes, la dernière s'obtient à partir de :

$$\operatorname{ch}^2(t) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)$$
$$\operatorname{sh}^2(t) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)$$

■

- Pour une fonction f quelconque, la **partie paire** de f est définie par la fonction $p : x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$. La **partie impaire** de f est définie par la fonction $i : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. Ces définitions montrent que tout fonction f s'écrit de manière unique sous la forme $f = p + i$ avec p paire et i impaire.
  La fonction ch est ainsi la partie paire de la fonction exponentielle, et sh est la partie impaire.

✯ Interprétation sur l'hyperbole

Considérons l'hyperbole H, c'est la partie du plan définie par :

$$H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 - y^2 = 1\right\}$$

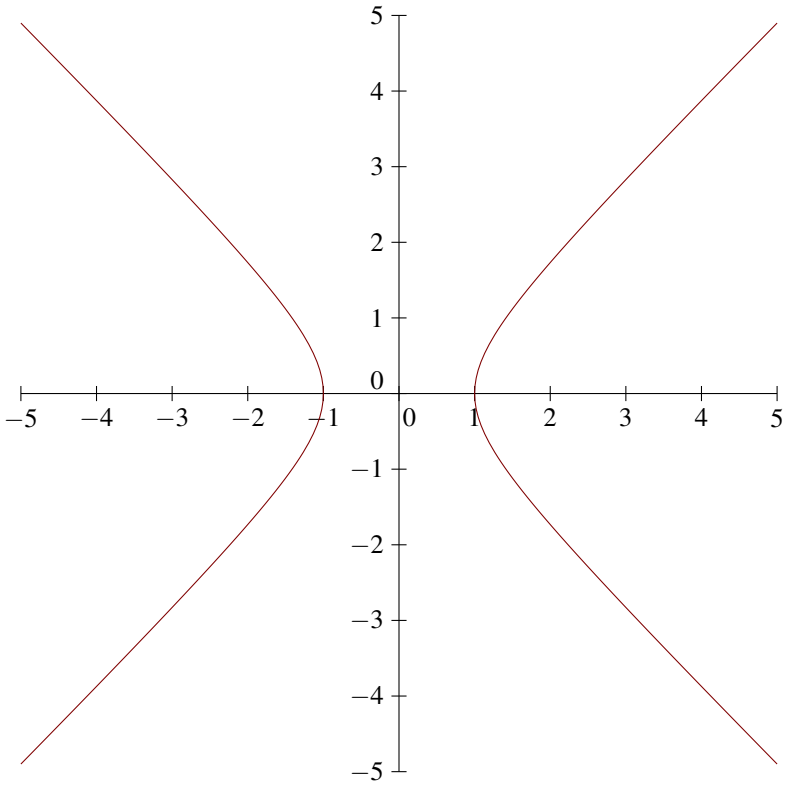
Si on considère $(x,y) \in H$, alors, on peut construire $t \in \mathbb{R}$, tel que : $y = \operatorname{sh}(t)$. On a alors :

$$|x| = \sqrt{1 - \operatorname{sh}^2(t)} = |\operatorname{ch}(t)|$$

Ainsi : $x = \pm\operatorname{ch}(t)$. Réciproquement, si $t \in \mathbb{R}$, alors $\Big(\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t)\Big)$ et $\Big(-\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t)\Big)$ sont des éléments de H.

On en déduit une écriture paramétrique de H :

$$H = \left\{\Big(\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t)\Big) \middle| t \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\Big(-\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t)\Big) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$$



✯ Lien avec les équations différentielles

Proposition .14 Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$(E): \qquad y'' - \omega^2 y = 0.$$

Alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$y : x \longmapsto A\mathrm{ch}(\omega x) + B\mathrm{sh}(\omega x) \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

Démonstration. L'équation caractéristique est $(e): x^2 - \omega^2 = 0$, les racines sont : ω et $-\omega$, d'après le théorème du cours, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$y : x \longmapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x} \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

En particulier, on constate que $x \mapsto \mathrm{ch}(\omega x)$ et $x \mapsto \mathrm{sh}(\omega x)$ sont deux solutions, donc toute fonction de la forme :

$$y : x \longmapsto A\mathrm{ch}(\omega x) + B\mathrm{sh}(\omega x) \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

est aussi solution.

Soit y maintenant qui s'écrit sous la forme : $y : x \longmapsto ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ En remplaçant $e^{\omega x}$ et $e^{-\omega x}$ par leur expression en fonction de $\mathrm{ch}(\omega x)$ et $\mathrm{sh}(\omega x)$, cela donne :

$$y(x) = (a+b)\mathrm{ch}(\omega x) + (a-b)\mathrm{sh}(\omega x).$$

Ainsi, toute solution s'écrit sous la forme :

$$y : x \longmapsto A\mathrm{ch}(\omega x) + B\mathrm{sh}(\omega x) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

■

✯ Extension aux valeurs complexes

Soit $\omega \in \mathbb{C}$, on peut aussi considérer les fonctions :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2} = \mathrm{ch}(\omega x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{2} = \mathrm{sh}(\omega x) \end{cases}$$

Ces fonctions sont définies à l'aide de l'exponentielle complexe.

Ces fonctions vérifient les mêmes propriétés :

la dérivée de $x \mapsto \text{sh}(\omega t)$ est $x \mapsto \omega \text{ch}(\omega t)$
la dérivée de $x \mapsto \text{ch}(\omega t)$ est $x \mapsto \omega \text{sh}(\omega t)$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(\omega t) = \text{ch}(\omega t) + \text{sh}(\omega t) \qquad \exp(-\omega t) = \text{ch}(\omega t) - \text{sh}(\omega t) \qquad \text{ch}^2(\omega t) - \text{sh}^2(\omega t) = 1$$

Les solutions de (H) : $y'' - \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{C}$
sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto A\text{ch}(\omega x) + B\text{sh}(\omega x) \quad (A,B) \in \mathbb{C}^2$

Enfin, on constate que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(ix) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \text{sh}(ix) = i\sin(x)$$

⋆ Exercices

Exercice 1 Exprimer $\cosh(x+y)$ et $\sinh(x+y)$ en fonction de $\sinh(x)$, $\sinh(y)$ et $\cosh(x)$, $\cosh(y)$

Correction : Il faut remplacer e^x et e^{-x} par leur expression en fonction de $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$. Cela donne :

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)\\ \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)\end{aligned}$$

R Il existe des formulaires de trigonométrie hyperboliques très semblables au formulaire de trigonométrie circulaire.

Exercice 2 Résoudre l'équation $\text{ch}(x) = y$ d'inconnue $x \geqslant 0$ de paramètre $y \geqslant 1$.
Étudier ainsi la bijection réciproque de ch.

Correction : On peut travailler par équivalence :

$$\text{ch}(x) = y \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

On résout alors l'équation du second degré $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Les solutions sont $y + \sqrt{y^2-1}$ et $y - \sqrt{y^2-1}$. En étudiant le signe, on constate qu'elles sont toutes les deux positives strictement. Cela donne :

$$\text{ch}(x) = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \text{ ou } x = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)$$

On a facilement :

$$y + \sqrt{y^2-1} \geqslant 1 \text{ donc } \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \geqslant 0.$$

Mais :

$$y - \sqrt{y^2-1} = \frac{y^2 - \left(y^2-1\right)}{y + \sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2-1}} \leqslant 1.$$

Ainsi : $\ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) \leqslant 0$, or on veut $x \geqslant 0$. cela donne :

$$\text{ch}(x) = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rccc}\text{arccosh} : & [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\end{array}$$

On peut tracer la courbe par symétrie.

Exercice 3 Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$ d'inconnue x de paramètre $y \in \mathbb{R}$. Étudier ainsi la bijection réciproque de sh.

Correction : On procède de même.

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

On résout alors l'équation du second degré $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Les solutions sont $y + \sqrt{y^2+1}$ et $y - \sqrt{y^2+1}$. En étudiant le signe, on constate qu'elles sont toutes les deux positives strictement.

En faisant une disjonction des cas, on constate que $y - \sqrt{y^2+1} < 0$. Ainsi :

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Au final :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{arcsinh} & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{array}$$

On peut tracer la courbe par symétrie.

Exercice 4 La fonction **tangente hyperbolique** notée (ou tanh) est définie ainsi :

$$\begin{array}{rccc} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \end{array}$$

1. Vérifier les relations :

$$\begin{aligned} (x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \\ &= 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1 + \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

2. Dériver la fonction . Trouver une relation entre $'$ et ch et une relation entre $'$ et .
3. Représenter la fonction . Vérifier qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.
4. Déterminer la bijection réciproque explicitement.

Correction :

1. Évident
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ '(x) = 1 - {}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
3. Tableau de variation. la fonction est continue est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. On a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Lien entre l'algèbre linéaire et l'étude des suites

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

⋆ Cas des suites arithmético géométrique

Définition .5 On appelle **suite arithmético-géométrique**, une suite u_n de la forme :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \qquad (R) \end{cases}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ fixés et $a \neq 1$.

On considère donc (a,b) fixés avec $a \neq 1$ alors E l'espace vectoriel des suites (ie $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$) et l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \left(u_{n+1} - au_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation (R), c'est dire que $\varphi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = b$ (en identifiant b et la suite constante égale à b). On note F l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\varphi(u) = b$.

Si on considère deux suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \left(\varphi(u+\alpha v)\right)_n &= (u+\alpha v)_{n+1} - a(u+\alpha v)_n \\ &= u_{n+1} - au_n + +\alpha\left(v_{n+1} - av_n\right) \\ &= \varphi(u)_n + \alpha\varphi(v)_n \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\varphi(u+\alpha v) = \varphi(u) + \alpha\varphi(v) \qquad \text{égalité de suites}$$

Ainsi, l'application φ est donc linéaire.

Puisque $a \neq 1$, on peut trouver $l \in \mathbb{K}$, telle que $l = al + b$, ie $\varphi(l) = b$ (en identifiant toujours les réels l et b et les suites constantes associées). La valeur exacte de l est $l = \frac{b}{1-a}$

On écrit alors pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque :

$$\begin{aligned} u \in F &\iff \varphi(u) = \varphi(l) \iff \varphi(u-l) = 0 \\ &\iff u - l \in \ker(\varphi). \end{aligned}$$

Or clairement $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des suites géométriques de raison a :

$$\ker(\varphi) = \text{Vect}\left((a^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u \in F &\iff (u-l) \in \text{Vect}\left((a^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda a^n + l \end{aligned}$$

On détermine λ avec les premiers termes : $\lambda = u_0 - l$, ce qui puisque $l = \frac{b}{1-a}$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a} = u_0 a^n + b\frac{1-a^n}{1-a}$$

On en déduit le résultat du cours :

Proposition .15 Pour une suite qui vérifie la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \qquad (R) \end{cases}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ fixés et $a \neq 1$.

On peut trouver l tel que $l = al + b$.

La suite $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors géométrique de raison a. Cela permet d'exprimer u_n en fonction de n en écrivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n(u_0 - l) + l$$

R On peut aussi adapter en exprimant u_n en fonction de u_1

Exercice 1

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifient, pour tout n entier naturel strictement supérieur à 1, la relation :

$$au_{n+1} = (a-1)u_n + r + n$$

Déterminer un élément de $\mathscr{E}$ dont le terme général soit de la forme :

$$u_n = \alpha n + \beta$$

où α et β sont deux réels que l'on déterminera en fonction de a et r.

En déduire l'expression de u_n en fonction de u_1.

Correction : Il suffit d'avoir $\alpha - 1 = 0$ et $a\alpha + \beta - r = 0$, c'est à dire $\alpha = 1$ et $\beta = r - a$.
On peut prendre $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n + r - a$.
Soit (u_n) une suite qui est dans $\mathscr{E}$. Définissons $w_n = n + r - a$
Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - w_n$.
On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ av_{n+1} = au_{n+1} - aw_{n+1}$
Donc $av_{n+1} = (a-1)u_n + r + n - \left[(a-1)w_n + r + n\right]$ (car la suite (w_n) est aussi dans $\mathscr{E}$)
Après simplification, il reste : $av_{n+1} = (a-1)v_n$, donc $v_n = \left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{n-1} v_1$
Revenons à (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - w_n = \left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{n-1}(u_1 - w_1)$
Or $w_1 = 1 + r - a$ et $w_n = n + r - a$, donc
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n + r - a + \left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{n-1}(u_1 - 1 - r + a)$

⋆ Cas des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition .6 On appelle **suite récurrente linéaire**, une suite définie par u_0, u_1, et la relation de récurrence :

$$(R) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad \text{avec } (a,b) \text{ scalaires fixés, } b \neq 0.$$

On note E l'espace vectoriel des suites, on considère

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \left(u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

φ est un endomorphisme car si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont deux suites et α un scalaire, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(u + \alpha v)_n &= (u + \alpha v)_{n+2} - a(u + \alpha v)_{n+1} - b(u + \alpha v)_n \\ &= (u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n) + \alpha\,(v_{n+2} - av_{n+1} - bv_n) \\ &= \varphi(u)_n + \alpha\varphi(v)_n \end{aligned}$$

ainsi : $\varphi(u + \alpha v) = \varphi(u) + \alpha\varphi(v)$ (c'est une égalité de suites).

L'ensemble des suites qui vérifient (R) est $\ker(\varphi)$.

Dimension de $\ker(\varphi)$

On va déterminer la dimension de $\ker(\varphi)$. Intuitivement cette dimension est 2, puisqu'une suite de $\ker(\varphi)$ ne dépend que des deux premiers termes.

Pour le prouver, on considère donc :

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \ker(\varphi) \\ (x,y) & \longmapsto & \text{l'unique suite vérifiant } u_0 = x,\ u_1 = y \text{ et } (R) \end{array} \right.$$

On va montrer que Ψ est un isomorphisme.

Montrons que Ψ est linéaire.

Pour cela, on considère $(x,y) \in \mathbb{K}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{K}^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On note $u = (u_n)$ la suite définie $u = \Psi((x,y))$ et $v = (v_n)$ la suite définie $v = \Psi((x',y'))$ et enfin $w = (w_n)$ la suite définie $w = \Psi((x,y) + \alpha(x',y'))$. Il s'agit de montrer que $w = u + \alpha v$. Or on a : $w = \Psi((x + \alpha x', y + \alpha y'))$ et donc par définition :

$$w_0 = x + \alpha x' = u_0 + \alpha v_0 \qquad \text{et} \qquad w_1 = y + \alpha y' = u_1 + \alpha v_1$$

ainsi, on peut dire que les suites w et $u + \alpha v$ ont leurs deux premiers termes égaux. Ces deux suites vérifient aussi (R). Par récurrence double immédiate, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + \alpha v_n \text{ ce qui s'écrit } w = u + v$$
$$\text{ou encore } \Psi\left((x,y) + \alpha\left(x',y'\right)\right) = \Psi((x,y)) + \alpha\Psi\left(\left(x',y'\right)\right).$$

L'application Ψ est donc linéaire.

Montrons qu'elle est injective. Pour cela, on considère $(x,y) \in \mathbb{K}^2$, tel que $\Psi((x,y)) = 0$, ie $\Psi((x,y))$ est la suite nulle. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Psi((x,y))_n = 0$$

En particulier pour les deux premiers termes :

$$\Psi((x,y))_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Psi((x,y))_1 = 0$$

or par définition : $\Psi((x,y))_0 = x$ et $\Psi((x,y))_1 = y$, ainsi $(x,y) = (0,0)$. **L'application Ψ est donc injective.**

Montrons maintenant que Ψ est surjective. Pour cela, il faut considérer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $(\mathbb{K})$ on a alors : $(u_n) = \Psi((u_0,u_1))$. D'où la **surjectivité**.

Au final, Ψ **est donc un isomorphisme.**

R L'application réciproque est :

$$\Psi^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \ker(\varphi) & \to & \mathbb{K}^2 \\ u = (u_n) & \longmapsto & (u_0,u_1) \end{array} \right.$$

On en déduit en particulier que $\dim(\ker(\varphi)) = 2$. On va donc chercher une base de $\ker(\varphi)$ deux suites linéairement indépendante qui vérifie la relation (R).

R Une base que l'on pourrait utiliser est $((u_n),(v_n))$ où (u_n) est l'unique suite qui vérifie (R) telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et où (v_n) est l'unique suite qui vérifie (R) telle que $v_0 = 0$, $v_1 = 1$.

On cherche donc une base de $\ker(\varphi)$, ie deux suites qui vérifient la relation : $(R) : u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et qui sont linéairement indépendantes.

L'idée est de chercher des suites géométriques (les plus simples). On cherche donc $r \in \mathbb{K}^*$, tel que la suite (r^n) soit dans $\ker(\varphi)$. On a :

$$\begin{aligned} (r^n) \in \ker(\varphi) &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0 \\ &\iff r^2 + ar + b = 0 \end{aligned}$$

D'où l'idée de regarder **l'équation caractéristique** : $x^2 = ax + b$ et le polynôme caractéristique $P = X^2 - aX - b$. Pour toute racine r du polynôme, on est sûr que la suite géométrique (r^n) est dans $\ker(\varphi)$.

Cas de deux racines distinctes

Si P a deux racines distinctes, r_1 et r_2 alors on sait déjà que les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien dans $\ker(\varphi)$. Il reste à vérifier qu'elles sont linéairement indépendantes. Pour cela, on considère $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, tels que :

$$\alpha(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}=0 \text{ ie est la suite nulle}$$

c'est-à-dire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha r_1^n+\beta r_2^n=0$$

L'étude des deux premiers termes, donne le système : $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha r_1+\beta r_2=0\end{cases}$, c'est système inversible car son déterminant vaut $r_2-r_1\neq 0$ donc $(\alpha,\beta)=(0,0)$.

Au final, la famille $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de $\ker(\varphi)$, c'est donc une base. On a retrouvé le résultat suivant :

> On considère $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ avec $b\neq 0$ et la relation de récurrence : $(R)\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$. On note P le polynôme : $P=X^2+aX+b$.
>
> Si P a deux racines r_1 et r_2 distinctes, alors les suites $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ forment une base de l'ensemble des suites qui vérifient (R).
>
> Ainsi, pour tout suite (u_n) qui vérifie (R), on a :
>
> $$\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n$$

R On peut bien sûr calculer (α,β) avec les deux premiers termes (u_0,u_1), mais aussi (u_1,u_2) ou de toute autre manière.
On voit aussi que l'on peut écrire :

$$\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha r_1^{n-1]}+\beta r_2^{n-1}$$

ce qui est parfois plus simple si la suite (u_n) n'est définie que pour $n\geqslant 1$.

Cas d'une racine double

Si P a une racine double r, alors on sait déjà que (r^n) est dans $\ker(\varphi)$. Il faut en trouver une autre.
En suivant ce qui se fait pour les équations différentielles, on peut regarder la suite (nr^n).
Vérifions qu'elle vérifie (R). Pour cela, on fixe $n\in\mathbb{N}$, et on écrit :

$$\begin{aligned}(n+2)r^{n+2}&=(n+2)r^nr^2 && \text{on va utiliser } r^2=r+b\\ &=(n+2)r^n(ar+b)\\ &=a(n+1)r^{n+1}+r^n(ar^1+(n+2)b)\\ &=a(n+1)r^{n+1}+bnr^n+ar^{n+1}+2br^n && \text{on fait apparaître le résultat attendu}\\ &=a(n+1)r^{n+1}+bnr^n+r^n(a+2b)\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que $ar+2b=0$. Or on sait que r est racine double du polynôme X^2+aX+b, donc $r=-\frac{a}{2}$ et $a^2-4b=0$ On obtient :

$$ar+2b=-\frac{a^2}{2}+2b=\frac{1}{2}(-a^2+4b)=0$$

La suite (nr^n) est donc bien dans $\ker(\varphi)$.

Les deux suites $((r^n),(nr^n))$ forment donc une famille de deux éléments de $\ker(\varphi)$. Il reste à vérifier que cette famille est libre, ce sera alors une base.

Pour cela, on regarde la combinaison linéaire :

$$\alpha(r^n)+\beta(nr^n)=0 \text{ ie la suite nulle}$$

et on utilise les deux premiers termes :

$$\alpha=0 \qquad \alpha r+\beta r=0 \text{ ainsi } (\alpha,\beta)=(0,0)$$

La famille est donc libre, c'est donc une base de $\ker(\varphi)$.

On a donc démontré le résultat suivant :

On considère $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ avec $b \neq 0$ et la relation de récurrence : $(R) \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On note P le polynôme : $P = X^2 + aX + b$.

Si P a une racine double r. alors les suites $((r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr^n)_{n\in\mathbb{N}})$ forment une base de l'ensemble des suites qui vérifient (R).

Ainsi, pour tout suite (u_n) qui vérifie (R), on a :

$$\exists!(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha + \beta n) r_2^n$$

Cas de deux racines complexes

Considérons maintenant le cas où (a,b) et (u_0,u_1) sont réels. La suite (u_n) est alors réelle. Supposons que P (qui est à coefficients réels) ait deux racines complexes distinctes, r_1 et r_2, on peut alors écrire :

$$\exists(A,B) \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

mais cette écriture n'est pas pratique : u_n est un réel, tandis que $Ar_1^n + Br_2^n$ est a priori un complexe.

On doit alors simplifier pour retrouver une expression réelle au membre de droite.

Pour cela, on écrit : $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et donc $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ (puisqu'il s'agit des deux racines complexes conjuguées d'un polynôme à coefficients réels) avec $\rho > 0$ et $\in\in]0,2\pi[$ (θ ne peut pas être nul car les racines ne sont pas réelles, de plus comme $b \neq 0$, les racines ne peuvent être nulles).

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \left(Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}\right) \qquad \text{et donc} \qquad \overline{u_n} = u_n = \rho^n \left(\overline{B}e^{in\theta} + \overline{A}e^{-in\theta}\right)$$

On en déduit la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta} = \overline{B}e^{in\theta} + \overline{A}e^{-in\theta}$$

ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(A - \overline{B}\right) e^{in\theta} + \left(B - \overline{A}\right) e^{-in\theta} = 0$$

On utilise alors le résultat suivant :

Proposition .16 Soit u et v deux complexes non nuls avec $u \neq v$, alors les suites

$$\left((u^n)_{n\in\mathbb{N}}, (v^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

forment une famille libre

Démonstration. On peut dire que ces deux suites sont des vecteurs propres de l'endomorphisme :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}\right.$$

Précisément, la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est vecteur propre associée à la valeur propre u, et la suite $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est vecteur propre associée à la valeur propre v. Comme $u \neq v$ ces deux suites appartiennent à des espaces propres différents et forment donc une famille libre.

On peut aussi retrouver ce résultat comme précédemment. si (α,β) vérifie :

$$\alpha(u^n) + \beta(v^n) = 0 \text{ ie la suite nulle}$$

alors en prenant les deux premiers termes on a :

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha u + \beta v = 0 \end{array}\right. \text{ système linéaire de déterminant } u - v \text{ non nul.}$$

■

En appliquant ce résultat, on en déduit que : $A = \overline{B}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ u_n =& \rho^n \left(Ae^{in\theta} + \overline{A}e^{-in\theta}\right)\\ =& \rho^n \left(Ae^{in\theta} + \overline{Ae^{in\theta}}\right)\\ =& \rho^n \left(2\,\mathrm{Re}\left(Ae^{in\theta}\right)\right)\end{aligned}$$

en écrivant $A = a + ib$, on a :

$$\mathrm{Re}\left(Ae^{in\theta}\right) = a\cos(n\theta) - b\sin(n\theta)$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \rho^n \left(2a\cos(n\theta) - 2b\sin(n\theta)\right)$$

On en déduit le résultat suivant :

On considère $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ avec $b \neq 0$ et la relation de récurrence : $(R)\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On note P le polynôme : $P = X^2 + aX + b$.

Si P n'a pas de racine réelle. On note $\rho e^{i\theta}$ l'une des racines complexes.

alors les suites $(\rho^n \cos(n\theta), \rho^n \sin(n\theta))$ forment une base de l'ensemble des suites qui vérifient (R).

Ainsi, pour tout suite (u_n) qui vérifie (R), on a :

$$\exists!(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \left(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\right)$$

R On peut aussi procéder différemment : vérifier que les suites $(\rho^n \cos(n\theta), \rho^n \sin(n\theta))$ vérifient (R), puis vérifier que c'est une famille libre.

On en déduit alors qu'il s'agit d'une base de $\ker(\varphi)$, puisque l'on sait que la dimension de $\ker(\varphi)$ est 2.

! On confond souvent ce résultat avec celui sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2. on peut retenir que ce résultat demande une étape supplémentaire : l'écriture de la racine sous forme $\rho e^{i\theta}$.

on peut aussi se souvenir de deux exemples simples :

- les fonctions solutions de $y'' = -y$ sont les fonctions de la forme :

  $$x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) = e^{0x}\left(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\right)$$

  car les racines du polynômes caractéristique sont $i = 0 + 1i$ et son conjuguée.
- les suites qui vérifient : $u_{n+2} = u_n$ sont les suites de la forme

  $$u_n = \alpha(-1)^n + \beta = 1^n\left(\alpha\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

  car les racines du polynômes caractéristique sont $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$ et son conjuguée.

Formules de Taylor

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ La formule de Taylor sur les polynômes

Proposition .17 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\Big(X-a\Big)^k.$$

En particulier, pour $a = 0$, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k.$$

On peut aussi écrire :

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k.$$

- La formule de Taylor est exacte pour les polynômes (pas besoin de reste, ni de petit o) et C'est une somme finie (les dérivées s'annulent à partir du degré de P).
- Si deux polynômes sont **égaux sur un intervalle du type** $]-\alpha,\alpha[$ avec $\alpha > 0$, alors ils ont les mêmes coefficients et sont égaux partout (ceci est faux pour les fonctions voir l'exercicesur $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$).
- Cette formule permet de trouver **l'expression du polynôme composé** $P(X+a)$ **en fonction du polynôme** P.

Pour la retrouver :

$$\begin{aligned} P &= a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n & a_0 &= P(0)\\ P' &= a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \cdots + na_nX^{n-1} & a_1 &= P'(0)\\ P'' &= 2a_2 + 3\times 2a_3X + \cdots + n(n-1)a_nX^{n-2} & 2a_2 &= P''(0) \end{aligned}$$

Démonstration. On va utiliser $X = (X-a+a)$ et la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} a_kX^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(X-a+a)^k && \text{on utilise Newton}\\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(X-a)^j a^{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k\binom{k}{j}(X-a)^j a^{k-j} \end{aligned}$$

On inverse les sommes :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_k\binom{k}{j}(X-a)^j a^{k-j} = \sum_{j=0}^{n}\frac{(X-a)^j}{j!}\sum_{k=j}^{n} a_k\frac{k!}{(k-j)!}a^{k-j}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{(X-a)^j}{j!}P^{(j)}(a) \end{aligned}$$

En utilisant la formule donnant la dérivée j-ième d'un polynôme. :

$$P^{(j)} = \sum_{k=j}^{n} a_k\frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j}$$

■

✯ Formule de Taylor avec reste intégral

La formule de Taylor avec reste intégrale exprime la **différence entre la fonction et l'approximation de cette fonction par le polynôme de Taylor** en un point x donné et à un ordre n donné.

Proposition .18 Soit I un intervalle réel et $a \in I$, et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I.
Alors, on a :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

En particulier pour $a = 0$:

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

On écrit :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{\text{polynôme de Taylor}} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{reste}}$$

- La formule « contient » ses hypothèses : f **doit être** $\mathscr{C}^{n+1}$ **sur** $[0,x]$ pour que l'on puisse parler de $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.
- Le reste dépends de n et de x. Beaucoup de résultats s'obtiennent en majorant cet écart.
- Si on fixe n et on fait tendre x vers 0, on obtient Taylor-Young ! (ie **l'égalité asymptotique** entre f et son polynôme de Taylor lorsque $x \to 0$).
- Si on fixe x et on fait tendre n vers l'infini en démontrant que le reste tends vers 0, on obtient un développement en série entière de f.

⋆ Retrouver la formule

Plutôt que de l'apprendre par coeur, on la retrouve rapidement :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt \end{aligned}$$

La seule astuce à retenir : **intégrer le** 1 **en** $x-t$ pour éviter le $-$ de l'intégration par parties et annuler le crochet en x.
On intègre ainsi $\dfrac{(x-t)^k}{k!}$ en $-\dfrac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Démonstration. On fixe donc $a \in I$.
La démonstration est en fait une récurrence :

$$\mathscr{P}(n) : \quad f \in \mathscr{C}^{n+1} \implies \forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

La relation est vraie pour $n = 0$ car la relation :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

est vraie si $f \in \mathscr{C}^1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai et supposons $f \in \mathscr{C}^{n+2}$ On fait alors une intégration par parties sur le reste :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient bien le résultat. ■

Toutes les applications tournent autour de la même idée : **estimer le reste** (majoration / signe), éventuellement en faisant tendre x vers a ou n vers $+\infty$.

■ **Exemple .1** On veut comparer $\cos(x)$ et $1-\frac{x^2}{2}$.

On applique la formule de Taylor :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3}f^{(3)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}f^{(4)}(t)dt$$

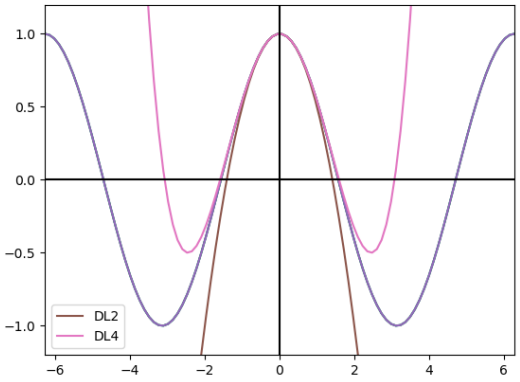
ainsi :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\cos(t)dt}_{\geqslant 0 \text{ si } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$$

On obtient donc une inégalité valable sur un intervalle :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$

Ce que confirme le graphique :



■

! L'utilisation des développements limités permet uniquement d'avoir une inégalité asymptotique alors que la formule de Taylor avec reste intégrale donne une vraie inégalité.

L'égalité de Taylor Lagrange permet en particulier d'obtenir des inégalités strictes.

✯ Formule de Taylor-Young

Proposition .19 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a. Alors f admet un DL_n en a donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o\left[(x-a)^n\right] \\ &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + o\left[(x-a)^n\right] \end{aligned}$$

En particulier dans le cas $a = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

- Il s'agit d'une égalité asymptotique : lorsque x tends vers 0, la fonction f est presque un polynôme (**son polynôme de Taylor**) sauf un reste qui tends vers 0 plus vite que x^n.
- Permet d'obtenir les développements limités usuels, mais pour une fonction quelconque, il est recommandé d'utiliser les méthodes de calculs de DL. Parfois, on fait le contraire : on calcule les dérivées successives en 0 en calculant le DL.

✯ Rappels sur la manipulation des équivalents

Sous forme de « règles de calcul avec les petito » :

addition : $x^k + o(x^n) = o(x^{\min(k,n)})$ $\qquad o(x^k) + o(x^n) = o(x^{\min(k,n)})$

produit : $x^k o(x^n) = o\left(x^{k+n}\right)$ $\qquad o\left(x^k\right) o(x^n) = o\left(x^{k+n}\right)$

intégration : $\displaystyle\int_0^x \underset{t\to 0}{o}(t^n)\,dt = \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

Pour la composée, si on a par exemple :

$$\begin{cases} g(a_0+u) \underset{u\to 0}{=} \alpha+\beta u+\gamma u^2+\delta u^3+o\left(u^3\right) \\ f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0+u(x) \qquad \text{avec } u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \lambda x^k \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

(avec $u(x)$ qui peut contenir un petito), alors, on peut remplacer u par $u(x)$ (y compris le petito) dans le DL et $o(u^l)$ par $o(x^{lk})$ pour obtenir :

$$g(f(x)) \underset{x\to 0}{=} \alpha+\beta\left(u(x)\right)+\gamma(u(x))^2+\gamma(u(x))^3+o\left(x^{3k}\right)$$

On finit alors comme pour un produit et une somme (attention aux doubles produits dans le développement des carrés.

Pour un quotient $\frac{f}{g}$, on fait le DL de $f\times\dfrac{1}{g}$. Pour faire le DL de $\frac{1}{g}$, on passe par une composée et par le DL de $\frac{1}{1+u}$.

Pour calculer le DL_n d'une fonction dont on connaît la dérivée (et le DL_n de la dérivée), on intègre la partie régulière du DL_n de f', en ajoutant le terme $f(0)$. On obtient ainsi un DL_{n+1}.

✯ Rappels sur les développements limités des fonctions usuelles

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$\dfrac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k+o(x^n)$	Peut s'obtenir par Taylor-Young, ou par la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1-x+x^2+\ldots(-1)^n x^n+o(x^n)$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)$	La même que ci-dessus avec $-x$ à la place de x.

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$-\ln(1-x)$	$x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$	En intégrant $\dfrac{1}{1-x}$ ou par la formule de Taylor-Young
$\ln(1-x)$	$-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\cdots-\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$, soit $-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$	ré-écriture de la ligne précédente
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$	Idem

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$	Obtenue par la formule de Taylor Young, remarquez en particulier la similitude avec la formule de Newton lorsque α est entier.
$\sqrt{1+x}$	$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$	Exemple d'application, à savoir retrouver rapidement.
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$	Idem.

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
e^x	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$, soit $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$	Par Taylor Young, puisque e^x est se dérive en elle-même.
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$, soit $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$	Impaire et obtenu par Taylor Young. Autre méthode, en remplaçant x par ix et $-ix$ dans e^x.
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+o(x^{2n+1})$, soit $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$	Par Taylor-Young, remarquez que l'on a un ordre de plus que la partie régulière, puisque l'on sait que le prochain terme est en x^{2n+2}

$f(x)$	Développement limité en 0	Commentaires
$\tan(x)$	$x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$	En calculant les dérivées successives et en utilisant Taylor-Young. On sait que c'est un ordre 4, puisque la fonction est impaire.
$\arctan(x)$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^6)$ $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2})$	En utilisant un DL de $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, il existe une formule pour l'ordre n DL à l'ordre n au programme
$\arcsin(x)$	$x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+o(x^6)$	En utilisant un DL de $\arccos'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, il existe une formule pour l'ordre n
$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3}{40}x^5+o(x^6)$	$\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$.

⋆ Développement en série entière

Proposition .20 Pour tout x réel, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$$

Autrement dit, la fonction exponentielle est développable en série entière avec un rayon de convergence $R=+\infty$.

En particulier :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e$$

Démonstration. On utilise la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

Soit donc $x \in \mathbb{R}_*^+$, on a alors :

$$\begin{aligned}\left| e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \\ &\leqslant \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-t)^n dt \\ &\leqslant \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} \to 0\end{aligned}$$

Ainsi la série à $x > 0$ fixé $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge vers e^x. On peut donc écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

On peut aussi traiter le cas où $x < 0$ (il faut faire attention à l'ordre des bornes de l'intégrale) :

$$\begin{aligned}\left| e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \\ &= \left| \int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \\ &\leqslant \frac{1}{n!} \int_x^0 |t-x|^n dt \\ &\leqslant \frac{1}{n!} \int_x^0 (t-x)^n dt \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)!} (-x)^{n+1} \to 0\end{aligned}$$

■

Exercice 1 À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à $f : x \mapsto \ln(1+x)$ montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

Correction : On pose donc $f : x \longmapsto \ln(1+x)$.
Notons déjà que l'on ne peut pas utiliser les séries entières ici puisque f est DSE avec un rayon de convergence égal à 1.
On passe donc par la formule de Taylor avec reste intégral.
On a par récurrence (à rédiger) :

$$\begin{array}{l|l} f(x) = \ln(1+x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2} & f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) = +2(1+x)^{-3} = +\frac{2}{(1+x)^3} & f^{(3)}(0) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4} = -\frac{6}{(1+x)^4} & f^{(4)}(0) = 6 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k} & f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \end{array}$$

Ainsi, la formule de taylor à l'odre n entre 0 et 1 s'écrit :

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + (-1)^n \int_0^1 (1-t)^n (1+t)^{-(n+1)} dt$$

Il faut donc montrer que le reste tends vers 0 :

$$\forall t \in [0,1],\ (1-t)^n(1+t)^{-(n+1)} \leqslant (1-t)^n \text{ en majorant } (1+t)^{-(n+1)} \text{ par } 1$$

et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)^n(1+t)^{-(n+1)}dt &\leqslant \int_0^1 (1-t)^n dt \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Ainsi, le reste tends vers 0 et on a bien : $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$.

✯ Démonstration de la formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young peut se déduire de la formule avec reste intégral, pour cela, il suffit de faire tendre la valeur de x vers a. Pour simplifier les notations, on se place en 0.

On va montrer le résultat suivant :

Proposition .21 — Formule de Taylor-Young. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de 0.

Alors f admet un DL_n en 0 donné par :

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\end{aligned}$$

Démonstration. On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral (avec $n-1$ à la place de n).

Ce qui donne :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

On force à ajouter le terme d'ordre n :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

Il reste à comparer le reste avec $f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$ lorsque x tends vers 0. Précisément, on veut démonter que

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

On écrit alors :

$$\frac{x^n}{n!} = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_0^x = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)\right)dt$$

On majore alors (pour $x \geqslant 0$) :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)\right)\right| dt \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)\right| dt$$

Considérons ensuite $\varepsilon > 0$, puisque $f^{(n)}$ est continue, on a :

$$\exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha,\alpha],\ \left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)\right| \leqslant \varepsilon$$

On a alors pour $0 \leqslant x \leqslant \alpha$:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left|f^{(n)}(t)-f^{(n)}(0)\right|dt &\leqslant \varepsilon \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\\ &\leqslant \varepsilon \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

(Pour $x \leqslant 0$, on obtient la même inégalité avec une valeur absolue)

Ainsi, la différence est majorée par une x^n multiplié par une valeur que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut (lorsque $x \to 0$). C'est-à-dire :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt - f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

et on a bien la formule. ■

Corollaire .22 Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ au voisinage de 0. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)\end{aligned}$$

Démonstration. C'est simplement la traduction que le terme suivant dans le développement de Taylor est $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)$, c'est-à-dire un $\underset{x\to 0}{O}\left(x^{n+1}\right)$. ■

Le résultat avec des grand O, bien que moins utilisé est en fait plus précis : un grand O de x^{n+1} est toujours un petito de x^n. Cela indique qu'il n'y a pas de termes entre x^n et x^{n+1} (ie que le terme suivant est en x^{n+1}).

Par exemple $x^2\ln(x)$ est $\underset{x\to 0}{o}(x)$ mais pas $\underset{x\to 0}{O}\left(x^2\right)$.

Lorsqu'on étudie des schéma numérique d'approximation (par exemple pour la résolution numérique des équations différentielles), on utilise souvent le résultat avec des grand O.

On écrit par exemple :

$$f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\underset{h\to 0}{O}(h^2).$$

Une démonstration alternative consiste à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

Proche de 0, la fonction $f^{(n+1)}$ étant continue, elle est bornée par une valeur M. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right| &\leqslant M\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\\ &\leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

⋆ Formule de Taylor-Lagrange

Commençons pas un résultat intermédiaire :

Proposition .23 — Première formule de la moyenne. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$, la fonction g étant positive. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. Comme f continue sur le segment $[a,b]$, elle est continue et atteint ses bornes. On peut donc poser $[m,M] = f([a,b])$.

On a (car $g \geqslant 0$) :

$$\forall t \in [a,b],\ mg(t) \leqslant f(t) \leqslant Mg(t).$$

Donc en intégrant, on trouve :

$$m\int_a^b g(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant M\int_a^b g(t)dt.$$

On peut donc écrire :

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \in [m,M] = f([a,b]).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [a,b], f(c) = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$.

Il faut traiter à part le cas où $\int_a^b g(t)dt = 0$, dans ce cas $g = 0$ (car g positive), et donc n'importe quel c convient. ■

On en déduit le résultat suivant :

Théorème .24 — Égalité de Taylor-Lagrange. Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ et $a < b$, alors :

$$\exists c \in [a,b],\ f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}$$

Il s'agit d'une généralisation des accroissements finis.

Démonstration. En utilisant Taylor avec reste intégral sur $[a,b]$ à l'ordre $n-1$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(t)dt$$

Il faut donc montrer l'existence de $c \in [a,b]$, tel que :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(t)dt = f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}$$

Pour cela, on applique la première égalité de la moyenne en remplaçant f par $f^{(n)}$ (qui est bien continue) et la fonction g par $x \longmapsto \dfrac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ qui est bien positive sur $[a,b]$. Cela donne :

$$\begin{aligned}\exists c \in [a,b],\ \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(t)dt &= f^{(n)}(c)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(t)dt \\ &= f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}\end{aligned}$$

■

Théorème de la limite de la dérivée

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

⋆ Le théorème

Le théorème de la limite de la dérivée s'énonce ainsi :

Théorème .25 — Théorème de la limite de la dérivée. Soit f définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur $I\setminus a$.

On suppose que **l'application dérivée f' admet une limite L (finie ou non)** en a. Alors :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L.$$

ainsi, **le taux d'accroissement en a tends aussi vers L.**

En conséquence immédiate :

- dans le cas où L est finie alors f est dérivable en a avec $f'(a)=L$.
- dans le cas où $L=\pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a et $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale en a.

Démonstration. On traite la dérivabilité à droite en a.

Soit $a<x<b$, f est alors continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$, donc on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$\exists c_x\in]a,x[,\ f(x)=f(a)+f'(c_x)(x-a) \text{ soit } \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_x)$$

On sait que $\lim\limits_{x\to a}c_x=a$ (d'après le théorème des gendarmes), puisque $c_x\in]a,x[$. Comme on sait que $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=L$, on a par composition des limites : $\lim\limits_{x\to a}f'(c_x)=L$. Et donc : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$. Ce qui s'écrit aussi f est dérivable (à droite) en a, avec $f'(a)=L$.

On traite de même la dérivabilité à gauche en a. ■

C'est en fait un théorème d'inversion de symbole puisqu'on peut écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f'(x)&=\lim_{x\to a}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\end{aligned}$$

On peut aussi dire : la limite de la fonction dérivée est la limite du taux d'accroissement.

Ce théorème est particulièrement utile dans le cas d'une fonction qui est prolongée par continuité en a : on est assuré de la continuité et on montre la dérivabilité par la limite de l'application dérivée C'est en particulier le cas pour l'étude du problème de recollement de solutions d'équations différentielles : dans ce cas, on cherche des fonctions solutions qui sont $\mathscr{C}^1$.

Dans le cas où L est finie, on obtient non seulement la dérivabilité de f en a, mais aussi la continuité de f' en a, puisque $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)$.

Ce qui amène au théorème :

Proposition .26 — Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$. Soit f définie et continue sur un intervalle I et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I\setminus a$. On suppose que l'application dérivée f' admet une limite finie L en a.

On a alors : f est $\mathscr{C}^1$ sur I avec $f'(a)=L$.

Il faut bien comprendre les hypothèses : f est continue sur I entier (en a aussi) et $\mathscr{C}^1$ partout sauf en a. Pour obtenir que f est en fait $\mathscr{C}^1$ aussi en a, on regarde la limite de la fonction dérivée. Là aussi,le cadre d'utilisation est souvent le cas d'une fonction prolongée par continuité. De plus, il faut comprendre que l'on ne prolonge pas la dérivée : on montre la dérivabilité en a et on a automatiquement la continuité de l'application dérivée.

En fait, on gagne un calcul : sans ce théorème, il faut d'abord montrer la dérivabilité en a (par le taux d'accroissement), puis vérifier la continuité de f', ie que $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ existe et vaut la limite du taux d'accroissement.

⋆ Un exemple d'application

■ **Exemple .2** Soient λ un réel non nul et f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\cos(\lambda x)-1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrons que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

On voit que f est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ (quotient de fcts continues). En 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}\lambda^2 x^2}{x} = \frac{\lambda^2 x}{2} \to 0 = f(0)$$

D'où la continuité en 0 et sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

On a f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ (quotient de fcts $\mathscr{C}^1$).

En 0 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\lambda \sin(\lambda x)}{\sin x} + (\cos(\lambda x)-1)\frac{\cos(x)}{\sin^2 x} \\ &= -\lambda^2 + o(1) + \frac{\lambda^2}{2} + o(1) \\ &\to -\frac{\lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut appliquer le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$: f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ avec $f'(0) = -\frac{\lambda^2}{2}$. ■

⋆ Exemple des partitions de l'unité

Les partitions de l'unité sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle partout sauf sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ où elles sont strictement positive.

On peut ainsi par exemple construire une fonction qui est égale à 1 sur $[-1,1]$, et à 0 sur $\mathbb{R}\setminus[-1-\varepsilon,1+\varepsilon]$ pour un $\varepsilon > 0$ quelconque. Ce n'est pas possible pour un polynôme, et démontre que les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ ont un comportement différent que les fonction polynomiales : deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ peuvent être égales sur une partie non vide et très différentes ailleurs, alors que si deux fonction polynomiales sont égales sur une partie non vide elles sont égales partout.

Pur deux fonctions DSE, on a un comportement intermédiaire : si f et g sont toutes les deux DSE sur $]-r,r[$ avec $r>0$, alors si elles sont égales sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$ elles sont égales sur $]-r,r[$, mais elles peuvent être différente loin de 0.

L'exercice suivant est très classique et à connaître :

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$.
2. Montrer que f admet un prolongement g de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $g^{(n)}(0) = 0$
3. Démontrer que g n'est pas développable en série entière.

Correction :

1. Déjà f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

   On utilise une récurrence :

   $$\mathscr{P}(n) : \text{"}\exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\text{"}$$

   Pour l'initialisation, on pose $P_0 = 1$.

   Pour l'hérédité, on considère n fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On dérive la relation :

   $$\forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

   ce qui donne :

   $$\forall x \neq 0, f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

   on pose donc $P_{n+1} = -X^2P_n' + 2X^3P_n$ pour avoir l'hérédité.

2. On prolonge par continuité en posant $f(0)$, si bien que :

$$g : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

On utilise une récurrence :

$$\mathscr{P}(n) : \text{ "} g \in \mathscr{C}^n \text{ avec } g^{(n)}(0) = 0\text{"}.$$

C'est vrai pour $n = 0$ (continuité).
Supposons que cela soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$. $g^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et continue en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

ainsi, le taux d'accroissement tends aussi vers 0. On applique le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$: $g^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, avec $g^{(n+1)}(0) = 0$. Ce qui constitue bien l'hérédité.
3. Par l'absurde, supposons que g soit DSE sur $]-R,R[$, ave $R > 0$ alors :

$$\forall x \in]-R,R[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)x^n}{n!} = 0$$

ainsi, g est identiquement nulle sur $]-R,R[$, ce qui n'est pas le cas.
En utilisant la fonction g, on construit facilement une partition de l'unité.

⋆ Application des partitions de l'unité

Le résultat suivant n'est pas au programme.

Proposition .27 — Théorème de Borel. Soit (a_n) une suite quelconque de réels.
Alors il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = a_n$$

⋆ Méthode pour étudier une fonction prolongée

- Le taux d'accroissement,
- les développements limités,
- le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$,
- les développements en série entière.

Compléments sur la manipulation des relations de comparaison

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

On présente ici quelques résultats de manipulation d'équivalent. Il ne faut pas apprendre ces résultats par cœur, il est préférable de les redémontrer.

✯ Les cas où l'on peut composer

le cas d'une limite équivalent de $e^{\cos(x)}$ en 0

On a $\lim_{x\to 0}\cos(x)=1$, donc par continuité : $\lim_{x\to 0}e^{\cos(x)}=e$, ce qui s'écrit : $e^{\cos(x)}\underset{x\to 0}{\sim}e$.

le cas de la puissance équivalent de $\sin^3(x)$ en 0.

On a $\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$, donc $\sin^3(x)\underset{x\to 0}{\sim}x^3$.

R Cela est aussi valable pour les puissance non entière (ex prendre la racine carrée).

✯ Rédiger une substitution

■ **Exemple .3** Équivalent de $u_n=\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

On a : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0$, donc par continuité $\lim_{n\infty}\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1$, on est donc en train d'approximer la fonction logarithme népérien au voisinage de 1.

On écrit alors :

$$\begin{aligned}u_n&=\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=\ln\left(1+\underbrace{\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-1\right)}_{\to 0}\right).\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-1\right)=0$, et $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim}u$, on a par substitution :

$$u_n\underset{n\infty}{\sim}\cos\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-1.$$

Puis on a : $\lim_{n\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=0$, et $\cos(u)-1\underset{u\to 0}{\sim}-\frac{u^2}{2}$, ce qui donne par substitution :

$$\begin{aligned}u_n&\underset{n\infty}{\sim}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\\&\underset{n\infty}{\sim}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

en effet, $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\underset{n\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, donc en mettant au carré, on obtient : $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\underset{n\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$. ■

Remarquez qu'on utilise une limite et un équivalent. On substitue la variable dans l'équivalent par l'expression qui tend vers la bonne limite.

✯ Équivalent et fonction exponentielle

Proposition .28 Si (u_n) et (v_n) vérifient $\lim_{n\infty}(u_n-v_n)=0$, alors $\exp(u_n)\underset{+\infty}{\sim}\exp(v_n)$.

Démonstration. En effet :

$$\frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} = \exp^{(u_n - v_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

■

■ **Exemple .4** Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n\infty}(\ln(u_n) - 2n) = \ln 3$.

On a alors

$$\begin{aligned} \ln(u_n) - 2n - \ln(3) &\xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ \text{et donc } \exp(\ln(u_n) - 2n - \ln(3)) &\xrightarrow[n\infty]{} 1 \\ \text{c'est-à-dire } u_n \exp(-2n - \ln(3)) &\xrightarrow[n\infty]{} 1 \\ \text{ce qui s'écrit } u_n &\underset{+\infty}{\sim} e^{2n+\ln(3)}. \end{aligned}$$

Cette dernière écriture donne une idée de la vitesse avec laquelle u_n tend vers $+\infty$.

■

✯ Équivalent et fonction logarithme

Proposition .29 Si on a $\lim_{n\infty} v_n = 1$, avec $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 1$, alors $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} v_n - 1$.

Démonstration. En effet, si on pose $u_n = v_n - 1$, alors $\lim_{n\infty} u_n = 0$, et donc

$$\ln(v_n) = \ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n = v_n - 1.$$

■

Proposition .30 Si (u_n) et (v_n) sont deux suites strictement positives avec $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, et $\lim_{n\infty} v_n = L \neq 1$, alors on a : $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. Ce résultat est aussi valable si $L = +\infty$.

Démonstration. Si L est un réel non nul et différent de 1, alors cela provient de $u_n \to L$, $\ln(u_n) \to \ln(L)$ et $\ln(v_n) \to \ln(L)$, donc $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ ont la même limite (non nulle) $\ln(L)$, donc sont équivalentes. (On retrouve la composition dans le cas d'une limite).

Si $L = +\infty$, on écrit :

$$\ln(u_n) = \underbrace{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\ln(v_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty}.$$

Ainsi :

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} + 1$$

Si $L = 0^+$, on sait que $\frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$, avec $\frac{1}{v_n} \to +\infty$, donc en appliquant ce qui précède on a : $\ln\left(\frac{1}{u_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{1}{v_n}\right)$ soit $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. ■

■ **Exemple .5** Si on cherche l'équivalent de $\ln(\tan x)$ au voisinage de 0, on peut par exemple écrire rapidement :

$$\begin{aligned} \ln(\tan x) &= \ln(x) + \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) \\ &\underset{0}{\sim} \ln(x) \end{aligned}$$

car $\ln(x) \to +\infty$ et $\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right) \to 0$. ■

R La rédaction est ici un peu différente pour bien mettre en évidence la point important de la méthode : forcer la factorisation pour utiliser la propriété fondamentale du logarithme.

On a les même résultats pour les fonctions :

Proposition .31 Pour deux fonctions f et g :

- Si $\lim_{x_0}(f(x)-g(x))=0$, alors $\exp(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \exp(g(x))$.
- Si f et g sont deux fonctions strictement positives avec $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, et $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 1$, on a : $\ln(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \ln(g(x))$. Ce résultat est aussi valable si $L=+\infty$.

Lemme d'Abel et rayon de convergence
Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle
Développement en série entière
Exercices
Calcul de DSE en utilisant des équations différentielles
Étude de fonctions définies par une intégrale
Résolution d'un système avec paramètres
Passage d'un mode de représentation d'un sev à l'autre
Révisions algèbre linéaire
Exercices : Rappels et compléments d'algèbre linéaire
Fonctions génératrices
Rappels sur les polynômes
Exercices classiques sur les polynômes

4 — Séries entières

I Lemme d'Abel et rayon de convergence

I.1 Définitions

Définition I.1 — Série entière. On appelle série entière de la variable réelle (ou complexe) z associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\left(\sum a_n z^n\right)$.
La suite (a_n) est la suite des coefficients de cette série entière.

On généralise en fait ici la notion de série de fonctions, puisque maintenant on considère une série de fonctions $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (et non définie uniquement sur une partie de $\mathbb{R}$).
Les définitions sont les mêmes :

- la convergence simple est la convergence de $\sum a_n z^n$ à z fixé,
- la convergence absolue est la convergence de $\sum |a_n||z|^n$ à z fixé,
- la norme infinie (norme de la convergence uniforme) $\|f_n\|_\infty^X$ sur une partie X est :

$$\|f_n\|_\infty^X = \sup\left\{|f_n(x)|\,\middle|\, x\in X\right\}$$

(avec $|f_n(x)|$ le module)

- la convergence uniforme sur X est la convergence de $\|R_n\|_\infty^X$ vers 0, ie la convergence uniforme du reste vers la fonction nulle,
- la convergence normale est la convergence de la série numérique $\sum\|f_n\|_\infty^X$,

Une des rares différences est que l'on ne peut pas dériver les fonctions f_n définies sur $\mathbb{C}$ pour calculer leur norme infinie.
Sauf indication contraire, les coefficients (a_n) sont une suite de complexes.

Les séries entières peuvent être vues

- comme des séries de fonctions : c'est la série de fonctions $(\sum f_n)$ associée à la suite de fonctions : $f_n : z \longmapsto a_n z^n$

- ou comme une généralisation des polynômes (c'est un « polynôme de degré infini »),
- ou encore comme une généralisation d'un DL (on pousse jusqu'à « l'ordre infini »).

■ **Exemple I.1** La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est une série entière.

La série $\sum \frac{z^{2n+1}}{n!}$ est aussi une série entière associée à la suite (a_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{k!} & \text{si } n \text{ est impair et s'écrit } n = 2k+1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour ces dernière séries, on parle de série entière **lacunaire** : c'est une série entière ou certains termes sont nuls.

On peut aussi considérer des séries entières définies à partir d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$. ■

■ **Exemple I.2** La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ est une série entière.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos(x)^n$ n'est pas une série entière.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (3x)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} 3^n x^n$ est une série entière.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{x}^n$ n'est pas une série entière, par contre la série : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x^2\right)^n$ est une série entière. ■

Une série entière est une série de fonctions particulières, dans laquelle le terme général de la série est un monôme : $x \mapsto a_n x^n$.

■ **Exemple I.3** Considérons la série $\sum nx^n$. En appliquant le critère de d'Alembert, on voit que cette série converge si $x < 1$. Si $x \geqslant 1$, cette série diverge grossièrement. ■

■ **Exemple I.4** Considérons la série $\sum_n \ln(n)x^n$. on voit que cette série converge si $x < 1$, et diverge grossièrement si $x > 1$. ■

I.2 Lemme d'Abel

Théorème I.1 — Lemme d'Abel. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, tel que $(a_n z_0^n)$ est une suite bornée. On a alors :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \left(|z| < |z_0| \implies \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente} \right)$$

Démonstration. En effet,

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n = \underbrace{|a_n z_0^n|}_{\text{bornée}} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \underset{n\infty}{O}\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right)$$

Or la série $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est convergente (c'est une série géométrique de raison strictement inférieur à 1).

On en déduit par comparaison des séries à terme général positif que la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente et donc que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. ■

Ce résultat est très particulier au série entière : si la suite est simplement bornée en un point, alors la série converge en tout point de module inférieur.
Le principe est qu'en diminuant un tout petit peu la valeur de $|z|$, on diminue beaucoup la valeur de $a_n z^n$.
D'où l'idée de choisir la plus grande valeur (en module) où la suite $(a_n z^n)$ est bornée.

Définition I.2 — Rayon de convergence. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
Le rayon de convergence de cette série entière est la borne supérieure de l'ensemble des réels positifs ρ tels que la suite $(a_n z^n)$ est bornée.

$$R = \sup\left\{\rho \in \mathbb{R}^+ \middle| (a_n \rho^n) \text{ est une suite bornée}\right\}$$

Par convention, si cet ensemble n'est pas bornée (ie si pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+$, la suite $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée), alors on pose $R = +\infty$.

R L'ensemble $\left\{\rho \in \mathbb{R}^+ \middle| (a_n \rho^n) \text{ est une suite bornée}\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}^+$ non vide (il contient 0). On peut donc parler de sa borne supérieure (éventuellement infinie si cette partie n'est pas majorée).

Définition I.3 Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ est appelé disque ouvert de convergence.
L'intervalle $]-R, R[$ est l'intervalle ouvert de convergence.
Le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$ (de centre O et de rayon R) est le cercle d'incertitude.

R On peut avoir $R = 0$.

En conséquence du lemme d'Abel, on a le résultat très important suivant :

Proposition I.2 Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
Alors :
- pour toute valeur z vérifiant $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
  Autrement dit, à l'intérieur du disque ouvert de convergence, la série converge absolument.
- pour toute valeur z vérifiant $|z| > R$, $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.
  Autrement dit, à l'extérieur du disque ouvert de convergence, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration. Rappelons la définition de R :

$$R = \sup\left\{\rho \in \mathbb{R}^+ \middle| (a_n\rho^n) \text{ est une suite bornée}\right\}$$

Soit z vérifiant $|z| < R$, on pose $r = \frac{1}{2}(|z| + R)$, on a alors $r < R$ et donc par définition de la borne supérieure, on peut trouver $\rho \geqslant r$, tel que $(a_n\rho^n)$ est bornée.

On a donc $|z| < \rho$ et $(a_n\rho^n)$ est bornée. En appliquant le lemme d'Abel, on en déduit que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Soit maintenant z vérifiant $|z| > R$, par définition de la borne supérieur, on a : $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et donc la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. ■

Méthode :

- Si on trouve z tel que $\sum a_n z^n$ converge ou $\lim\limits_{n\infty} a_n z^n = 0$ ou même simplement $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$,
- Si on trouve z tel que $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, $(a_n z^n)$ ne tends pas vers 0, ou même que $\sum a_n z^n$ ne converge pas absolument c'est que $|z| \geqslant R$.
- Si on trouve z tel que $\sum a_n z^n$ converge mais $\sum |a_n||z|^n$ ne converge pas (ie la série converge mais pas absolument). c'est que $|z| = R$. Autre cas : si on trouve z tel que $\sum a_n z^n$ diverge mais $(a_n z^n)$ est bornée (par exemple si elle n'est pas grossièrement divergente) c'est que $R = |z|$.

Un cas particulier fréquent est $z = 1$ (dans ce cas la suite $(a_n z^n)$ est simplement la suite des coefficients (a_n).

Prenons le temps de démontrer ce résultat pour bien comprendre la notion de rayon de convergence :

Démonstration. Supposons qu'il existe z tel que $(a_n z^n)$ est bornée, alors :

$$|z| \in \left\{\rho \in \mathbb{R}^+ \middle| (a_n\rho^n) \text{ est une suite bornée}\right\}$$

Comme R est un majorant de cet ensemble, on a $|z| \leqslant R$. Autrement dit, z est dans le cercle de convergence. Cela s'applique au cas particulier où $\lim\limits_{n\infty} a_n z^n = 0$ où encore $\sum a_n z^n$ converge.

On a vu : $|z| < R \implies \sum a_n z^n$ converge absolument. ainsi par contraposé :

$$\sum a_n z^n \text{ ne converge pas absolument } \implies |z| \geqslant R$$

ce cas s'applique en particulier si il y a divergence grossière ou même si $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z^n$ converge mais $\sum |a_n||z|^n$ ne converge pas On a alors : $|z| \leqslant R$ (car $\sum a_n z^n$ converge) et $|z| \geqslant R$ (car $\sum a_n z^n$ ne converge pas absolument).

Supposons maintenant qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z^n$ diverge mais $(a_n z^n)$ est bornée On a de même : $|z| \leqslant R$ (car $(a_n z^n)$ est bornée) et $|z| \geqslant R$ (car $\sum a_n z^n$ diverge). ■

On peut donc séparer $\mathbb{C}$ en trois parties :

- L'intérieur du cercle de convergence où la série converge absolument,
- l'extérieur du cercle de convergence où la série diverge grossièrement,
- le cercle d'incertitude sur lequel on ne peut rien dire.

En particulier la fonction $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie sur le disque ouvert de convergence, éventuellement en partie sur le cercle de convergence, mais pas au delà.

■ **Exemple I.5** Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ fixé, le rayon de convergence de la série $\sum \alpha^n z^n$ est $R = \frac{1}{|\alpha|}$. ■

■ **Exemple I.6** Pour la série entière $\sum \frac{z^n}{2^n+3^n}$, on voit que pour $z = 3$, la suite $\left(\frac{3^n}{2^n+3^n}\right)$ est bornée (puisque cette suite a pour limite 1), mais que la série $\sum \frac{3^n}{2^n+3^n}$ diverge (puisque son terme général tends vers 1).

Ainsi $R = 3$. ■

■ **Exemple I.7** Pour la série entière $\sum z^n$, pour $z = 1$, la série $\sum 1$ diverge mais la suite des coefficients $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. D'où $R = 1$. ■

■ **Exemple I.8** Si $a_n = \frac{1}{n}$, alors on sait que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente sans être absolument convergente, donc le rayon de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ est 1.

On peut aussi dire que pour $z = 1$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge sans être grossièrement divergente.

■

■ **Exemple I.9** Pour la série entière $\sum nz^n$, on voit que si $|z| < 1$, alors par critère de d'alembert, la série $\sum nz^n$ converge. Ainsi $R \geqslant 1$. De plus la série $\sum n$ diverge. Ainsi, $R = 1$. ■

R On trouve des premiers résultats : si (a_n) est bornée, alors $R \geqslant 1$. Si $\sum a_n$ ne converge pas, alors $R \leqslant 1$.

I.3 Calculs de rayon de convergence

✯ Invariance

Commençons par les cas les plus simple :

- Les séries entière $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

  En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il est équivalent de dire que la suite $(a_n z^n)$ est bornée et de dire que la suite $(|a_n| z^n)$ est bornée.
  En particulier, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est fixé, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (\lambda a_n) z^n$ ont le même rayon de convergence.

  En effet, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(a_n \lambda z^n)$ est bornée si et seulement si la suite $(a_n z^n)$ est bornée.
- Si $p \in \mathbb{N}$ est fixé, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n z^{n+p}$ ont le même rayon de

convergence.

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(a_n z^{n+p}) = z^p (a_n z^n)$ est bornée si et seulement la suite $(a_n z^n)$ est bornée.

✯ Comparaison des coefficients

Plus la suite (a_n) tends vers 0, plus il est facile d'avoir $(a_n z^n)$ bornée pour de grandes valeurs de $|z|$. On a donc une première idée : plus la suite (a_n) tends vite vers 0 (ou du moins est bornée ou ne tends pas trop vite vers $+\infty$), plus le rayon de convergence est grand.

Proposition I.3 — Rayon de convergence et comparaison des coefficients. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

On a :

- Si $a_n \underset{n\infty}{=} O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \underset{n\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.

En particulier, si $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_b \leqslant R_a$.

En conséquence du résultat sur les grand o, on a :

$$\text{Si } a_n \underset{n\infty}{=} o(b_n), \text{ alors } R_a \geqslant R_b$$

car $a_n \underset{n\infty}{=} o(b_n) \implies a_n \underset{n\infty}{=} O(b_n)$.

Démonstration. Supposons $a_n \underset{n\infty}{=} O(b_n)$ et considérons $\rho < R_b$ et donc : $(b_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.

On note $M \in \mathbb{R}$ et $M' \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |b_n \rho^n| \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant M' |b_n|$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n \rho^n| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| |b_n \rho^n| \leqslant M' M$$

Ainsi, $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et donc $\rho \leqslant R_a$.

On a donc obtenu :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, \rho R_b \implies \rho \leqslant R_a$$

En faisant tendre ρ vers R_a, cela donne : Ainsi, $R_a \geqslant R_b$.

Le deuxième point peut se démontrer simplement ainsi :

$$a_n \underset{n\infty}{\sim} b_n \implies a_n \underset{n\infty}{=} O(b_n) \text{ et } b_n \underset{n\infty}{=} O(a_n)$$

Ainsi, $R_a \geqslant R_b$ et $R_b \geqslant R_a$ d'où l'égalité.

■

✯ Dérivation et primitivation terme à terme

Proposition I.4 Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

D'une manière générale, si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

En conséquence les séries :

$$\sum a_n z^n \ \sum n a_n z^{n-1} \ \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \ \sum n(n-1) a_n z^{n-2}$$

ont même rayon de convergence. Cela peut paraître étonnant, car (na_n) tends vers 0 moins vite que (a_n). Le rayon de convergence ne diminue pourtant pas.
On parle de dérivation et de primitivation terme à terme. Ces opérations conservent le rayon de convergence. Il s'agit d'une dérivée formelle (on dérive ici des fonctions complexes).

Démonstration. Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R' le rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n z^n$.

Considérons $\rho < R$, on doit montrer que la suite $(n^\alpha a_n \rho^n)$ est bornée. Notons $r = \frac{\rho+R}{2}$, si bien que $r \in]\rho, R[$. on sait que $(a_n r^n)$ est une série bornée (par définition de R). On a alors :

$$n a_n \rho^n = \left(n^\alpha \frac{\rho^n}{r^n} \right) (a_n r^n)$$

Or, comme $\frac{\rho}{r} < 1$ la suite $\left(n^\alpha \frac{\rho^n}{r^n} \right)$ tends vers 0 par croissance comparée (la partie géométrique l'emporte sur la partie polynomiale). On en déduit que la suite $(n^\alpha a_n \rho^n)$ s'écrit comme une produit d'une suite qui tends vers 0 par une suite bornée, donc elle converge vers 0 et elle est bornée.

On a donc montré que pour tout $\rho < R$, la suite $(n^\alpha a_n \rho^n)$ est bornée. On peut donc en déduire que $R' \leqslant R$.

Considérons maintenant $\rho < R'$.

De la même manière, on note $r = \frac{\rho+R'}{2}$, si bien que $r \in]\rho, R'[$.

On a alors directement :

$$a_n \rho^n = \left(\frac{1}{n^\alpha} \frac{\rho^n}{r^n} \right) (n^\alpha a_n r^n)$$

C'est encore le produit d'une suite qui tends vers 0 (par croissance comparée) et d'une suite bornée, on en déduit que la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée. On a donc démontré que pour tout $\rho < R'$, la suite $(n^\alpha a_n \rho^n)$ est bornée. On peut donc en déduire que $R \leqslant R'$.

Au final, on a bien $R = R'$. ■

⋆ Règle de d'Alembert

La règle de d'Alembert permet de calculer directement le rayon de convergence d'une série entière, en utilisant le quotient du module de deux termes consécutifs.

R On rappelle le critère de d'Alembert pour une série $\sum a_n$ à termes positifs : si $\lim_{n\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ avec $l < 1$, alors la série converge, si au contraire : $\lim_{n\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ avec $l > 1$, alors la série diverge grossièrement.

Proposition I.5 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont les coefficients sont non nuls à partir d'un certain rang. On note son rayon de convergence R.

On suppose que la suite $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ converge (ou tends vers $+\infty$). On note :

$$\lim_{n\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \qquad \text{éventuellement } l = +\infty.$$

On a alors :
- si $l = 0$, alors $R = +\infty$,
- si $l \in]0, +\infty[$, alors $R = \frac{1}{l}$,
- si $l = +\infty$, alors $R = 0$.

Ce résultat est important : il permet de donner le rayon de convergence d'une série entière directement. C'est quasiment le seul résultat qui permet cela.

Cela ne permet de conclure que lorsque $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ converge (ou tends vers $+\infty$) ! On a donc un problème pour les séries lacunaires, qu'il faut traiter différemment. Pour une série lacunaire, il faut revenir au critère de d'Alembert pour les séries (à z fixé donc) pour savoir si il y a convergence absolue.

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{C}$, on utilise la règle de d'Alembert pour la série $\sum a_n z^n$. Le quotient de deux terme consécutif est :

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$$

On suppose $l = 0$, on considère $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sum a_n z^n \text{ converge absolument puisque } \lim_{n\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = 0.$$

Ainsi, la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ et donc $R = +\infty$.

On suppose maintenant que $l > 0$ et on considère $z \in \mathbb{C}$, vérifiant $|z| < \frac{1}{l}$. On a alors le même argument :

$$\sum a_n z^n \text{ converge absolument puisque } \lim_{n\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = |z|l < 1.$$

Ainsi, la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, donc $|z| \leqslant R$ et on a donc montré :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \frac{1}{l} \implies |z| \leqslant R$$

et donc : $R \geqslant \frac{1}{l}$.

Si maintenant $z > \frac{1}{l}$, alors :

$$\sum a_n z^n \text{ ne converge pas absolument puisque } \lim_{n\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = |z|l > 1.$$

Ainsi, la série entière $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente et donc de même : $R \leqslant \frac{1}{l}$. On a bien trouvé : $R = \frac{1}{l}$.

Dernier cas, si $l = +\infty$, considérons $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\sum a_n z^n \text{ ne converge pas absolument puisque } \lim_{n\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = +\infty.$$

Ainsi, la série $\sum a_n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Le rayon de convergence est 0. ■

■ **Exemple I.10** On obtient le rayon de convergence des séries suivantes :

$$\sum n! x^n \ (R=0) \qquad \sum x^n \ (R=1) \qquad \sum \frac{1}{n!} x^n \ (R=+\infty)$$

Notons qu'avec les résultats précédents, les séries suivantes ont pour rayon de convergence 1 :

$$\sum n x^n \qquad \sum n^2 x^n \qquad \sum \frac{1}{n} x^n$$

■

■ **Exemple I.11** Le rayon de convergence de $\sum \frac{n}{3^n} z^n$ est 3 car :

$$\frac{n+1}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{n+1} \frac{1}{3} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

■

Méthode : pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière, on comment par regarder avec le critère de d'alembert : on fait le quotient de deux coefficients successifs (en module ou valeur absolue) et on regarde si cette quantité admet une limite.

Si la série est lacunaire, on peut faire pareil mais en fixant z. On considère z fixé, et on regarde si la série $\sum a_n z^n$ converge en faisant le quotient de deux termes successifs (en module ou valeur absolue). On obtient alors un résultat du type : si $|z| < T$, alors on est sûr que la série converge, si $|z| > T$, alors on est sûr que la série diverge (généralement on n'a pas la réciproque). Cela suffit à démontrer que $R = T$.

Attention, la règle de d'Alembert n'est pas une équivalence : c'est uniquement dans le cas où l'on sait que le quotient de deux termes consécutifs converge que l'on peut l'utiliser.

■ **Exemple I.12** Pour une série lacunaire :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{3n}}{2^n + 3^n}$$

on considère $z \in \mathbb{C}*$ fixé, et on utilise le critère de d'alembert (sur les séries numériques) pour savoir si il y a convergence absolue. On calcule donc :

$$\left|\frac{z^{3n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right| \left|\frac{2^n+3^n}{z^{3n}}\right| = |z|^3 \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} \underset{n\infty}{\sim} \frac{|z|^3}{3}$$

Si $\frac{|z|^3}{3} < 1$ ie $|z| < \sqrt[3]{3}$, la série converge, si $|z| > \sqrt[3]{3}$, la série diverge. C'est l'application du critère de d'alembert sur les séries numériques. On en déduit que $R = \sqrt[3]{3}$. ■

✯ Somme de deux séries

Proposition I.6 Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

On a alors : $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. Plus précisément, si $R_a \neq R_b$, $R = \min(R_a, R_b)$. De plus :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \left(|z| < \min(R_a, R_b) \implies \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Démonstration. Considérons un réel positif $r < \min(R_a, R_b)$, alors $(a_n r^n)$ et $(b_n r^n)$ sont deux suites bornées et donc $((a_n + b_n) r^n)$ est une suite bornée. On peut donc écrire $r \leqslant R$.

Ainsi, pour tout r vérifiant $r < \min(R_a, R_b)$, on a : $r \leqslant R$ et donc $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Supposons maintenant que $R_a < R_b$. Considérons $r \in]R_a, R_b[$. On a alors : $(a_n r^n)$ n'est pas bornée et $(b_n r^n)$ est bornée.

Montrons rapidement par l'absurde que $((a_n + b_n) r^n)$ n'est pas bornée. En effet, dans le cas contraire, on écrit $a_n r^n = (a_n + b_n) r^n - b_n r^n$ est bornée comme somme de suites bornées et donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée, ce qui est une contradiction. Ainsi, $((a_n + b_n) r^n)$ n'est pas bornée et donc $r \geqslant R$. Comme r est quelconque dans $]R_a, R_b[$ on fait tendre r vers R_a et on en déduit que $R \geqslant R_a$. D'où l'égalité dans le cas où $R_a \neq R_b$.

Le dernier point est simplement la conséquence de la linéarité de la somme de réels. ■

✯ Produit de Cauchy de deux séries entières

Définition I.4 Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières.

Le produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum c_n z^n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} b_p = \sum_{i+j=n} a_j b_j.$$

Le produit de Cauchy est donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n \right)$$

On retrouve bien sûr cette définition en écrivant :

$$\begin{aligned} &\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots\right)\left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots\right) \\ =& a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 \\ &+ (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) z^3 + \dots \end{aligned}$$

En particulier dans le cas d'un produit de séries de la forme $\left(\sum_{n \geqslant n_0} a_n z^n \right) \left(\sum_{n \geqslant n_0} b_n z^n \right)$ on adapte facilement cette définition.

C'est bien sûr la même définition que pour les séries numériques.

Proposition I.7 On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b respectivement.

On note $\sum c_n z^n$ le produit de Cauchy de ces deux séries entières et R le rayon de convergence de cette série entière.

On a alors : $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

De plus :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \left(|z| < \min(R_a, R_b) \implies \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \right)$$

Démonstration. considérons $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$. Alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergente, donc le produit de Cauchy $\sum b_n z^n$ est absolument convergent, donc $|z| \leqslant R$. Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_a, R_b) \implies |z| \leqslant R$$

et donc $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

L'égalité provient aussi du résultats sur les séries numériques de Cauchy. ■

II Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Pour pouvoir dériver, on va restreindre les séries entières à leur intervalle de convergence $]-R, R[$.

⋆ Convergence normale sur tout segment de l'intervalle de convergence

Proposition II.1 Soit $\left(\sum a_n z^n\right)$ une série entière de rayon de convergence R.

La série de fonctions $\left(\sum a_n x^n\right)$ converge alors normalement sur tout segment de $]-R, R[$.

En conséquence, la série de fonctions $\left(\sum a_n x^n\right)$ converge uniformément sur tout segment de $]-R, R[$.

Démonstration. On constate tout simplement que pour toute valeur de $A < R$, on a :

$$\forall z \in [-A, A],\ |a_n z^n| \leqslant |a_n A^n| \qquad \text{et la série } \sum a_n A^n \text{ converge car } A < R.$$

Ainsi, on a convergence sur tout segment de la forme $[-A, A]$ avec $A < R$, donc sur tout segment de $]-R, R[$. ■

⋆ Continuité

Proposition II.2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$.

Si l'on considère cette fonction comme une fonction définie sur $\mathbb{C}$ alors elle est continue sur le disque ouvert de convergence $\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| < R \right\}$.

Démonstration. C'est une conséquence de la convergence uniforme sur tout segment : les fonctions $z \longmapsto a_n z^n$ sont continues sur $]-R,R[$, donc la somme l'est.

On admet que c'est aussi valable pour les complexes sur le disque de convergence. ■

✯ Primitivation d'une série entière

Proposition II.3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Comme on l'a vu la fonction S est définie et continue sur $]-R,R[$.

Une primitive de S est alors la fonction :

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Précisément, il s'agit de la primitive nulle en 0.

On peut ainsi écrire :

$$\forall x \in]-R,R[,\ \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

C'est un résultat d'échange entre le symbole intégrale et le symbole somme. On peut intégrer terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence. Pour les primitives qui ne sont pas nulles en 0, ne pas oublier le premier terme !

Démonstration. C'est une conséquence de la convergence uniforme sur tout segment : soit $x \in]-R,R[$, alors il y a convergence sur le segment $[0,x]$, on a donc :

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

■

✯ Dérivation d'une série entière

Commençons par la première dérivée :

Proposition II.4 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ qui est donc définie sur $]-R,R[$.

Alors la fonction S est dérivable et :

$$\forall x \in]-R,R[,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Démonstration. En effet, si on note $f_n : x \longmapsto a_n x^n$, alors f_n est dérivable et $f_n' : x \longmapsto n a_n x^{n-1}$. On a vu que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-R,R[$ et que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-R,R[$. On en déduit que la fonction S est dérivable et l'expression de S'. ■

On généralise ensuite au cas des dérivées successives :

Proposition II.5 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ qui est donc définie sur $]-R,R[$.

On a alors :

- La fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la dérivée k-ième de S s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-R,R[, S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+k)!}{p!} a_{k+p} x^p\end{aligned}$$

- Pour tout entier naturel k, on a : $a_k = \dfrac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Ainsi, on peut dériver termes à termes une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Démonstration. C'est une conséquence de la convergence uniforme sur tout segment de toutes les séries dérivées terme à terme.

Considérons $k \in \mathbb{N}^*$, on sait alors :

- les fonctions $f_n : x \longmapsto a_n x^n$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ (puisqu'elles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$).
- Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série entière :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(j)} \qquad \text{ie} \qquad \sum_{n\geqslant j} \frac{n!}{(n-j)!} a_n x^{n-j}$$

  a pour rayon de convergence R elle converge donc uniformément sur tout segment de $]-R,R[$, en particulier elle converge simplement sur $]-R,R[$.
- La série entière :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)} \qquad \text{ie} \qquad \sum_{n\geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

  a pour rayon de convergence R elle converge donc uniformément sur tout segment de $]-R,R[$.

On applique donc le résultat sur l'échange de la dérivation k-ième et le symbole $\sum$, qui donne que S est de classe $\mathscr{C}^k$, et que

$$\forall x \in]-R,R[,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

En prenant la valeur en 0, on obtient l'expression de a_k.

Enfin, comme k est quelconque, on en déduit que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

■

III Développement en série entière

Dans cette section, on considère le point de vue inverse : on part d'une fonction f et l'on cherche à l'écrire comme une série entière.

III.1 Fonctions développables en série entière

Définition III.1 — Fonction développable en série entière. Soit $r > 0$ (éventuellement infini). Une fonction f, définie sur un intervalle I contenant $]-r,r[$ est dite développable en série entière sur $]-r,r[$ si il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$, telle que :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Ainsi, une fonction est développable en série entière si elle s'écrit comme un « polynôme de degré infini » sur $]-r,r[$.
Si f est DSE sur $]-r,r[$, alors elle est DSE sur $]-a,a[$ pour tout $0 < a \leqslant R$, on prend donc le a le plus grand.
Le fait d'être DSE est toujours sur un intervalle ouvert centrée en 0, ie de la forme $]-r,r[$.

On écrit parfois « est DSE » à la place de est développable en série entière.
Comme toutes les abréviations il ne faut pas les faire apparaître dans une copie.

■ **Exemple III.1** On a vu que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^k.$$

Ainsi, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. ■

Si une fonction est développable en série entière sur $]-r,r[$, elle est nécessairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$. Parfois on procède différemment et on montre que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en montrant qu'elle est DSE.

■ **Exemple III.2** Considérons la fonction :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En admettant la relation (que l'on va voir plus tard) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

En regardant la valeur en 0, on constate que cette relation est aussi valable en 0.

On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

et donc f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

On en déduit en particulier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. ∎

Comme on l'a vu, dans l'écriture $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

D'où la définition suivante :

Définition III.2 — Série de Taylor. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r,r[$ avec $r>0$.

On appelle série de Taylor de f la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

Avant de développer une fonction en série entière, on doit vérifier que ce développement est unique.

Proposition III.1 — Unicité du développement en série entière. Soit $(\sum a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sum b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries entières de rayon de convergence $R_a > 0$ et $R_b > 0$.

Si il existe $r > 0$, avec $r \leqslant \min(R_a, R_b)$ tel que :

$$\forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$ (ie les deux suites sont égales).

Attention, il faut $r > 0$, autrement dit l'égalité doit avoir lieu sur un intervalle non réduit à un point.

Démonstration. Il y a deux démonstrations. La première fait le lien avec les DLs : on note $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cette fonction est définie sur $]-r,r[$ (au moins). On a alors :

$$\begin{aligned}\forall m \in \mathbb{N},\ f(x) &= \sum_{n=0}^{m} a_n x^n + x^{m+1} \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n x^{n-m-1} \\ &= \sum_{n=0}^{m} a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^m\right).\end{aligned}$$

on peut aussi écrire :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^m\right).$$

Par unicité du *DL* : $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \leqslant m,\ a_n = b_n$ d'où le résultat.

La deuxième fait le lien avec Taylor : on a vu que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ (au moins) et que les coefficients sont données par les dérivées successives en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n! f^{(n)}(0) \text{ et donc } b_n = n! f^{(n)}(0) \text{ donc } a_n = b_n$$

D'où le résultat.

■

Corollaire III.2 En conséquence, si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors ce développement est sa série de Taylor.

Autrement dit : si f est DSE sur $]-r,r[$, alors la série de Taylor a un rayon de convergence $R \geqslant r$ et :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Tout polynôme est développable en série entière sur $\mathbb{R}$: il est lui-même une série entière. Si une fonction est DSE et est égale à un polynôme, alors son DSE est ce polynôme.

Il existe des fonctions non nulle de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

Une telle fonction est $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ainsi, cette fonction ne coïncide avec sa série de Taylor qu'en 0, pourtant cette série de Taylor a pour rayon de convergence $+\infty$. Elle n'est pas développable en série entière.

On peut aussi trouver des fonctions dont la série de Taylor a pour rayon de convergence 0.

De plus, il est tout à fait possible que la fonction et la série coïncide sur $]-r,r[$, mais soient différentes ailleurs. Comme exemple artificiel, on peut prendre $x \longmapsto \min(x^2,1)$ qui coïncide avec x^2 sur $]-1,1[$ et pas ailleurs. En modifiant un peu cet exemple, on peut construire une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, dont la série de Taylor est x^2, mais qui est égale à sa série de Taylor que sur $]-1,1[$. Le principe est que l'on peut modifier (avec des partitions de l'unité), la fonction f « loin » de 0, sans toucher au comportement en 0, et donc sans modifier la série de Taylor.

On peut expliquer cela ainsi :

- si deux polynômes coïncident sur $]-r,r[$ avec $r > 0$, alors ils sont égaux,
- si deux séries entières sont égale sur $]-r,r[$ avec $r > 0$, alors les séries entières sont les mêmes,
- mais si deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sont égales sur $]-r,r[$, alors elles peuvent être différentes pour x « loin » de 0.

Autre conséquence de l'unicité : le développement en série entière d'une fonction paire (si il existe) n'est constitué que de monôme pair, le développement d'une fonction impaire n'est constitué que de monôme impair.

L'unicité du DSE sert aussi lorsqu'on utilise un équation différentielle.

On a les liens entre opérations sur les fonctions et développement en série entière :

Proposition III.3 Si f et g sont des fonctions développables en série entière sur $]-r,r[$, alors $f+g$, λf et fg sont développables en série entière sur $]-r,r[$.

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors toutes ses dérivées successives et toutes ses primitives sont développables en série entières sur $]-r,r[$.

Démonstration. C'est des conséquences directes de ce que l'on a vu sur les séries entières.

Pour la somme, on a :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

donc $R_a \geqslant r$ et $R_b \geqslant r$. Ainsi, la série entière $\sum (a_n + b_n)x^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant r$ et on a :

$$\forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)x^n = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

Ainsi, $f+g$ est DSE sur $]-r,r[$.

Pour le produit c'est la même idée : on note $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, et on sait que la série entière $\left(\sum c_n x^n\right)$ a un rayon de convegence $R \geqslant r$ avec :

$$\forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = f(x)g(x) = (fg)(x)$$

Ainsi, fg est DSE sur $]-r,r[$.

Pour λf c'est évident :

$$\forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n)x^n = (\lambda f)(x)$$

Si on considère un entier $p \in \mathbb{N}$, alors on sait que l'on peut dériver la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, ainsi :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+p} \frac{(k+p)}{k!} x^k$$

et donc $f^{(p)}$ est DSE.

Pour les primitives, on a vu que la primitive S qui s'annule en 0 est :

$$\forall x \in]-R,R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Ainsi, S est DSE sur $]-r,r[$, et les autres primitives (qui sont égales à S plus une constante) aussi. ■

Méthode : Pour montrer qu'une fonction f est DSE sur $]-r,r[$ et donner son DSE, on peut :

- trouver la suite a_n telle que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence R avec $R \geqslant r$ et telle que

  $$\forall \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

  cette série entière est nécessairement la série de Taylor, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
  Attention : on ne peut pas simplement calculer la série de Taylor puis regarder le rayon de convergence de cette série (contre-exemple : $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$.
  Il faut vérifier que pour $x \in]-r,r[$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge vers $f(x)$ (il faut donc prouver la convergence simple et la valeur de la somme).
  Cela est rarement possible (sauf pour la série géométrique pour laquelle on a la valeur de la somme). Une des seules méthodes directes et d'évaluer la différence entre la somme finie et la valeur de $f(x)$ en utilisant Taylor avec reste intégral.
- utiliser des résultats de somme / produit / dérivation / primitives.
  La difficulté vient souvent du produit : on peut montrer que f est DSE en l'écrivant comme un produit de fonctions DSE, mais cela ne permet pas de calculer effectivement le DSE (le produit de Cauchy est trop difficile à manier).
- une autre méthode explicitement au programme est la suivante : utiliser une équation différentielle vérifiée par la fonction.

Si f est DSE sur $]-R,R[$, alors on peut facilement, vérifier que $x \mapsto f(x^2)$ est DSE : il suffit d'écrire :

$$\text{On a : } \forall x \in]-R,R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ donc } \forall x \in]-\sqrt{R},\sqrt{R}[,\ f(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$$

Idem pour $x \mapsto f(x^3)$. Par contre, on a pas de résultat sur $x \mapsto f(x+1)$, car la relation :

$$\forall x \in]-R+1,R-1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+1)^n \text{ n'est pas une série entière !}$$

Idem pour $x \mapsto f(\sqrt{x})$.
L'autre résultat est le suivant : si f est DSE sur $]-R,R[$, alors pour $\alpha > 0$ $x \mapsto f(\alpha x)$ est DSE sur $]-\frac{R}{\alpha},\frac{R}{\alpha}[$. Ici encore, il suffit d'écrire :

$$\text{On a : } \forall x \in]-R,R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ donc } \forall x \in]-\frac{R}{\alpha},\frac{R}{\alpha}[,\ f(\alpha x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n x^n$$

La même technique permet de montrer que si f est DSE sur $]-R,R[$, alors

$x \longmapsto f(-x)$ est aussi DSE sur $]-R,R[$:

$$\text{On a : } \forall x \in]-R,R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ donc } \forall x \in]-R,R[,,\ f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-1)^n x^n$$

■ **Exemple III.3** Montrons que les fonctions $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto \arccos x$ sont DSE sur $]-1,1[$.

On va voir que $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}}$ est DSE sur $]-1,1[$. On écrit donc :

$$\forall u \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1+u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$$

En remplaçant u par $-x^2$, et en vérifiant que $x \in]-1,1[\Longrightarrow (-x^2) \in]-1,1[$ on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-1)^n x^{2n}$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est DSE sur $]-1,1[$ donc ses primitives aussi. Ainsi : $x \mapsto \arcsin(x)$ est DSE.

On intègre pour trouver le DSE :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin(x) = \cancel{\arcsin(0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\arccos(x) = \arccos(0) - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{2n+1} x^{2n+1}$$

■

III.2 Développements en série entière des fonctions usuelles

Il faut connaître les DSE et le rayon de convergence. Les premiers termes correspondent au développements limités.

✯ Série géométrique

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ puisqu'en étudiant la convergence des sommes partielles, on a obtenu :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Remarquons que cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus 1$ et DSE que sur $]-1,1[$.

On en déduit aussi que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ est DSE sur $]-1,1[$ avec :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

On obtient ainsi, les égalités suivantes en dérivant la série géométrique pour $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$
$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$
$$\frac{6}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

✯ Logarithme

On a vu que l'on peut intégrer un DSE, on obtient alors que $x \longmapsto \ln(1+x)$ est DSE sur $]-1,1[$, avec :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

On peut éventuellement remplacer x par $-x$ pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

✯ Arctangente

On repart de la série géométrique de raison $-x^2$:

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

On en déduit que $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est DSE sur $]-1,1[$, et donc sa primitive $x \longmapsto \arctan(x)$ est aussi DSE sur $]-1,1[$. On obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

R La fonction arctangente est donc définie sur $\mathbb{R}$ mais DSE seulement sur $]-1,1[$.

Méthode : Pour montrer qu'une fonction est DSE et calculer son DSE, on peut regarder sa dérivée. Si on arrive à écrire sa dérivée comme une série entière de rayon non nul, il suffit d'intégrer. Attention à ne pas oublier le premier terme.

✯ **Exponentielle, cosinus et sinus hyperbolique**

Pour l'exponentielle, on utilise Taylor avec reste intégral.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

On fixe donc $x \in \mathbb{R}$, et on montre que le reste tend vers 0 lorsque n tend n vers $+\infty$. On sépare les cas $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$, pour intégrer dans le sens naturel.

Soit donc $x \in \mathbb{R}_*^+$, on a alors :

$$\begin{aligned}\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \\ &\leqslant e^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = e^x \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x \\ &\leqslant e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} dt \to 0\end{aligned}$$

Ainsi la série à $x > 0$ fixé $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x.

On traite aussi le cas où $x < 0$ (il faut faire attention à l'ordre des bornes de l'intégrale) :

$$\begin{aligned}\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| = \left| \int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \\ &\leqslant \frac{1}{n!} \int_x^0 (t-x)^n dt = \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^0 \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)!} (-x)^{n+1} \to 0\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ainsi, $x \longmapsto e^x$ est DSE sur $\mathbb{R}$ et on a la valeur du DSE.

Méthode :pour montrer qu'une fonction est DSE, on peut utiiser la formule de Taylor avec reste intégral : on fixe $x \in]-r, r[$ et on fait tendre n vers $+\infty$.

On montre alors, par majoration, que le reste tend vers 0 (lorsque n tends vers $+\infty$). On en déduit que la série de Taylor converge simplement vers $f(x)$.

En utilisant la linéarité, on en déduit : que

$$x \longmapsto \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ est DSE sur } \mathbb{R}$$

avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

En effet, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x) =& \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)\\ =& \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+(-1)^n\right)\frac{x^n}{n!}\\ =& \sum_{\substack{n=0\\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\\ =& \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

De même :

$$x \longmapsto \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ est DSE sur } \mathbb{R}$$

avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

✯ Cosinus et sinus

On peut montrer que les fonctions cosinus et sinus sont DSE sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On peut procéder de plusieurs manières :

- par la formule de Taylor avec reste intégrale.
- en utilisant le DSE de $x \longmapsto e^{ix}$ et en prenant la partie réelle et imaginaire.
- en utilisant une équation différentielle.

Pour la formule de Taylor, on fixe $x \in \mathbb{R}$, et on écrit le reste à l'ordre n de la formule de Taylor :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)dt$$

Pour $x \geqslant 0$, on écrit alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)dt\right| &\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\left|\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|dt\\ &\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \to 0\end{aligned}$$

et pour $x \leqslant 0$:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)dt\right| &= \left|\int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!}\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)dt\right| \\ &\leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\left|\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|dt \\ &\leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}dt = \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \to 0\end{aligned}$$

Le reste tend donc vers 0, donc la série de Taylor converge vers la fonction. Ainsi, $x \mapsto \cos(x)$ est DSE sur $\mathbb{R}$.

L'autre méthode consiste à admettre la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{ix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

On a alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos(x) =& \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} i^k\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} i^k(-1)^k\frac{x^k}{k!}\right) \\ =& \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} i^k\frac{x^k}{k!} \\ =& \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$

La méthode avec les équation différentielles consiste à considérer la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$y'' + y = 0 \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0$$

Pour montrer que $x \mapsto \cos(x)$ est DSE sur $\mathbb{R}$, on considère la série entière : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$ dont le rayon de convergence est infini (par d'Alembert). Ainsi, on peut considérer la fonction :

$$g : x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

On dérive :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ g''(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{après chgt de variable}\end{aligned}$$

comme $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$, g est aussi solution du même problème de Cauchy donc g est la fonction cosinus, ce qui donne le résultat.

✯ Fonction puissance

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est DSE sur $]-1,1[$, avec :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha =& 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3\\ &+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots\\ =&1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\\ =&1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}x^n\end{aligned}$$

Avec la convention qu'un produit vide vaut 1, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}x^n\end{aligned}$$

Si α est un entier (et donc $(1+x)^\alpha$ est un polynôme donc son propre DSE), alors cette formule est celle du binôme de Newton.
Le terme : $\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}$ est l'équivalent de $\frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \binom{n}{\alpha}$,

Ici encore, on peut prouver ce résultat avec la formule de Taylor avec reste intégrale (en exercice).

Pour les cas $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$, on a des formules explicites avec le produit des nombres pairs et impairs (en exercice).

Démonstration. Une preuve simple consiste à utiliser une équation différentielle vérifiée par $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. On constate en effet que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha\frac{f(x)}{(1+x)}$$

d'où le fait que f est solution de l'équation différentielle linéaire (à coefficients non constants) :

$$(E) \qquad y' - \frac{\alpha}{1+x}y = 0$$

On admet que (E) admet une unique solution vérifiant $y(0) = 1$.
Ainsi, f est cette unique solution.
On considère maintenant la série entière :

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n z^n$$

On regarde le rayon de convergence de cette série en faisant le quotient de deux termes consécutifs (en valeur absolue) :

$$\begin{aligned}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} =& \frac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)|}{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)|}\frac{n!}{(n+1)!}\\ =& \frac{|\alpha-n|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\end{aligned}$$

d'où $R=1$. ainsi, la fonction :

$$g : x \longmapsto 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Or :

$$\forall x\in]-1,1[,\ g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

On calcule donc pour $x\in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x) =& \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}\\ &+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n}\\ &\text{(on sépare en deux sommes convergentes)}\\ =&\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!}x^{n}\\ &+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n}\\ &\text{chgt de variable dans la première somme}\\ =&\alpha+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\left((\alpha-n)+n\right)\\ =&\alpha\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right)\\ =&\alpha g(x)\end{aligned}$$

Ainsi, g est aussi solution de (E). De plus on a aussi $g(0)=1$. Donc $g=f$ ce qui s'écrit :

$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

■

■ **Exemple III.4** On peut par exemple appliquer avec $\alpha=\frac{1}{2}$ (en introduisant le produit des nombres pairs et impairs). ■

Méthode : Pour montrer qu'une fonction f est DSE, et calculer son DSE, on peut utiliser une équation différentielle.

Pour cela, on trouve un problème de Cauchy (ie une équation différentielle linéaire et une condition initiale) dont la fonction f est solution.

On considère alors la série de Taylor, notée g. On vérifie que g a un rayon de convergence non nul, et que g est aussi solution du même problème de Cauchy. Par unicité de la solution, on a $f = g$.

Parfois, on procède différemment :

- on montre que f est DSE comme un somme/ produit / dérivée / primitive, sur $]-r,r[$ avec $r > 0$
- on trouve les coefficients de la série entière, en remplaçant $f(x)$ par $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ on trouve alors une relation sur les coefficients (en utilisant l'unicité du DSE).
  REM : il est parfois plus facile de commencer par remarquer que f est paire (resp. impaire) et donc d'écrire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \text{ resp. } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

  On peut aussi regarder la valeur de a_0, a_1 pour vérification.
- On en déduit alors les coefficients (a_n), souvent en faisant une récurrence.
- On vérifie ensuite que le rayon de cette série entière est strictement positif (obligatoire) et égal à r.
- On a alors par unicité du problème de Cauchy :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

III.3 Extension au cas de la variable complexe

Dans le programme, il y a deux séries de la variable complexe à connaître : la série géométrique et la série exponentielle.

Définition III.3 Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit la série géométrique par $\sum z^n$.

Cette série entière a pour rayon de convergence 1 et on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(|z| < 1 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \right)$$

On peut donc formellement dériver la fonction de la variable complexe $z \longmapsto \frac{1}{1-z}$. Cette dérivée est formelle et n'est pas la limite du taux d'accroissement.

Définition III.4 Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit la série exponentielle par $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Cette série entière a pour rayon de convergence $+\infty$ et on pose :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

C'est en fait la définition de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ (puisque ce n'est pas la réciproque de la fonction logarithme). À partir de cette définition, on peut retrouver toutes les propriétés de l'exponentielle et des fonctions cosinus et sinus.

Il arrive souvent que l'on utilise ces DSEs sur $\mathbb{C}$ pour retrouver des DSEs de fonctions réelles (comme on l'a fait pour la fonction cosinus).

En utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières, on a :

Proposition III.4 On a :

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$$

Démonstration. On fixe $z \in \mathbb{C}$, et comme les deux séries sont absolument convergente, on peut utiliser le produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(z') &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} && \text{produit de Cauchy}\end{aligned}$$

Or pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} \\ &= \frac{(z+z')^n}{n!} && \text{par le binôme de Newton}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(z') &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} \\ &= \exp(z+z')\end{aligned}$$

■

Séries entières

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

⋆ Rayon de convergence

Exercice 1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n z^{2n}$ avec $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n^n}$.

Correction : Deux idées : le critère de d'Alembert ou Stirling.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{4}{e}$$

Ainsi, la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{e}{4}$.

On peut obtenir aussi le résultat par Stirling :

$$\begin{aligned}\frac{(2n)!}{n!n^n} &\underset{n\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \\ &\underset{n\infty}{\sim} 2^{2n}e^{-n}\sqrt{2} = \left(4e^{-1}\right)^n\sqrt{2}\end{aligned}$$

la série entière $\sum a_n z^n$ a donc le même rayon de convergence que $\sum \left(4e^{-1}\right)^n z^n$.

Pour la série lacunaire, on fixe $z \in \mathbb{C}$ et on travaille avec la série numérique $\sum a_n z^{2n}$ c'est la série $\sum u_n$ avec $u_n = a_n z^{2n}$.

Pour appliquer le critère de d'Alembert sur les séries numériques, on fait le quotient :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a_{n+1}||z|^{2n+2}}{|a_n||z|^{2n}} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z|^2 \to \frac{4}{e}|z|^2$$

Ainsi :

- si $|z| < \frac{\sqrt{e}}{2}$, la série numérique $\sum a_n z^{2n}$ converge (ie on a convergence simple de la série de fonctions). Ainsi, on a $R \geqslant \frac{\sqrt{e}}{2}$.
- si $|z| > \frac{\sqrt{e}}{2}$, la série numérique $\sum a_n z^{2n}$ diverge Ainsi, on a $R \leqslant \frac{\sqrt{e}}{2}$.

Au final $R = \frac{\sqrt{e}}{2}$.

⚠ Attention à ne pas écrire :

$$\sum a_n z^{2n} \text{ converge} \iff \frac{4}{e}|z|^2 < 1$$

ce qui est faux (on ne sait rien pour $\frac{4}{e}|z|^2 = 1$).

Exercice 2 Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :

1. $a_n = \dfrac{1}{\binom{3n}{2n}}$
2. $a_n = P(n)$ où $P \in \mathbb{R}_q[X]$
3. $a_n = \ln(n^2+n+1)$
4. $a_n = \dfrac{P(n)}{n!}$ où $P \in \mathbb{R}_q[X]$
5. $a_n = e^{\sqrt{1+n}}$
6. $a_n = \dfrac{\alpha^n}{1+\beta^n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$
7. $a_n = 3+\cos(n)$
8. $a_n = 3^n + i4^n$
9. $a_n = 1+n(-1)^n$
10. $a_{2n} = \alpha^n$ et $a_{2n+1} = \beta^n$ avec $0 < \beta < \alpha$

Correction : 1 : formule de stirling ou d'Alembert donne : $R = \frac{27}{4}$.

2 : on écrit $a_n = b_p n^p + \dots$ avec p le degré $p < d$ ainsi, $a_n \underset{n\infty}{\sim} b_p n^p$, et $\sum n^p z^n$ a pour rayon de convergence 1.

3 : $a_n \underset{n\infty}{\sim} 2\ln(n)$ et $\sum \ln(n) z^n$ a pour rayon de convergence 1.

4 : on écrit $a_n = \frac{1}{n!} b_p n^p + \dots$ avec p le degré $p < d$ ainsi, $a_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n!} n^p$ et $\sum \frac{1}{n!} n^p z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

5 : Par exemple avec le critère de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{e^{\sqrt{n+2}}}{e^{\sqrt{n+1}}} &= \exp\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) \\ &= \exp\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\right)\end{aligned}$$

On utilise les DLs :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}} &= \left(1 + \frac{1}{n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

ainsi :

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$$

et donc :

$$\lim_{n\infty} \frac{e^{\sqrt{n+2}}}{e^{\sqrt{n+1}}} = 1$$

Donc : $R = 1$.

6 : critère de d'Alembert :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |\alpha| \frac{1+\beta^n}{1+\beta^{n+1}} \underset{n\infty}{\sim} \begin{cases} |\alpha| \text{ si } \beta \leqslant 1 \\ \frac{|\alpha|}{\beta} \text{ si } \beta > 1 \end{cases}$$

(nb : traiter le cas $\beta = 1$ à part) et donc :

$$R = \begin{cases} \frac{1}{|\alpha|} \text{ si } \beta \leqslant 1 \\ \frac{\beta}{|\alpha|} \text{ si } \beta > 1 \end{cases}$$

7 : comparaison : $2 \leqslant a_n \leqslant 4$ d'où $R = 1$.

8 :On a :

$$|a_n| = \sqrt{3^{2n} + 4^{2n}} \underset{n\infty}{\sim} 4^n$$

donc le rayon est $\frac{1}{4}$.

9 :

$$a_n \underset{n\infty}{\sim} (-1)^n n \text{ donc } |a_n| \underset{n\infty}{\sim} n$$

et le rayon est 1.

10 :

Méthode conseillée : La suite $\left(a_k \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^k\right)$ ne tends pas vers 0 mais reste bornée puisque pour les termes pairs $k = 2n$, on constate que :

$$a_k = a_{2n} = \frac{\alpha^n}{\alpha^n} = 1$$

et pour les termes impairs $k = 2n+1$, on constate que :

$$a_k = a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \to 0$$

Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ est sur le cercle.

Intuition : On a pour $\rho \in \mathbb{R}^+$

$$\sum_k a_k \rho^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \rho^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n \rho^{2n+1} (*)$$

Pour qu'il y ait convergence il faut que $\alpha\rho^2 < 1$ et $\beta\rho^2 < 1$. La condition est donc :

$$\rho < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Attention : on ne peut écrire la relation $(*)$ que si les deux séries convergent.

Bonne rédaction : On considère $\rho < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, on a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \rho^{2n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n \rho^{2n+1}$ qui convergent donc on a $(*)$ et donc $\sum_k a_k \rho^k$ CV et donc $\rho < R$ ce qui donne : $R \geqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

On considère maintenant $\rho > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, on a alors pour un N très grand :

$$\sum_k^{2N} a_k \rho^k \geqslant \sum_{n=0}^{N} \left(\alpha\rho^2\right)^n \text{ en négligeant les termes impairs}$$

Et donc :

$$\lim_{n\infty} \sum_k^{2N} a_k \rho^k = +\infty$$

ce qui implique donc que $R \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Autre rédaction On constate que l'on peut écrire la série entière $\sum a_n z^n$ comme la somme de deux séries entières lacunaires :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} \alpha^n z^{2n} + \sum_{n\geqslant 0} \beta^n z^{2n+1}$$

Ici c'est la série entière formelle, sans problème de convergence. Le rayon est donc $\min\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$ car ces deux rayons sont différents.

Exercice 3 Soit (a_n) une suite telle que $\sum a_n$ est convergente.

1. Montrer que la suite (a_n) est bornée.
2. En déduire que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Correction : La suite (a_n) tends vers 0, donc la suite (a_n) est bornée.

On a $\frac{a_n}{n!} \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n!}\right)$. Donc la série entière $\sum \frac{a_n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 4 Calculs de rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$\sum a_n z^n$ où a_n est le nombre de diviseurs de l'entier n

$\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre de l'écriture décimale de π

$\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{65537}\right) z^n$

Correction : tout entier est divisible par 1 et par lui-même, donc $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant a_n \geqslant n$. La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1, donc de $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant a_n$. $R \leqslant 1$. La série entière $\sum nz^n$ a aussi pour rayon de convergence 1, donc de $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant n$. $R \geqslant 1$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_n \leqslant 9.$$

Ainsi, la suite $(a_n 1^n)$ est bornée et donc le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Supposons par l'absurde que le rayon de convergence R vérifie $R > 1$, alors la suite $(a_n) = (a_n 1^n)$ tends vers 0, et donc comme c'est une suite d'entiers, elle est nulle à partir d'un certain rang n_0. Ainsi, on aurait :

πs'écrirait en base 10 : $a_0, a_1 a_2 \dots a_{n_0-1}$

En particulier, le nombre π aurait une écriture décimale finie (ce serait un nombre décimal), donc $\pi \in \mathbb{Q}$, ce qui est une contradiction. Au final, $R = 1$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\cos\left(\frac{2n\pi}{65537}\right)\right| \leqslant 1$$

donc la suite $\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{65537}\right) 1^n\right)$ est bornée donc le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

La suite $\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{65537}\right) 1^n\right)$ ne converge pas vers 0, puisqu'elle est 65537 fois périodique et non nulle. donc la série :

$$\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{65537}\right) 1^n \text{ est grossièrement divergente}$$

Ainsi, $R \leqslant 1$. Au final, $R = 1$.

Exercice 5 Soit (a_n) une suite de réels positifs, strictement décroissante qui converge vers 0.

On note $g : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. On suppose que la série numérique $(\sum a_n)$ diverge.
   (a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $(\sum a_n z^n)$?
   (b) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (c) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
   (d) Montrer que g est strictement croissante sur $[0,1[$.
   (e) Déterminer $\lim_{x\to 1} g(x)$.
2. On suppose que la série numérique $(\sum a_n)$ converge.
   (a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $(\sum a_n z^n)$?
   (b) Montrer que g est continue sur $[-1,1]$.
   (c) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
   (d) Montrer que g est strictement croissante sur $[0,1[$.
   (e) Déterminer $\lim_{x\to 1} g(x)$.
   (f) Montrer que si $(\sum n a_n)$ converge alors g est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$.
   (g) Montrer que si $(\sum n a_n)$ diverge alors $\lim_{x\to 1} g'(x) = +\infty$.
   En déduire que dans ce cas g n'est pas dérivable en 1.

Correction :

1. (a) Il est égal à 1 car $(\sum a_n)$ diverge mais (a_n) est bornée.
   (b) g est définie sur $]-1,1[$ mais aussi en -1, par le thm spécial des séries alternées.
   (c) C'est du cours.
   (d) **REM :** pour la croissance large, c'est une limite simple de fonctions croissante. Il y a donc juste un problème pour la stricte croissance.
   REM : comme (a_n) est strictement décroissante et de limite nulle, elle est strictement positive.
   Il suffit d'écrire : $\forall x \in [0,1],\ g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} > 0$.
   (e) Comme g est croissante, elle peut être majorée ou tendre vers $+\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}^+$, alors on peut trouver N tq : $\sum_{n=0}^{N} a_n \geqslant M+1$. De plus, par continuité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, on peut trouver $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \ \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} a_n - 1$$

pour un $x = \frac{1-\alpha}{2}$, on a alors :

$$\begin{aligned} g(x) &> \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \\ &> \sum_{n=0}^{N} a_n - 1 > M \end{aligned}$$

Ainsi g n'est pas bornée et tend donc vers $+\infty$.

2. (a) La rayon est au moins 1.
   (b) g est continue sur $]-1,1[$. On note $g_n : x \mapsto a_n x^n$ Pour $x \in [-1,1]$, on a $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]} \leqslant a_n$ et $\sum a_n$ converge. Il y a donc convergence normale sur $[-1,1]$, donc continuité par convergence uniforme.
   (c) C'est du cours.
   (d) idem que partie précédente.
   (e) Thm de continuité puisqu'il y a convergence normale donc uniforme sur $[-1,1]$: $\lim_{x\to 1} g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
   (f) Supposons $(\sum n a_n)$ converge, on a $g_n' : x \longmapsto n a_n x^{n-1}$ qui converge normalement sur $[-1,1]$, donc g est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$.
   (g) Considérons $M \in \mathbb{R}$.

   On prend N tel que $\sum_{n=1}^{N} n a_n > M+1$, puisque cette série diverge, elle tend vers $+\infty$

   La fonction $x \longmapsto \sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1}$ étant continue, il existe $\alpha > 0$, tel que :

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \left| \sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} a_n \right| \leqslant 1$$

   On pose donc $x = 1 - \frac{\alpha}{2}$, on a bien $x \in [0,1[$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ &> \sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1} \\ &> \sum_{n=1}^{N} n a_n - 1 > (M+1) - 1 = M \end{aligned}$$

   Ainsi, g' n'est pas bornée.
   Comme c'est une fonction croissante sur $[0,1[$, on peut en déduire que $\lim_{x\to 1} g'(x) = +\infty$.
   On utilise ensuite le thm sur la limite de la dérivée :
   - On a g est dérivable sur $[0,1[$
   - g est continue sur $[0,1]$.
   - $\lim_{x\to 1} g'(x) = +\infty$

   On peut donc donner la limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = +\infty$$

   On a donc une tangente verticale en 1.

Exercice 6 On pose pour $n > 0$, $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$.
2. Prouver qu'il y a convergence en tout point du cercle d'incertitude.

Correction

1. Classiquement, on utilise le critère de d'Alembert :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}$$

On sait :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} &\underset{n\infty}{\sim} \sqrt{n} \\ \ln(n+1) &\underset{n\infty}{\sim} \ln(n) \qquad \text{à refaire rapidement à la main} \\ n^2+1 &\underset{n\infty}{\sim} (n+1)^2+1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, la série a pour rayon de convergence 1.
Ou sinon :

$$a_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

et :

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

les séries entières $\left(\sum \frac{1}{\sqrt{n}} z^n\right)$ et $\left(\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} z^n\right)$ ont pour rayon 1 donc :

$$\left(\sum \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} z^n\right) \text{ et donc } \left(\sum a_n z^n\right) \text{ ont pour rayon 1}$$

2. Soit z un complexe de module 1. On regarde la série :

$$\sum a_n z^n \text{ ie } \sum \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1} z^n.$$

Comme c'est une série à termes complexes, la première idée est de montrer la convergence absolue. On a :

$$\sum |a_n z^n| = \sum \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1} \qquad \text{puisque } |z| = 1.$$

on voit que $\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}$ tends vers 0, on étudie la vitesse, cela tends vers 0 moins vite que $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, mais plus vite que : $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}$ pour toute valeur de $\varepsilon > 0$.
On peut par exemple faire :

$$n^{\frac{5}{4}} \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1} \underset{n\infty}{\sim} n^{-\frac{1}{4}} \ln(n) \to 0$$

On peut donc écrire :

$$n^{\frac{5}{4}} \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1} \underset{n\infty}{=} o\left(n^{\frac{5}{4}}\right)$$

Or la série : $\sum n^{\frac{5}{4}}$ converge (série de Riemmann avec $\alpha > 1$). On en déduit d'après la règle de comparaison des séries à termes positifs, que :

$$\sum \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1} \text{ converge et donc } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente.}$$

Comme z est quelconque sur le cercle unité, la série entière converge en tout point du cercle d'incertitude.

Exercice 7 Soit (a_n) une suite de réels tels que la série entière : $(\sum a_n z^n)$ ait pour rayon de convergence 1.

On pose :

$$S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad \text{et } f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

Soit R le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.

1. En utilisant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = S_n - S_{n-1}$, montrer que si $|x| < R$, la série $\sum a_n x^n$ converge.
2. Montrer que si $|x| < 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S_n x^n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||x|^k$$

En déduire que $R = 1$.

3. Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = (1-x)f(x)$$

Correction :

1. On a $\sum S_n x^n$ cv et $\sum S_{n-1} x^n$ cv, donc $\sum a_n x^n$ converge. Cela prouve que $R \leqslant 1$.
2. On a :

$$|S_n x^n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||x|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||x|^k$$

Comme $\sum a_n x^n$ converge, cela donne que $(S_n x^n)$ est bornée, donc $R \geqslant 1$. Au final $R = 1$.

3. On a :

$$\begin{aligned}(1-x)f(x) &= S_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (S_k - S_{k-1}) x^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k = S(x).\end{aligned}$$

✯ Calculs de sommes de séries entières

Exercice 8 Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum n^2 x^n$ puis calculer sa somme.

Correction : dans le cours, on sait que la rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est 1, de plus les séries $\sum n^2 x^n$ et $\sum x^n$ ont le même rayon de convergence.

Ainsi, le rayon de convergence de $\sum n^2 x^n$ est 1.

On applique ensuite le théorème de dérivation terme à terme (deux fois).

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n \geqslant 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n \geqslant 2} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Il reste à fait :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n\geqslant 1} n^2 x^n = \sum_{n\geqslant 1} n(n-1)x^n + \sum_{n\geqslant 1} nx^n \quad \text{car ces deux séries convergent}$$
$$= x^2 \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$$
$$= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{x}{(1-x)^3}(2x+(1-x)) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Exercice 9 Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{2n}{(2n+1)!}x^n$ puis calculer sa somme.

Indication : $\frac{2n}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}$

Correction : Pour le rayon c'est assez simple : on utilise le critère de d'Alembert.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2n+2}{2n}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{1}{(2n)(2n+3)} \to 0$$

Ainsi, $R = +\infty$.

Pour la valeur, on utilise une série téléscopique, soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}\right)x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^n$$

En effet, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^n$ sont convergentes.

⚠ Cette écriture doit être justifiée : on a $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n + \sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ que si les deux sommes du membre de droite convergent, le membre de droite existe alors. Par contre, $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)$ peut exister alors que ni $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ ni $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ n'existent.

On souhaite ensuite faire apparaître les séries du cosinus / sinus hyperbolique ou trigonométrique.

On a pour $x > 0$:

$$x^n = \left(\sqrt{x}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}$$

On peut donc écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n} - \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}$$
$$= \operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\left(\sqrt{x}\right)$$

pour $x < 0$, c'est :

$$x^n = (-1)^n\left(\sqrt{-x}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{-x}}(-1)^n\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}$$

Ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n\left(\sqrt{-x}\right)^{2n} - \frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}$$
$$= \cos\left(\sqrt{-x}\right) - \frac{1}{\sqrt{-x}}\sin\left(\sqrt{-x}\right)$$

Pour $x = 0$, le résultat est 0.

On a donc l'expression de la somme pour $x = 0$, $x > 0$ et $x < 0$.

Exercice 10

1. Vérifier que :

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

2. Montrer que pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$$

3. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+1}}$

Correction :

1. Simple calcul, c'est l'occasion de revoir la division euclidienne des polynôme, en écrivant :

$$1+X^3=(1+X)(X^2-X+1)$$

ainsi que la forme canonique des polynômes :

$$X^2-X+1=\left(X-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

2. On part de :

$$\forall t\in]-1,1[,\qquad \frac{1}{1+t^3}=\sum_n(-1)^n t^{3n}$$

cette série entière ayant un rayon de convergence de 1.
Pour $x\in]-1,1[$, on intègre sur $[0,x]$ (ou plutôt on prends la primitive qui s'annule en 0) :

$$\forall x\in]-1,1[,\qquad \int_0^x\frac{dt}{1+t^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$$

(on est bien dans l'intervalle de convergence).

3. En appliquant ce qui précède à $x=\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{1+t^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)}2^{3n+1}$$

Il reste à calculer cette intégrale, ce qui se fait avec la question 1 :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+t}dt-\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt$$

Le premier terme s'intègre en $\ln(1+x)$, le deuxième en $\ln(x^2-x+1)$ et le dernier en une arctangente :

$$\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$$

S'intègre en $\arctan\left(t-\frac{1}{2}\right)$
Au final :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{1+t^3}&=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\&=\frac{1}{6}\ln(3)+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\end{aligned}$$

✯ Développement en série entière d'une fonction

Exercice 11 Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière. Donner ce développement et la valeur du rayon :

$$x \longmapsto \sin^2 x \cos x$$
$$x \longmapsto (\cos x)e^x$$
$$x \longmapsto \ln\left(1+x+x^2\right)$$

Correction : Pour le premier, c'est un produit de fonction DSE sur $\mathbb{R}$, donc DSE sur $\mathbb{R}$. Pour avoir le développement, on constate que le produit de Cauchy n'est pas très pratique.

On utilise alors la linéarité (par Euler) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2 x \cos x = \frac{1}{4}(\cos x - \cos 3x)$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2 x \cos x = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(1-3^{2n})x^{2n}$$

Pour le deuxième, c'est aussi un produit de fonction DSE sur $\mathbb{R}$ donc DSE sur $\mathbb{R}$. Ici encore, le produit de Cauchy n'est pas très pratique.

On utilise donc le DSE de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$:

$$e^{(1+i)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}x^n$$

et donc :

$$\cos(x)e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Re\left((1+i)^n\right)}{n!}$$

Pour avoir la partie réelle de $(1+i)^n$, on passe par la forme trigonométrique :

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

et donc :

$$Re\left((1+i)^n\right) = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x)e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n!}x^n$$

Pour le dernier, on écrit :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x+x^2) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$$

$x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \ln(1-x^3)$ sont DSE (pour la dernière bien vérifier que $x \in]-1,1[\implies x^3 \in]-1,1[$ et donc :

$$\begin{aligned}\ln(1+x+x^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n\end{aligned}$$

avec $u_n = \frac{1}{n}$ si $n \equiv 1[3]$, ou si $n \equiv 2[3]$ et $u_n = \frac{-2}{n}$ si $n \equiv 0[3]$.

Une autre idée, par la dérivée :

$$f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2} = \frac{(1+2x)(1-x)}{1-x^3} = (1+x-2x^3)\frac{1}{1-x^3}$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{1-x^3}$ est DSE sur $]-1,1[$ (même argument que au-dessus en vérifiant bien que $x^3 \in]-1,1[$) et que $x \mapsto 1+x-2x^3$ est une fonction polynômiale, $x \mapsto f'(x)$ est DSE sur $]-1,1[$. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) &= (1+x-2x^3)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} + x^{3n+1} - 2x^{3n+2}\end{aligned}$$

en intégrant (attention à $f(0)=0$), on obtient le même résultat.

Exercice 12

1. Calculer la valeur de $\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+1+i} - \frac{1}{x+1-i}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$
2. Développer en série entière $x \longmapsto \arctan(1+x)$. Préciser le rayon de convergence.

Correction : On obtient en mettant sur le même dénominateur :

$$\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+1+i} - \frac{1}{x+1-i}\right) = \frac{1}{(x+1+i)(x+1-i)} = \frac{1}{2+2x+x^2}$$

On passe par la dérivée :

$$f : x \longmapsto \arctan(1+x) \text{ est dérivable et } f' : x \longmapsto \frac{1}{1+(1+x)^2} = \frac{1}{2+2x+x^2}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{i}{2(i+1)}\frac{1}{1+\frac{x}{1+i}} - \frac{i}{2(i-1)}\frac{1}{1+\frac{x}{1-i}}$$

On voit :

$$\left|\frac{x}{1+i}\right| \leqslant 1 \iff |x| \leqslant |1+i| = \sqrt{2} \text{ et de même : } \left|\frac{x}{1-i}\right| \leqslant 1 \iff |x| \leqslant \sqrt{2}$$

Les fonctions :

$$x \longmapsto \frac{1}{1+\frac{x}{1+i}} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \frac{1}{1+\frac{x}{1-i}}$$

sont donc DSE avec un rayon de $\sqrt{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[,\ f'(x) &= \frac{i}{2(i+1)}\frac{1}{1+\frac{x}{1+i}} - \frac{i}{2(i-1)}\frac{1}{1+\frac{x}{1-i}} \\ &= \frac{i}{2(i+1)}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{1+i}\right)^n - \frac{i}{2(i-1)}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{1-i}\right)^n \\ &= \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{1+i}^{n+1} - \frac{1}{1-i}\right)^{n+1} x^n\end{aligned}$$

Après il reste à calculer $\left(\frac{1}{1+i}^{n+1} - \frac{1}{1-i}\right)^{n+1}$. On passe par la forme trigonométrique :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+i}^{n+1} - \frac{1}{1-i}\right)^{n+1} &= \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\left(\exp\left(-i(n+1)\frac{\pi}{4}\right) - \exp\left(i(n+1)\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}(-2i)\sin\left((n+1)\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Au final :

$$\forall x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\left((n+1)\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} x^n$$

On intègre en ajoutant la constante $f(0) = \frac{\pi}{4}$, ce qui donne :

$$\forall x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[,\ \arctan(1+x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\left((n+1)\frac{\pi}{4}\right)}{(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} x^{n+1}$$

Plus clairement :

$$\forall x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[,\ \arctan(1+x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{n\left(\sqrt{2}\right)^{n}} x^n$$

⋆ Série entière et équations différentielles

R Explicitement au programme : *Les étudiants doivent savoir utiliser une équation différentielle linéaire pour développer une fonction en série entière.*

Exercice 13 Montrer que la fonction $f : x \longmapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ est DSE sur $\mathbb{R}$.

Déterminer son développement en série entière.

Indication : exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$

Correction : $x \mapsto e^x$ est DSE sur $\mathbb{R}$, donc en remplaçant x par x^2, on a $x \mapsto e^{x^2}$ est DSE sur $\mathbb{R}$. Donc $x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est DSE sur $\mathbb{R}$ car c'est une primitive (plus précisément, l'unique primitive qui s'annule en 0) de $t \mapsto e^{t^2}$.

La fonction f est donc DSE sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction DSE sur $\mathbb{R}$.

On calcule ensuite $f'(x)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= e^{x^2}\left(e^{-x^2} + 2x\int_0^x e^{-t^2} dt\right) && \text{forme } ue^v \\ &= 1 + 2xf(x) \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle linéaire : $y' - 2xy = 1$.

Plus précisément, c'est l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On cherche donc l'unique solution DSE de ce problème de Cauchy.

R Bien utiliser l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

On écrit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ et on cherche la suite } (a_n)$$

déjà $f(0) = 0$, donc $a_0 = 0$. Ensuite :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

ainsi :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)-2xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n\\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}x - 2a_{n+1}\right)x^n\end{aligned}$$

or on sait :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)-2xf(x)=1 \text{ et donc } a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}x-2a_{n-1}\right)x^n = 1$$

Par unicité du DSE, on obtient :

$$a_1 = 1 \qquad \forall n\geqslant 1,\ a_{n+1} = \frac{2}{n+1}a_{n-1}$$

Comme $a_0=0$, on a directement $a_2=0$, $a_4=0$, etc. (les termes pairs sont nuls ce qui normal car f est impaire.) Pour les impairs :

$$a_1=1,\quad a_3=\frac{2}{3},\quad a_5=\frac{2}{5}a_3=\frac{2^2}{3\times 5},\quad a_7=\frac{2}{7}a_5=\frac{2^3}{3\times 5\times 7}$$

On montre donc rapidement par récurrence, la formule :

$$a_{2p+1}=\frac{2^p}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2p-3)(2p+1)}=\frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}$$

Au final :

$$f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}.$$

Méthode par Taylor : Comme f est DSE, on sait que ce DSE est la série de Taylor :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

autrement dit, en utilisant les notations précédentes, que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

On se propose donc de calculer les dérivées sucessives en 0.
Pour cela, on part de l'équation différentielle :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2xf(x)+1$$

et on dérive plusieurs fois :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(2)}(x) &= 2xf'(x)+2f(x)\\ f^{(3)}(x) &= 2xf^{(2)}(x)+4f'(x)\\ f^{(4)}(x) &= 2xf^{(3)}(x)+6f^{(2)}(x)\\ f^{(5)}(x) &= 2xf^{(4)}(x)+8^{(3)}(x)\end{aligned}$$

on pose donc :

$$\mathscr{P}(n):\quad \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n+2)}(x)=2xf^{(n+1)}(x)+2(n+1)f^{(n)}(x)$$

On démontre la relation $\mathscr{P}(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ par récurrence sur n.

Pour $n=0$, cela provient de $f^{(2)}(x)=2xf'(x)+2f(x)$.

Considérons un n fixé, tel que : $\mathscr{P}(n)$ est vrai. On dérive alors $\mathscr{P}(n)$ pour obtenir :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n+3)}(x)=2xf^{(n+2)}(x)+2(n+2)f^{(n+2)}(x)$$

ce qui est bien l'hérédité.

On a donc bien :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n+2)}(x)=2xf^{(n+1)}(x)+2(n+1)f^{(n)}(x)$$

en remplaçant x par 0, on obtient :

$$\begin{aligned}&\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n+2)}(0)=+2(n+1)f^{(n)}(0)\\ &\text{ie :}\qquad (n+2)!a_{n+2}=2(n+1)n!a_n\end{aligned}$$

En simplifiant, cela donne :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)a_{n+2}=2a_n$$

C'est bien la relation obtenue à la première méthode.

NB : on n'est pas obligé d'utiliser une récurrence, on peut aussi utiliser la formule de Leibniz : on part de $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2xf(x)+1$ et on dérive n fois. La dérivée n-ième de f' et $f^{(n+1)}$. La dérivée n-ième de $x\longmapsto xf(x)=u(x)f(x)$ (avec $u:x\mapsto x$) se calcule avec Leibniz :

$$(uf)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}f^{(n-k)}=uf^{(n)}+nu'f^{(n-1)}$$ car les autres termes sont nuls.

Ainsi, la dérivée n-ième de $x\longmapsto xf(x)$ est :

$$x\longmapsto xf^{(n)}(x)+nf^{(n-1)}(x)$$

On en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x)=2xf^{(n)}+2nf^{(n-1)}(x)$$

On remplace ensuite x par 0 et on procède comme ci-dessus pour obtenir :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+1)!a_{n+1}=2n(n-1))!a_{n-1}$$

ou encore :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+1)a_{n+1}=2a_{n-1}$$

Exercice 14

1. Montrer que la fonction $f:x\longmapsto(\arcsin x)^2$ est la solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases}(1-x^2)y''-xy'=2\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$$

2. Montrer que f est développable en série entière et déterminer ce développement en série entière.

Correction :

1. C'est clair : f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et :

$$\begin{aligned}\forall x\in]-1,1[,\ f'(x)&=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)\\ f''(x)&=\frac{2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &=\frac{2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)+\frac{2}{1-x^2}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$(1-x^2)f''(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x) + 2 = xf'(x) + 2.$$

On vérifie de plus que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Ainsi, f est l'unique solution du problème de Cauchy proposé.

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est DSE de rayon 1, donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est aussi DSE de rayon 1. Par intégration la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est DSE de rayon 1. Ainsi, la fonction f est DSE sur $]-1,1[$, car c'est un produit de fonction DSE de rayon 1.
On sait donc qu'il existe une suite (a_n) telle que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

En utilisant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, on peut écrire :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$$

On dérive :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}(1-x^2)f''(x) - xf'(x) &= (1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n\right)x^n + a_2 + 6a_3 x\end{aligned}$$

Or on sait :

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$$

ce que l'on écrit :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n\right)x^n + 2a_2 + 6a_3 x = 2$$

Ainsi, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$ et :

$$\forall n \geqslant 2,\ a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n$$

Comme $a_1 = 0$ et $a_3 = 0$, on en déduit directement $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0$ ce que l'on pouvait savoir avant puisque f est paire.
On trouve aussi par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = \frac{2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p)!}$$

On vérifie que le rayon est 1 (par critère de d'Alembert), et on en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[,\ (\arcsin(x))^2 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2^{2p-1}\left((p-1)!\right)^2}{(2p)!} x^{2p}$$

Exercice 15

On note (E) l'équation différentielle : $x^2y''+x(x+1)y'-y=0$.

1. Chercher les solutions développables en série entière de (E).
2. Exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.

Correction :

1. On considère donc $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ un solution de (E) DSE sur $]-R,R[$ avec $R>0$. On a alors :

$$\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \qquad \text{premier terme nul}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^{n+2} \qquad \text{deux termes nuls.}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]-R,R[,\ x^2 f''(x) + x(x+1) f'(x) - f(x) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + x(x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(n(n-1)+n-1)}_{n^2-1} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2-1\right) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n \\
&= -a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(n^2-1\right) a_n + (n-1) a_{n-1}\right) x^n \\
&= -a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\left((n+1) a_n + a_{n-1}\right) x^n
\end{aligned}$$

Comme :

$$\forall x \in]-R,R[,\ x^2 f''(x) + x(x+1) f'(x) - f(x) = 0$$

On a par unicité du DSE :

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ (n+1)a_n + a_{n-1} = 0 \text{ ie } a_n = -\frac{1}{n+1} a_{n-1}$$

Ce qui donne : a_1 quelconque, $a_2 = -\frac{1}{3}a_1$, $a_3 = \frac{1}{4\times 3}a_1$, $a_4 = -\frac{1}{5\times 4\times 3}a_1$, par récurrence immédiate :

$$\forall n \geqslant 1,\ a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} 2a_1$$

On peut donc écrire :

$$\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = 2a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} x^n$$

Réciproquement, soit la série entière : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} x^n$ on voit que le rayon de cette série entière est infini (c'est l'argument à ajouter !)

on peut donc poser $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} x^n$ fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui d'après les calculs précédents (que l'on peut vérifier rapidement), est solution de (E).
En conséquence, toute fonction de la forme

$$x \longmapsto \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} x^n \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

est solution de (E).

2. Il s'agit de retrouver un développement en série entière usuel.
Il faut chercher à faire apparaître l'exponentiel :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} x^n \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} (-x)^{n+1} \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n = \frac{e^{-x} - 1 + x}{x}
\end{aligned}$$

On trouve ainsi :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^{-x}-1+x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

R Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ car DSE sur $\mathbb{R}$.

On obtient des solutions DSE de l'équation :

$$x \longmapsto \lambda \frac{e^{-x} - 1 + x}{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ prolongée par continuité par 0 en 0.}$$

R Il y a peut-être d'autres solutions qui ne sont pas DSE.

✯ Série entière de la variable complexe

Exercice 16 Calculer, lorsque cela est possible, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 z^n$$

Indication : on pourra commencer par calculer pour un z convenable, la somme de la série entière de la variable réelle $t : \sum z^n t^n$.

Correction : Le problème est que l'on ne peut pas dériver une série entière de la variable complexe.
On a facilement que pour $|z| < 1$ la série est absolument convergente et que pour $|z| \geqslant 1$, la série diverge grossièrement.
On ne peut pas dériver les fonctions de la variable complexe.
On fixe donc $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| < 1$, et on considère :

$$\varphi : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 t^n z^n$$

Il s'agit d'une série entière (en la variable t puisque z est fixé), de rayon $\frac{1}{|z|}$ Cette fonction est définie et dérivable sur $\left]\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[$.
Il faut trouver une expression de la fonction φ et remplacer t par 1.

Pour cela, on considère la fonction :

$$f : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n t^n = \frac{1}{1-tz}$$

de la même manière f est deux fois dérivable sur $\left]\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[$ comme la fonction de la variable réelle associée à une série entière.

On voudrait alors écrire que :

$$f' : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n t^{n-1} = \frac{z}{(1-tz)^2}$$
$$f'' : t \longmapsto \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) z^n t^{n-2} = \frac{2z^2}{(1-tz)^3}$$

Pour cela, il suffit de vérifier que si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, est dérivable et non nulle, alors :

$$\varphi : t \longmapsto \frac{1}{u(t)}$$

est une fonction dérivable de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avec $\varphi' : t \longmapsto -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$.

Il y a plusieurs possibilités :

- On peut retrouver le résultat en écrivant pour t_0 dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \frac{\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{u(t_0)}}{t_0 - t} &= \lim_{t\to t_0} \frac{u(t_0) - u(t)}{t_0 - t} \frac{1}{u(t)u(t_0)} \\ &= -u'(t_0) \frac{1}{(u(t_0))^2}\end{aligned}$$

- On peur écrire $u = u_r + iu_C$ et donc :

$$\varphi(t) = \frac{u_r(t)}{u_r^2(t) + u_c^2(t)} - i \frac{u_i(t)}{u_r^2(t) + u_c^2(t)}$$

Une fois ce résultat vérifié, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 t^n z^n &= t^2 f''(t) + t f'(t) \\ &= \frac{2z^2t^2}{(1-tz)^3} + \frac{zt}{(1-tz)^2} \\ &= \frac{2z^2t^2 + (1-tz)zt}{(1-tz)^3} \\ &= \frac{z^2t^2 + zt}{(1-tz)^3}\end{aligned}$$

Pour $t = 1$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 t^n z^n = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3}$$

✯ Exercices de concours

Exercice 17 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \dfrac{2\operatorname{sh} n}{n(n+1)}$

Correction : il suffit d'appliquer le critère de d'Alembert :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\operatorname{sh}(n+1)}{\operatorname{sh}(n)} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\operatorname{sh}(n+1)}{\operatorname{sh}(n)} \to e$$

Ainsi, le rayon de convergence est $\frac{1}{e}$.

Exercice 18 Soit (a_n) une suite de réels positifs décroissante de limite nulle.

On suppose que la série $\sum a_n$ diverge.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est 1.
2. On note f la somme de cette série entière. Établir que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

Correction :

1. Comme $\sum a_n$ diverge, on a $R \leqslant 1$, comme a_n est de limite nulle, on a $R \geqslant 1$.
2. Considérons $M \in \mathbb{R}$, comme la série $\sum a_n$ diverge, il existe un $N \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \geqslant M+1$$

Comme la fonction $x \longmapsto \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ est continue en 1, en utilisant la définition de la continuité avec $\varepsilon = 1$, on en déduit qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \ \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \geqslant M$$

On considère que $\alpha < 1$, comme tous les termes sont positifs, on a :

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \geqslant \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \geqslant M$$

On a donc bien $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

Exercice 19 Soit $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$.

Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} H_n x^n$.

Correction : il faut faire une comparaison série intégrale, pour obtenir :

$$H_n \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$$

on a donc : $\sum H_n$ diverge, mais si $r \in]0,1[$, $\lim_{n\infty} H_n r^n = 0$, donc $r \leqslant R$.

On en déduit que $R = 1$.

On a ensuite pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} H_n x^n &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^n \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{N} x^n \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} x^k \frac{1-x^{N-k+1}}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \left(x^k - x^{N+1}\right) \\
&= \frac{1}{1-x} \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{k} - x^{N+1} H_N \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \text{ car } H_N \underset{N\infty}{\sim} \ln(N) = \underset{N\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right)
\end{aligned}$$

On peut aussi faire avec un produit de Cauchy :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times 1$$

ainsi pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}1\times x^k\right) &= \left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{k}x^k+\ldots\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^k+\ldots\right)\\ &= x+\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots+H_kx^k+\ldots\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}H_kx^k\end{aligned}$$

Ce calcul est bien valable car les séries sont absolument convergente. On en déduit le résultat.

Exercice 20 **NB :** exercice utilisant les intégrales généralisées.

On considère la fonction :

$$F : x \longmapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\cos^2 t}dt$$

1. Soit $x \in]-1,1[$ et $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, montrer que pour tout entier $N \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1-x\cos^2 t} = \sum_{n=0}^{N-1}(x\cos^2 t)^n + x^N\frac{\cos^{2N}(t)}{1-x\cos^2 t}$$

2. En déduire que pour tout réel $x \in]-1,1[$, on a :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$$

où W_n est une intégrale que l'on déterminera.

3. Établir que pour tout $x \in]-1,1[$, $F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$.
Indication : poser $u = \tan t$.
4. Donner la valeur de W_n.

Correction :

1. Il suffit de regarder la somme finie géométrique de raison $x\cos^2(t) \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{N-1}(x\cos^2 t)^n = \frac{1-x^N\cos^{2N}(t)}{1-x\cos^2(t)}$$

2. On écrit pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-x\cos^2 t}dt\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos^2 t)^n dt + x^N\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2N}(t)}{1-x\cos^2 t}dt\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt\right)x^n + x^N\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2N}(t)}{1-x\cos^2 t}dt\end{aligned}$$

On pose donc $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt$, pour obtenir :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N-1}W_n x^n + x^N\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2N}(t)}{1-x\cos^2 t}dt$$

Il reste à vérifier que le reste tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. On majore :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2N}(t)}{1-x\cos^2 t}dt\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{|1-x\cos^2 t|}dt$$

Le majorant est une valeur finie qui ne dépend pas de N. Ainsi :

$$\left|x^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2N}(t)}{1-x\cos^2 t}dt\right| \leqslant |x|^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|1-x\cos^2 t|}dt \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

On peut donc affirmer que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} W_n x^n = F(x) \text{ c'est-à-dire } :\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = F(x)$$

3. On fait apparaître une forme connue puisque $1-x>0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x+u^2} &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{1-x}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{1-x}}\right)^2}\end{aligned}$$

On reconnaît alors la dérivée d'une arctangente :

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x+u^2}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{1-x}}\right)^2}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-x}}\right)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}\end{aligned}$$

4. On sait que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n \text{ avec } a_n = (-1)^n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)$$

en simplifiant, on trouve : $a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$.
Par unicité du DSE, on obtient :

$$W_n = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

Exercice 21 **Extrait de Centrale PSI 2019**

Dans tout le problème, on définit la famille de polynômes $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ L_k = X(X+1)\cdots(X+k-1) \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Soit α un réel. On note $f_\alpha : x \mapsto (1-x)^{-\alpha}$.

Q 1. Préciser le domaine de définition D de f_α. Justifier que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et donner une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f_α sur D.

Q 2. Énoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre et démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}.$$

Q 3. Rappeler la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et énoncer le théorème qui s'y rapporte.

Q 4. En déduire que, pour tout entier n et tous réels α et β,

$$L_n(\alpha+\beta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta).$$

Q 5. Pour $x\in]-1,1[$, donner la valeur de la somme de la série entière $\sum_{p=1}^{+\infty}x^p$ ainsi que celle de sa dérivée.

Q 6. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme $R_n\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\sum_{p=1}^{+\infty}p^n x^p=\frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

---

1. Il y a trois cas de figure à considérer :
   - si $\alpha\in\mathbb{Z}$, et $\alpha\leqslant 0$, alors f_α est une application polynomiale, donc $D=\mathbb{R}$; une application polynomiale est de classe C^1, donc f est de classe C^1 sur D ;
   - si $\alpha\in\mathbb{Z}$ et $\alpha>0$, alors f_α est l'inverse d'une application polynomiale, elle est donc définie sur $\mathbb{R}$ privé des réels où le dénominateur s'annule, c'est-à-dire : $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; une application polynomiale est de classe C^1, et l'inverse d'une application de classe C^1 est de classe C^1 là où elle ne s'annule pas, donc f est de classe C^1 sur D ;
   - si $\alpha\notin\mathbb{Z}$, alors $f_\alpha(x)=(1-x)^{-\alpha}$ n'est définie que pour $1-x>0$, donc : $D=]-\infty,1[$; l'application polynomiale $x\mapsto 1-x$ est de classe C^1 sur D et à valeurs dans $]0,+\infty[$, et la fonction puissance $x\mapsto x^\alpha$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, donc par composition f_α est de classe C^1 sur D.

   Dans tous les cas f_α est de classe C^1 sur D, et on a :

   $$\forall x\in D,\quad f'_\alpha(x)=\alpha(1-x)^{-\alpha-1},$$

   donc f_α est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

   $$\forall x\in D,\quad (1-x)y'(x)=\alpha y(x). \tag{E_α}$$

2. Nous énonçons le théorème de Cauchy dans le cas d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ; dans ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Soient $a,b,c:I\to K$ trois applications continues. *On suppose que a ne s'annule jamais sur I*. Soient $x_0\in I$ et $y_0\in K$. Le problème de Cauchy :

   $$\begin{cases}\forall x\in I,\quad a(x)y'(x)+b(x)y(x) &= c(x)\\ y(x_0) &= y_0\end{cases}$$

   admet exactement une solution définie sur I.

   Prenons $I=]-1,1[$; alors f_α est solution de (E_α) sur I et $x\mapsto 1-x$ ne s'annule pas sur cet intervalle. D'après le théorème de Cauchy linéaire, pour démontrer l'égalité :

   $$\forall x\in I,\quad f_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!},$$

   il suffit donc de démontrer que l'application $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$ est de classe C^1 sur I et solution du même problème de Cauchy : on invoque alors l'unicité de la solution à ce problème. Commençons donc par vérifier que cette somme de série entière est bien définie sur I, puis qu'elle est solution de (E_α) sur ce même intervalle. Si $\alpha\in\mathbb{Z}$ est un entier négatif, alors $L_n(\alpha)=0$ pour tout $n>-\alpha$, donc la somme est finie et définie sur $\mathbb{R}$. Supposons $\alpha\notin\mathbb{Z}$, de sorte que $L_n(\alpha)\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   Soit $x\in]-1,1[$. Si $x=0$ alors la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$ est triviale. Supposons $x\neq 0$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

   $$\frac{\left|L_{n+1}(\alpha)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}\right|}=\left|\frac{L_{n+1}(\alpha)}{L_n(\alpha)}\right|\times\frac{|x|}{n+1}=|\alpha+n|\frac{|x|}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}|x|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}|x|<1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 0} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$ converge absolument donc converge. Ainsi la somme $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$ est bien définie sur I. En fait, il s'agit même de son intervalle ouvert de convergence si α n'est pas un entier négatif, puisqu'il y a divergence grossière pour tout $|x|>1$ toujours d'après la règle de D'Alembert.

En tant que somme de série entière, l'application S est de classe C^1 sur son intervalle ouvert de convergence (qui contient I), et on la dérive terme à terme :

$$\forall x\in I,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha)n\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty} L_{n+1}(\alpha)\frac{x^n}{n!},$$

et comme on l'a déjà implicitement utilisé tantôt : $L_{n+1}=L_n\cdot(X+n)$, et pour tout $x\in I$ les séries $\sum_{n\geqslant 0} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 0} L_n(\alpha)n\frac{x^n}{n!}$ convergent (pour la seconde, cela provient du fait que multiplier par n le terme général d'une série entière ne change pas son rayon de convergence), donc :

$$\forall x\in I,\quad S'(x)=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)n\frac{x^n}{n!}=\alpha S(x)+x\sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha)n\frac{x^{n-1}}{n!}=\alpha S(x)+xS'(x).$$

On a donc bien : $\forall x\in I$, $(1-x)S'(x)=\alpha S(x)$, donc S vérifie (E_α) sur I.
De plus : $S(0)=L_0(\alpha)=1$, et $f_\alpha(0)=1$, donc f_α et S sont solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall x\in]-1,1[,\quad (1-x)y'(x)-\alpha y(x) &= 0\\ y(0) &= 1\end{cases}$$

Par unicité des solutions à un problème de Cauchy, on conclut : $f_\alpha=S$, ou encore :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}.$$

3. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_nz^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_nz^n$ sont deux séries entières à coefficients complexes, leur produit de Cauchy est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_nz^n$, où :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad c_n=\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}.$$

Le théorème de Cauchy nous dit que si $\sum_{n\geqslant 0} a_nz^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_nz^n$ sont respectivement de rayons de convergence R_a et R_b, alors le rayon de convergence R de leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} c_nz^n$ vérifie $R\geqslant\min(R_a,R_b)$, et pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<\min(R_a,R_b)$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_nz^n\times\sum_{n=0}^{+\infty} b_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty} c_nz^n.$$

4. D'après la question 2, on a :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f_{\alpha+\beta}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!}x^n. \tag{4.1}$$

Mais on a aussi :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f_{\alpha+\beta}(x)=(1-x)^{-\alpha-\beta}=(1-x)^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{n!}x^n\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(\beta)}{n!}x^n.$$

Nous avons là le produit de deux sommes de séries entières de rayon de convergence 1. D'après le théorème rappelé plus haut, on en déduit que leur produit de Cauchy est de rayon de convergence au moins 1, et on a :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{n!}x^n\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(\beta)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{L_k(\alpha)}{k!}\frac{L_{n-k}(\beta)}{(n-k)!}\right)x^n. \tag{4.2}$$

Donc, d'après (4.1) et (4.2), on a donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\alpha)}{k!} \frac{L_{n-k}(\beta)}{(n-k)!} \right) x^n.$$

Nous avons une égalité entre deux sommes de séries entières dans un voisinage de 0. Par unicité des coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\alpha)}{k!} \frac{L_{n-k}(\beta)}{(n-k)!},$$

et donc, après multiplication par $n!$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta).$$

5. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} x^p = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1,$$

et donc la dérivée de $x \mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} x^p$ a pour somme :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p x^{p-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

6. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit P_n la proposition :

$$\text{« } \exists R_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}. \text{ »}$$

Vérifions P_1 : d'après la question précédente, pour tout $x \in]-1,1[$ on a $\sum_{p=1}^{+\infty} p x^p = \frac{x}{(1-x)^2}$, donc on a P_1 en posant $R_1 = X \in \mathbb{R}_1[X]$.

Vérifions l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel qu'on ait P_n, c'est-à-dire :

$$\exists R_n \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

La série entière $\sum_{p \geqslant 1} p^n x^p$ est de rayon de convergence au moins 1, puisque par hypothèse de récurrence sa somme est définie pour tout $x \in]-1,1[$. Elle est donc dérivable sur $]-1,1[$, et on peut la dériver terme à terme ; on en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{p=1}^{+\infty} p^n \cdot p x^{p-1} = \frac{R_n'(x)}{(1-x)^{n+1}} + (n+1)\frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(1-x)R_n'(x) + (n+1)R_n(x)}{(1-x)^{n+2}}.$$

On multiplie l'égalité ci-dessus par x, et on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{p=1}^{+\infty} p^{n+1} x^p = \frac{(1-x)xR_n'(x) + (n+1)xR_n(x)}{(1-x)^{n+2}}.$$

d'où P_{n+1} en posant $R_{n+1} = (1-X)XR_n' + (n+1)XR_n$. Il est de degré inférieur ou égal à :

$$\max\left(\deg((1-X)XR_n'), \deg(XR_n)\right) = \max(1+\deg(R_n), 1+\deg(R_n)) \leqslant n+1,$$

comme voulu.

Nous avons montré l'initialisation et l'hérédité, donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: d'où l'existence du polynôme R_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in]-1,1[$, on ait :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Il reste à vérifier l'unicité de ce polynôme pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour cela, on note que si, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un autre polynôme noté S_n vérifiant la même relation, alors pour tout $x \in]-1,1[$ on a $\frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{S_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$, donc pour tout $x \in]-1,1[$: $R_n(x) = S_n(x)$. On en déduit que le polynôme $R_n - S_n$ a une infinité de racines (tous les réels de l'intervalle $]-1,1[$), ce qui n'est possible que si $R_n - S_n = 0$, c'est-à-dire : $R_n = S_n$. D'où l'unicité.

Calcul de DSE en utilisant des équations différentielles

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Le but de cet fiche est de proposer une méthode d'utilisation des équations différentielles pour calculer des développements en série entière.

On rappelle le programme :

Les étudiants doivent savoir utiliser une équation différentielle linéaire pour développer une fonction en série entière.

Pour cela, on va développer un exemple en découpant les différentes étapes.

On considère la fonction :

$$f : x \longmapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que la fonction f est DSE

La fonction f est le produit de deux fonctions :

$$u : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad v : x \longmapsto \arcsin(x)$$

On sait que la fonction :

$$x \longmapsto (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ est DSE sur }]-1,1[$$

On peut donc écrire :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \text{ pour une certaine suite } (a_k)$$

comme pour $x \in \mathbb{R}$, $x \in]-1,1,[\implies x^2 \in]-1,1[$, on peut donc remplacer x par x^2 dans l'écriture ci-dessus :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{2k}$$

ceci prouve que u est DSE sur $]-1,1[$. Par intégration, la fonction v est DSE sur $]-1,1[$.

Par produit on en déduit que f est DSE sur $]-1,1[$.

On pourrait calculer le DSE de f par produit de Cauchy, mais c'est difficile en pratique d'obtenir ainsi une expression explicite du DSE de f.

Déterminer un problème de Cauchy dont f est l'unique solution

La fonction f étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, on peut dériver :

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \arcsin(x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \arcsin(x)\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \left(1-x^2\right)^{-1} - x\arcsin(x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \left(1-x^2\right)^{-1} - xf(x)\left(1-x^2\right)^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f'(x) + f(x) = 1$$

En ajoutant la condition initiale $f(0) = 0$, on en déduit que f est l'unique solution du problème de Cauchy sur $]-1,1[$:

$$(1-x^2)y' - xy = 1 \qquad \text{avec} \qquad y(0) = 0$$

Utiliser l'écriture de f comme une série entière dans l'équation différentielle

Comme on a vu que f est DSE sur $]-1,1[$, on sait qu'il existe une suite (a_n) de réels, tels que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

il s'agit maintenant de déterminer cette suite.

On dérive :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad l_1$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad l_2$$

En faisant $(1-x^2)l_2 - xl_1$, on obtient :

$$1 = (1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Simplifions le membre de droite avec des changements de variables :

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n
\end{aligned}$$

On a posé :

1ère somme : $\begin{cases} m = n-1 \\ n = m+1 \\ n \text{ varie de } 1 \text{ à } +\infty \\ m \text{ varie de } 0 \text{ à } +\infty \end{cases}$ 2ème somme : $\begin{cases} m = n+1 \\ n = m-1 \\ n \text{ varie de } 1 \text{ à } +\infty \\ m \text{ varie de } 2 \text{ à } +\infty \end{cases}$ 3ème somme : $\begin{cases} m = n+1 \\ n = m-1 \\ n \text{ varie de } 0 \text{ à } +\infty \\ m \text{ varie de } 1 \text{ à } +\infty \end{cases}$

R Comme souvent, ne pas hésiter à poser ces changements de variables (changer le nom de la variable, etc.), c'est trop souvent source d'erreurs !

On peut donc écrire :

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}) x^n + a_1 + 2a_2 x - a_0 x$$

Utiliser l'unicité pour déterminer une relation sur les coefficients

On peut donc écrire :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}) x^n + a_1 + (2a_2 - a_0)x = 1$$

On utilise alors l'unicité du développement en série entière (sur l'intervalle $]-1,1[$ non réduit à un point) :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
2a_2 - a_0 &= 0 \\
\forall n \geqslant 2,\ (n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

Ne pas oublier non plus la condition initiale $a_0 = 0$.

Calculer les coefficients

On en déduit $a_2 = 0$, puis on utilise la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_{n-1}$$

pour obtenir que tous les termes pairs sont nuls.

R On aurait aussi pu remarquer que la fonction f est impaire.

On calcule :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_3 &= \frac{2}{3} \\ a_5 &= \frac{4\times 2}{5\times 3} \\ a_7 &= \frac{6\times 4\times 2}{7\times 5\times 3} \end{aligned}$$

on trouve alors une relation que l'on démontre rapidement par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1}$$

La récurrence se fait facilement à partir de la relation :

$$\forall p \geqslant 1,\ a_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} a_{2p+1} \text{ obtenu en ramplaçant } n \text{ par } 2p+2$$

(on ne détaille pas la récurrence ici, mais il n'y a pas de difficulté).

On doit donc calculer le produit des nombres pairs et celui des nombres impairs.

R Vous devez savoir faire rapidement ce calcul classique.

On obtient :

$$\begin{aligned} (2p)(2p-2)\dots 2 &= 2^p p! \\ (2p+1)(2p-1)\dots 1 &= (2p+1)! \frac{1}{(2p)(2p-2)\dots 2} = (2p+1)! \frac{1}{2^p p!} \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

NB : il faut vérifier que la propriétée est aussi vrai pour $p = 0$ (ie $a_1 = 1$).

Conclure

On en déduit le DSE de la fonction f :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

Étude de fonctions définies par une intégrale

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Dans cette fiche, on résume les méthodes pour étudier une fonction définie par une intégrale.

On veut étudier :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \end{array} \right.$$

✯ Définition

La première question à se poser est : « *Pourquoi cette fonction existe ?* », il faut alors refaire sa construction. Cela servira pour toutes les questions, en particulier la régularité, la dérivation, etc.

On commence donc par noter f la fonction intégrée :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{-t^2}}{t} \end{array} \right.$$

Cette fonction est clairement continue sur l'**intervalle** $\mathbb{R}_+^*$, le théorème fondamental assure donc l'existence d'une primitive F de la fonction f sur cet intervalle. On a alors :

$$\forall x > 0,\ \phi(x) = F(x^2) - F(x)$$

La fonction ϕ s'écrit donc comme la somme de $x \mapsto F(x)$ et $x \mapsto F(x^2)$.
On a bien l'existence de la première sur $\mathbb{R}_+^*$, pour la deuxième, on a :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 & & \\ & & y & \longmapsto & F(y) \\ x & & \longmapsto & & F\left(x^2\right) \end{array}$$

Ainsi, $x \mapsto F(x^2)$ existe sur $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction ϕ existe bien sur cet intervalle.

La fonction ϕ est donc une fonction implicite définie à partir de F qui elle même est une fonction dont on n'a pas l'expression explicite. On sait simplement que F est la primitive de f.

✯ Étude de f

Avant d'étudier ϕ, il est parfois utile d'étudier brièvement f sur $\mathbb{R}_+^*$.
On obtient facilement les points suivants :

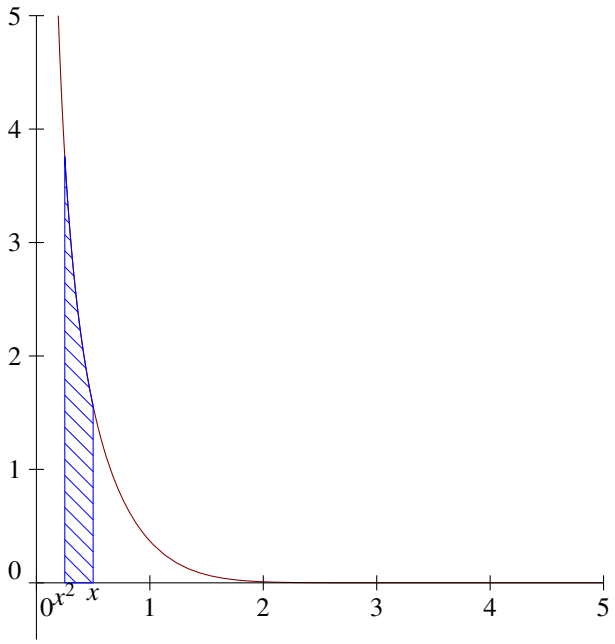
- f est décroissante comme produit de fonctions positives et décroissantes (on peut aussi dériver)
- $f \underset{t=0}{\sim} \frac{1}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$,
- $f \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t^2}\right)$, ($f$ tends très vite vers 0).

D'où le tableau de variation.

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de $f(t)$	$+\infty$ ↘ 0

On peut aussi faire un dessin de f, en représentant l'aire entre x et x^2, pour avoir une idée de la fonction ϕ. On remarque que l'on intègre sur un segment de longueur $x^2 - x = x(x-1)$:

- lorsque $x \to 0$, la longueur est proche de x, on intègre donc une fonction qui tends vers $+\infty$ en 0, avec $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$ sur un petit intervalle de longueur x.
- lorsque $x \to +\infty$, la longueur est proche de x^2, on intègre donc une fonction qui tends vers 0 rapidement sur un grand intervalle de longueur x^2.



✯ Sens d'intégration et signe

Si $x > 1$ on aura $x < x^2$, et donc on intégrera *dans le sens naturel*. au contraire si $x < 1$, on a $x^2 < x$. En particulier, f étant positive, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \phi(x) \text{ est } \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 1 \\ = 0 & \text{si } x = 1 \\ < 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

! On ne peut intégrer des inégalités que dans le cas où on intègre dans *le sens naturel*.

✯ Régularité, dérivation

Cette étude du processus de construction de ϕ permets de résoudre le problème de la régularité ainsi que de dériver. On a en effet : $\phi(x) = F(x^2) - F(x)$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$, donc la fonction F est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Le schéma de composition précédent assure alors que la fonction ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

On peut de plus dériver :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \qquad \phi(x) &= F(x^2) - F(x) \\ \text{donc } \forall x > 0, \qquad \phi'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) \\ &= 2x\frac{e^{-x^4}}{x^2} - \frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{1}{x}\left(e^{\ln 2 - x^4} - e^{-x^2}\right) \end{aligned}$$

✯ Variations

D'où

$$\begin{aligned} \phi'(x) > 0 &\iff \ln 2 - x^4 > -x^2 \\ &\iff x^4 - x^2 - \ln 2 < 0 \end{aligned}$$

Le polynôme $X^2 - X - \ln 2$ est un polynôme du second degré dont les racines sont :

$$\left\{ \frac{1-\sqrt{1+4\ln 2}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4\ln 2}}{2} \right\}.$$

La seule racine positive est $\frac{1+\sqrt{1+4\ln 2}}{2}$, on la note α.

Comme on cherche le signe de $\phi'(x)$ pour $x>0$, on obtient :

$$\phi'(x)>0 \iff x\in]0,\sqrt{\alpha}[$$

D'où le tableau de variation :

x	0		1		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
Signe de $\phi' x)$	‖	$+$	2	$+$	0	$-$	
Variation de $\phi(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\phi(\sqrt{\alpha})$	↘	0

✯ Limites

Pour calculer les limites on dispose de deux techniques.

La première consiste à utiliser une majoration globale sur l'intervalle. On trouve donc deux fonctions f_1 et f_2, telle que

$$\forall t\in[x,x^2], f_1(t)\leqslant f(t)\leqslant f_2(t)$$

et donc :

$$\int_x^{x^2} f_1(t)dt\leqslant\phi(x)\leqslant\int_x^{x^2} f_2(t)dt,$$

cela est utile si on connaît la primitive de f_1 et f_2.

La seconde consiste à encadrer l'intégrale par des rectangles, ce qui revient à la technique 1, en utilisant des constante pour l'encadrement.

R Il faut se repérer sur le dessin pour voir si la technique des rectangles va être suffisante.
Il faut toujours intégrer les inégalités dans le sens naturel !

Au voisinage de 0 **:** avec $x<1$ et donc $x^2<x$ on a :

$$\forall t\in[x^2,x],\qquad \frac{e^{-x^2}}{t}\leqslant\frac{e^{-t^2}}{t}\leqslant\frac{e^{-x^4}}{t}.$$

Ici on utilise la première technique car on connaît des primitives des deux fonctions encadrantes.

On intègre donc entre x^2 et x (dans le sens naturel), pour obtenir :

$$e^{-x^2}\int_{x^2}^{x}\frac{dt}{t}\leqslant\int_{x^2}^{x}\frac{e^{-t^2}}{t}dt\leqslant e^{-x^4}\int_{x^2}^{x}\frac{dt}{t}$$
$$e^{-x^2}\underbrace{\left(\ln(x)-\ln(x^2)\right)}_{-\ln(x)}\leqslant-\phi(x)\leqslant e^{-x^4}\left(\ln(x)-\ln(x^2)\right)$$

et donc $\quad\forall x<1,\ e^{-x^4}\ln(x)\leqslant\phi(x)\leqslant e^{-x^2}\ln(x).$

On obtient : $\lim\limits_{x\to0^+}\phi(x)=-\infty$.

Au voisinage de $+\infty$: pour $x>1$, et donc $x<x^2$ on a :

$$\forall t\in[x,x^2],\qquad 0\leqslant\frac{e^{-t^2}}{t}\leqslant\frac{e^{-x^2}}{x}.$$

Ici on utilise les rectangles, car sur le dessin cela semble suffisant.

On intègre entre x et x^2, pour obtenir :

$$\forall x>1,\ 0\leqslant\phi(x)\leqslant\frac{e^{-x}}{x}(x^2-x)=e^{-x}(x-1)$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=0$.

⋆ Équivalent, développements limités

On peut obtenir des estimations en utilisant des encadrements. Par exemple de

$$\forall x<1,\ e^{-x^4}\ln(x)\leqslant\phi(x)\leqslant e^{-x^2}\ln(x).$$

on peut déduire : $\phi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\ln(x)$.

On peut aussi utiliser le théorème d'intégration des développements limités : si $f(t)$ s'écrit :

$$f(t)\underset{t\to 0}{=}a+bt+ct^2+dt^3+o(t^3)$$

alors une primitive F de f s'écrit :

$$F(x)\underset{x\to 0}{=}F(0)+ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{4}x^4+o(x^4)$$

On en déduit alors le développement limité de ϕ.

Ici, on ne peut pas appliquer directement cette technique sur cet exemple en 0, car f n'admets pas de *DL* en 0.

Enfin, on peut utiliser l'intégration par parties ou les changements de variables pour obtenir des estimations.

Exercice 1 On a :

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ \phi(x)-\ln(x)&=\int_x^{x^2}\frac{e^{-t^2}}{t}dt-\int_x^{x^2}\frac{1}{t}dt\\&=\int_x^{x^2}\frac{e^{-t^2}-1}{t}dt.\end{aligned}$$

Écrire un DL en 0 de $g:t\mapsto\dfrac{e^{-t}-1}{t}$ en déduire un DL d'une primitive G de g, puis un *DL* de $\phi(x)-\ln(x)$ en 0.

Correction : On part du DL de $e^u\underset{t\to 0}{=}1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$, cela donne :

$$\begin{aligned}e^{-t^2}&\underset{t\to 0}{=}1-t^2+\frac{t^4}{2}+o(t^4)\\g(t)=\frac{e^{-t^2}-1}{t}&\underset{t\to 0}{=}-t+\frac{t^3}{2}+o(t^3)\end{aligned}$$

On intègre et on compose :

$$\begin{aligned}G(x)&\underset{x\to 0}{=}G(0)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\\G(x^2)&\underset{x\to 0}{=}G(0)-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\end{aligned}$$

au final :

$$\phi(x)-\ln(x)=G(x^2)-G(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{x^2}{2}-\frac{5}{8}x^4+o(x^4)$$

On a obtenu :

$$\phi(x)\underset{x\to 0}{=}\ln(x)+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{8}x^4+o(x^4)$$

Exercice 2 Étudier la fonction φ définie par :

$$\varphi:x\longmapsto\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$$

Correction : La fonction φ est donc définie implicitement : c'est l'aire algébrique située sous la courbe de la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{\ln(t)}$ pour $t \in [x, x^2]$.

Pour trouver son ensemble de définition, on doit intégrer la fonction f sur un intervalle. On peut par exemple choisir $]1, +\infty[$.

R On peut reprendre cette étude sur $]0, 1[$.

Comme f est positive sur $]1, +\infty[$ et que l'on intègre dans le sens naturel, on peut voir que φ est positive sur $]1, +\infty$.

En effet, la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{\ln(t)} \end{array} \right. \qquad \text{est continue sur l'intervalle }]1, +\infty[.$$

Elle admet donc une primitive (une infinité de primitives) sur cet intervalle.

Notons F une primitive de f sur $]1, +\infty[$. On n'a pas d'expression analytique de F, mais on a son existence.

On peut alors écrire :

$$\varphi : x \longmapsto F\left(x^2\right) - F(x).$$

On doit donc trouver l'ensemble de définition de $x \longmapsto F\left(x^2\right)$ et $x \longmapsto F(x)$. On sait que la fonction F est définie sur $]1, +\infty[$, on écrit le schéma de composition :

$$\begin{array}{ccccc}]1, +\infty[& \to &]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 & & \\ & & y & \longmapsto & F(y) \\ x & & \longmapsto & & F\left(x^2\right) \end{array}$$

Ainsi, la fonction $x \longmapsto F\left(x^2\right)$ est définie sur $]1, +\infty[$.

Par somme, la fonction $\varphi : x \longmapsto F\left(x^2\right) - F(x)$ est définie sur $]1, +\infty[$.

Comprendre comment est construite la fonction permet de comprendre comment on peut la manipuler (ex : la dériver). Chercher l'ensemble de définition est ici une question fondamentale.

Continuons l'étude de cette fonction : déjà on remarque que f est classe $\mathscr{C}^\infty$, donc aussi F donc aussi (par composée) $x \mapsto F\left(x^2\right)$. Au final, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$. On peut aussi dériver :

$$\begin{array}{rll} \forall x > 1, & \varphi(x) = & F\left(x^2\right) - F(x) \\ \text{donc } \forall x > 1, & \varphi'(x) = & 2xF'\left(x^2\right) - F'(x) \\ & = & 2x\dfrac{1}{\ln\left(x^2\right)} - \dfrac{1}{\ln(x)} \\ & = & \dfrac{1}{\ln(x)}(x-1) \qquad > 0. \end{array}$$

On en déduit que la fonction φ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

On peut donc écrire le tableau de variation :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de $\varphi(x)$	$\ln(2)$ ↗ $+\infty$

! Attention, la fonction φ n'est pas définie en 1. On ne peut pas écrire directement $\varphi(1) = \int_1^1 \frac{dt}{\ln t} = 0$, car $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ n'est pas définie en 1 !

Pour l'étude en $+\infty$, déjà la limite est $+\infty$ ou une limite finie car la fonction est croissante. Ensuite, on fait une approximation par des rectangles, pour $x > 1$ fixé :

$$\forall t \in [x, x^2],\ \frac{1}{2\ln(x)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{1}{\ln(x)}$$

ce qui donne en intégrant pour $t \in [x, x^2]$:

$$\forall x > 1,\ \frac{x^2 - x}{2\ln(x)} \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x}{\ln(x)} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Pour l'étude en 1 : la limite est un réel positif ou nul.

Il y a plusieurs idées.

La plus simple est de comparer à des rectangles, comme on l'a fait précédemment :

$$\forall x > 1,\ \frac{x^2 - x}{2\ln(x)} \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = \frac{x(x-1)}{\ln(x)} &\underset{x \to 1}{\sim} \frac{x-1}{\ln(x)} \\ &\underset{u \to 0}{\sim} \frac{u}{\ln(1+u)} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2} \leqslant \lim_{x \to 1} \varphi(x) \leqslant 1$$

Une autre idée est de passer par une approximation de la fonction logarithme en 1 :

$$\begin{aligned} &\forall u > -1,\ u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u \\ \text{donc : } &\forall t > 0,\ (t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} \leqslant \ln(t) \leqslant (t-1) \\ &\frac{1}{2}(t-1)(3-t) \leqslant \ln(t) \leqslant (t-1) \end{aligned}$$

On passe à l'inverse (pour $t > 1$) :

$$\forall t > 1,\ \frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{2}{(t-1)(3-t)}$$

On peut donc écrire pour $x > 1$ fixé :

$$\forall t \in [x, x^2],\ \frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{2}{(t-1)(3-t)}$$

puis intégrer pour $t \in [x, x^2]$:

$$\forall x > 1,\ \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} \leqslant \varphi(x) \leqslant 2\int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)(3-t)}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{dt}{1-t} &= [\ln(t-1)]_x^{x^2} \\ &= \ln(x^2-1) + \ln(x-1) = \ln(x+1) \xrightarrow[x \to 1]{} \ln(2) \end{aligned}$$

et :

$$\frac{1}{(t-1)(3-t)} = \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{3-t}$$

et donc :

$$\begin{aligned} 2\int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)(3-t)} &= [\ln(t-1) - \ln(3-t)]_x^{x^2} \\ &= \ln\left(x^2-1\right) - \ln(x-1) - \ln\left(3-x^2\right) + \ln(3-x) \\ &= \ln(x+1) + \ln\left(\frac{3-x}{3-x^2}\right) \\ &\xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2) \end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = \ln(2)$.

Résolution d'un système avec paramètres

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Dans cette fiche, on détaille la résolution de l'exercice suivant :

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ (en fonction de $m \in \mathbb{C}$)

$$(S)\begin{cases} x - my + m^2 z &= 2m \\ mx - m^2 y + mz &= 2m \\ mx + y - m^2 z &= 1-m. \end{cases}$$

On remarque que l'on peut diviser la deuxième ligne par m.

On utilise les opérations qui nous arrangent !

Cas $m \neq 0$

Bien indiquer les cas particuliers. Lorsqu'on les traitera on reprendra le calcul juste avant l'endroit où on a fait les hypothèses !

Le système est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 1 & -m & 1 \\ m & 1 & -m^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 2 \\ 1-m \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ \frac{1}{m}l_2 \\ l_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1-m^2 \\ 0 & 1+m^2 & -m^2-m^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 2-2m \\ 1-m-2m^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 - l_1 \\ l_3 - ml_1 \end{matrix}$$

On écrit : $1-m-2m^2 = (m+1)(-2m+1)$ car -1 est racine évidente.
De plus, $2-2m = 2(1-m)$, $1-m^2 = (1-m)(1+m)$ et $-m^2-m^3 = -m^2(1+m)$.

On simplifie les expressions avant de passer à la suite !

Cela donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 1+m^2 & -m^2(1+m) \\ 0 & 0 & (1-m)(1+m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ (m+1)(-2m+1) \\ 2(1-m) \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_3 \\ l_2 \end{matrix}$$

On obtient ainsi, le premier résultat :

si $m \notin \{1,-1,0,i,-i\}$, le système est de rang 3 et donc admet une solution unique.

Pensez à indiquer dès maintenant ce résultat : il faut montrer que vous connaissez le cours

Il est écrit dans l'énoncé $m \in \mathbb{C}$.

Cas $m \notin \{1,-1,0,i,-i\}$

On suppose donc $m \notin \{1,-1,0,i,-i\}$ et on continue le calcul par la méthode de remontée.

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 1+m^2 & -m^2(1+m) \\ 0 & 0 & (1+m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ (m+1)(-2m+1) \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ \frac{1}{1-m}l_3 \end{matrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
z=&\frac{2}{1+m}\\
y=&\frac{1}{1+m^2}\Big((m+1)(-2m+1)-m^2(1+m)z\Big)\\
=&\frac{1}{1+m^2}\Big((m+1)(-2m+1)-2m^2\Big)\\
=&\frac{1}{1+m^2}\Big(1-m\Big)=\frac{1-m}{1+m^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x=&2m+my-m^2z\\
=&2m+\frac{m(1-m)}{1+m^2}-\frac{2m^2}{1+m}\\
=&\frac{m}{(1+m^2)(1+m)}\Big(2(1+m)(1+m^2)+(1-m)(1+m)-2m(1+m^2)\Big)\\
=&\frac{m}{(1+m^2)(1+m)}\Big(2(1+m+m^2+m^3)+1-m^2-2m-2m^3\Big)\\
=&\frac{m}{(1+m^2)(1+m)}\Big(3+m^2\Big)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi, la solution dans le cas $m\notin\Big\{1,-1,0,i,-i\Big\}$:

$$\left(\frac{m^3+3m}{(1+m^2)(1+m)},\frac{1-m}{1+m^2},\frac{2}{1+m}\right)$$

On simplifie les expressions une par une. Attention aux erreurs de calculs !
Il reste les cas particulier.

On revient en arrière **juste avant** d'avoir fait les hypothèses !
Cas $m=0$ le système devient :

$$\begin{cases}x= & 0\\ 0= & 0\\ y= & 1\end{cases}$$ la solution est $(0,1,z)$ avec $z\in\mathbb{C}$

Cas $m=1$ le rang est 2 et le système se réduit à

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$$

La solution est :

$$\begin{aligned}
y=&-1+z\\
x=&y-z+2=1
\end{aligned}$$

la solution est $(1,z-1,z)$ avec $z\in\mathbb{C}$

Cas $m=-1$ le rang est 2 et le système se réduit à

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$$

Le système est incompatible et $\mathscr{S}=\emptyset$.

Cas $m=i$ le rang est 2 et le système se réduit à

$$\begin{pmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 0 & 1+i\\ 0 & 0 & (1-i)(1+i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2i\\(i+1)(-2i+1)\\2(1-i)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2i\\(-2i+1)\\2(1-i)\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}l_1\\ \frac{1}{1+i}l_2\\ l_3\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2i\\(-2i+1)\\4i\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}l_1\\ \frac{1}{1+i}l_2\\ l_3-2l_2\end{matrix}$$

Comme $4i\neq 0$ l'équation de compatibilité n'est pas vérifiée Le système est incompatible et $\mathscr{S}=\emptyset$.

Cas $m=-i$ le rang est 2 et le système se réduit à

$$\begin{pmatrix}1 & i & -1\\ 0 & 0 & 1-i\\ 0 & 0 & (1+i)(1-i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2i\\(1-i)(2i+1)\\2(1+i)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & i & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2i\\2i+1\\1+i\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}l_1\\ \frac{1}{1-i}l_2\\ \frac{1}{2}l_3\end{matrix}$$

or $2i+1\neq i+1$, donc le système est incompatible.

En conclusion, on a :

- Si $m=0$, $\mathscr{S}=\left\{(0,1,z)\,\middle|\,z\in\mathbb{C}\right\}$
- Si $m=1$, $\mathscr{S}=\left\{(1,z-1,z)\,\middle|\,z\in\mathbb{C}\right\}$
- Si $m=-1$, $m=i$ ou $m=-i$, $\mathscr{S}=\emptyset$.
- Dans les autres cas, $\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{m^3+3m}{(1+m^2)(1+m)},\frac{1-m}{1+m^2},\frac{2}{1+m}\right)\right\}$

Une conclusion précise est attendue. Attention à l'écriture de l'ensemble des solutions !

Passage d'un mode de représentation d'un sev à l'autre

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

On commence par présenter ces notions dans $\mathbb{K}^n$ puis on les étends à $\mathbb{K}[X]$.

⋆ Les deux modes de représentation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Il existe deux modes de représentation d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$:

Par des équations cartésiennes c'est-à-dire que l'ensemble E est donné comme la partie de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie un certain nombre d'équations. Par exemple :

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y-z=0, \text{ et } x+3z=0\right\}.$$

L'avantage de cette représentation est qu'il est très facile de calculer l'intersection de deux sev : il suffit de prendre la partie qui vérifie toutes les équations. Par exemple, l'ensemble précédent E est :

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y-z=0\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+3z=0\right\}.$$

Ce mode de représentation correspond à identifier E et le noyau d'une application linéaire : le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{K}^n$ s'écrit :

$$E = \left\{x \in \mathbb{K}^n \middle| f(x) = 0\right\},$$

où f est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, avec p le nombre d'équations.
Dans l'exemple, E s'identifie avec le noyau de l'application linéaire :

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, x+3z) \end{array}\right.$$

On peut écrire cela en disant que E est l'ensemble de solutions d'un système homogène (S_h).
On sait que les solutions d'un système homogène forment un espace vectoriel.
Dans l'exemple, le système (S_h) correspondant est :

$$(S_h) : \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 0 \\ x+3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Par des paramètres c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui s'écrivent en fonction de certains paramètres :

$$F = \left\{(a+c, a+b+2c, b+c, b+c) | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

L'avantage de cette représentation est qu'il est très facile de trouver une famille génératrice, et ainsi une base, en enlevant des vecteurs. Par exemple ici :

$$F = \text{Vect}((1,1,0,0),(0,1,1,1),(1,2,1,1)).$$

que l'on peut simplifier, en remarquant que : $(1,1,0,0)+(0,1,1,1) = (1,2,1,1)$, en :

$$F = \text{Vect}((1,1,0,0),(0,1,1,1)).$$

qui est une famille libre, donc F est de dimension 2.
Cette représentation peut-être vue comme l'image d'une application linéaire : le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ peut s'écrire sous la forme :

$$F = \left\{f(x) \middle| x \in \mathbb{K}^p\right\}$$

où f est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ avec p le nombre de paramètres dans $\mathbb{K}^n$.

Dans l'exemple F s'identifie avec l'espace image de l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+c, a+b+2c, b+c, b+c) \end{array} \right.$$

On peut dire que c'est l'ensemble des seconds membres, tel qu'un système (S) ait des solutions : dans l'exemple, le sous-espace vectoriel F s'identifie avec l'ensemble des 4-uplets (x,y,z,t), tel que le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} a+c & = & x \\ a+b+2c & = & y \\ b+c & = & z \\ b+c & = & t \end{array} \right.$$

d'inconnue (a,b,c) ait une solution.

Ainsi, on retiendra :
- lorsqu'on veut faire une intersection de sev, on passe par la forme équations.
- lorsqu'on veut déterminer une base ou calculer la dimension, on passe par la forme paramètre. Avoir une base permet aussi de déterminer un supplémentaire.

Il faut donc être capable de passer d'un mode de représentation à l'autre.

⋆ Passage des équations aux paramètres

Pour passer de la forme équation cartésienne à la forme paramètre, on résout le système (S_h), en considérant les coordonnées (x,y,z) comme des inconnues. L'ensemble des solutions s'exprime alors en fonction de paramètres, ce qui donne la représentation paramétrique.

On rappelle que la technique est de se ramener à un système échelonné et d'utiliser la méthode de remontée.

Par exemple, pour le sev E, on fait :

$$\begin{array}{ll} (S_h) & \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 0 \\ x+3z & = & 0 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 0 \\ x & = & -3z \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{2}(x+z) \\ x & = & -3z \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -z \\ x & = & -3z \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, $E = \{(-3z,-z,z) | z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(-3,1,1)$.

⋆ Passage des paramètres aux équations

Pour passer d'une représentation sous forme paramétrique à une représentation sous forme d'équations, on résout le système (S) avec pour inconnues les paramètres, et pour second membre, des coordoonées génériques. On peut dire que l'on cherche à *exprimer les paramètres en fonction des coordonnées.* On met le système sous forme échelonnée et apparaissent alors des *équations de compatibilité*. Ainsi, le système (S) n'a de solutions que si et seulement si le second membre, *i.e.* les coordonnées, vérifient certaines conditions. On obtient ainsi les équations cartésiennes.

Par exemple pour F, on a :

$$\begin{array}{ll} (S) & \left\{ \begin{array}{rcl} a+c & = & x \\ a+b+2c & = & y \\ b+c & = & z \\ b+c & = & t \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} a+c & = & x \\ b+c & = & y-x \\ b+c & = & z \\ b+c & = & t \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} a+c & = & x \\ b+c & = & y-x \\ 0 & = & z-y+x \\ 0 & = & t-y+x \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, le système a une solution si et seulement si $z-y+x=0$, et $t-y+x=0$. Si ces équations sont vérifiées, alors le système a une solution, par exemple : $a=x$, $b=y$ et $c=0$. Cette solution n'est pas unique (on retrouve ici le fait que la famille génératrice n'est pas une base de F). On a donc :

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 | z-y+x=0, \text{ et } t-y+x=0\right\}.$$

Attention, il est inutile de résoudre le système : on cherche les conditions pour lesquels ce système admet une solution, c'est-à-dire les équations de compatibilité.

⋆ **Dans l'ensemble des polynômes** $\mathbb{K}[X]$

On va voir comment on peut étendre ces techniques en le adaptant aux SEV des polynômes.

On peut définir un SEV par des équations :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left\{P\in\mathbb{R}_3[X] \middle| (X-2)^2 | P\right\}\\
E_2 &= \left\{P\in\mathbb{R}_3[X] \middle| P(1)=0,\ P(0)=0\right\}\\
E_3 &= \left\{P\in\mathbb{R}_3[X] \middle| P'(2)=0,\ P^{(3)}(2)=0\right\}
\end{aligned}$$

ou par des paramètres :

$$\begin{aligned}
E_4 &= \left\{aX^3+bX^2+cX+b \middle| (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}\\
&= \left\{aX^3+b\left(X^2+1\right)+cX \middle| (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\} = \text{Vect}(X^3,X^2+1,X)
\end{aligned}$$

Pour passer de la forme équations à la forme paramètres, on applique la même idée : on considère un polynôme qui vérifie les équations et on cherche ses coefficients (ou ses racines).

Par exemple pour E_1, on considère $P\in E_1$ on a donc $P\in\mathbb{R}_3[X]$ et $(X-2)^2|P$.

Comme P est de degré 3, le quotient est de degré 1, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\exists(a,b)\in\mathbb{R}^3,\ P &= (aX+b)(X-2)^2\\
&= aX(X-2)^2+b(X-2)^2
\end{aligned}$$

On en déduit une famille génératrice de E_1 :

$$E_1=\text{Vect}(X(X-2)^2,(X-2)^2)$$

Cette famille est clairement libre (car de degré échelonnée mais on peut aussi le vérifier rapidement), c'est donc une base de E_1, ce qui donne $\dim(E_1)=2$.

Pour E_2, on considère un polynôme P de E_2. On a : 0 et 1 sont racines, donc $X(X-1)$ divise P et P est de degré 3, ainsi :

$$P=(aX+b)X(X-1)=aX^2(X-1)+bX(X-1)$$

On en déduit une famille génératrice de E_2 :

$$E_2=\text{Vect}(X^2(X-1),X(X-1))$$

Idem, cette famille est libre et donc c'est une base de E_2 qui est de dimension 2.

Pour E_3, on peut considère $P\in E_3$. On applique la relation de Taylor :

$$P=P(2)+(X-2)P'(2)+\frac{(X-2)^2}{2}P''(2)+\frac{(X-2)^3}{3!}P^{(3)}(2)$$

ce qui s'écrit avec les hypothèses sur P :

$$P=P(2)+\frac{(X-2)^2}{2}P''(2)$$

On en déduit une famille génératrice de E_3 :

$$E_2=\text{Vect}\left(1,(X-2)^2\right)$$

Encore une fois, cette famille est libre et donc c'est une base de E_3 qui est de dimension 2.

Pour la passage des paramètres aux équations, c'est un peu plus complexe, il faut trouver la technique permettant d'exprimer les paramètres en fonction du polynôme.

Pour E_4, on voit qu'il faut utiliser la formule de Taylor en 0 : Pour un polynôme P, on a :

$$P = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{6}X^3$$

Ainsi, on a :

$$P \in E_4 \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} b = P(0) \\ c = P'(0) \\ b = \frac{P''(0)}{2} \\ a = \frac{P^{(3)}(0)}{6} \end{cases}$$

La condition pour qu'il existe un tel système est : $P(0) = \frac{P''(0)}{2}$.

On obtient alors une écriture de E_4 sous forme d'équations :

$$E_4 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \middle| P(0) = \frac{P''(0)}{2} \right\}$$

R On retiendra que c'est la même démarche, mais que les techniques sont plus variées.

Révisions algèbre linéaire

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

⋆ Espaces et sous-espaces vectoriels

Définition III.5 Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations :
l'addition interne on peut ajouter les éléments de E : si u et v sont éléments de E, et la somme $u+v$ est un élément de E,
la multiplication externe on peut multiplier les éléments de E par les éléments de $\mathbb{K}$: si u est élément de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λu est un élément de E.

Proposition III.5 — Espaces vectoriels de référence. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
Si Ω est un ensemble, l'ensemble K^Ω (noté aussi $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$) des fonctions de $\Omega \to \mathbb{K}$ est un espace vectoriel. En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel.
Pour deux entiers (n,p), l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille (n,p) est un espace vectoriel.

- Un produit cartésien d'espace vectoriel est un espace vectoriel.
- L'intérêt des espaces vectoriels est que l'on peut y faire des **combinaisons linéaires** : si $u_1,\dots u_p$ est une famille finie de vecteurs de E et $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ p scalaires, alors on peut calculer :

$$\alpha_1 u_1 + \dots \alpha_p u_p = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k.$$

Si E et F sont deux EV, on peut parler d'application linéaire de E dans F.

Définition III.6 Si E est un EV, un sous-espace vectoriel de E est une partie de E qui est elle-même un espace vectoriel.
Pour montrer qu'une partie F d'un EV E est un sous-espace vectoriel on vérifie :
- $0 \in F$,
- $\forall (x,y) \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x+\lambda y \in F$.

- Une **intersection** de sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, jamais une réunion.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est un SEV de E. C'est l'ensemble des combinaison linéaire des vecteur de la famille $\mathscr{F}$.
On peut écrire :

$$\mathrm{Vect}((u_1,\dots,u_p)) = \left\{ x \in E \,\middle|\, \exists (\alpha_1,\dots,\alpha_p),\ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\}$$

Plus on ajoute des vecteurs à la famille plus cet espace grandit, mais on peut enlever les vecteurs combinaisons linéaires des autres.
- Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\ker(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) sont des SEV de E (respectivement de F).
Cela corresponds à la description d'un SEV sous la forme **d'équations cartésienne** (comme un noyau, les solutions d'un système homogène) ou de **paramètres** (comme une image, l'ensemble des Y tel que le système $AX=Y$ admet au moins une solution).
On passe d'une forme à une autre en calculant la solution du système homogène ou en cherchant les équations de compatibilité du système linéaire.
Le théorème du rang permet de déterminer dans ce cas la dimension du SEV.
- Si E est un EV et F et G sont deux SEV de E, l'égalité $F=G$ peut se démontrer simplement par double inclusion (comme une égalité d'ensemble) mais on a aussi :
  - dans le cas de la dimension finie : $F=G$ est équivalent à $F \subset G$ et $\dim(F)=\dim(G)$.
  - les inclusions $\{0\} \subset F$ et $F \subset E$ sont évidentes !
  - l'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subset E$ se démontre en vérifiant que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont dans le SEV E !
- Si A est une partie de E, alors $A^\perp$ est un SEV de E.

⋆ Somme et somme directe de SEV

Définition III.7 Soit E un EV et F et G deux SEV de E.
On définit $F+G$ comme :

$$F+G=\left\{u+v\middle|u\in F, v\in G\right\}.$$

Si on considère :

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} F\times G & \to & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}\right.$$

alors $F+G=\mathrm{Im}(\varphi)$.

Le symbole $+$ est donc un opérateur entre SEV de E (à partir de deux SEV on en crée un troisième).

- Lorsque l'on sait que $x\in F+G$, alors on sait que x s'écrit sous la forme $u+v$ avec $u\in F$ et $v\in G$.
  Pour montrer qu'un élément x de E vérifie $x\in F+G$, il faut construire $u\in F$ et $v\in G$, tels que $x=u+v$. On peut utiliser une analyse /synthèse.
- Dans le cas de SEV engendré par des vecteurs, on a :

$$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)+\mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n).$$

Définition III.8 Soit E un EV et F et G deux SEV de E.
On dit que F et G sont en somme directe sipour tout $x\in F+G$ la décomposition sous la forme $x=u+v$ avec $u\in F$ et $v\in G$ est unique.
C'est-à-dire si l'application φ définie ci-dessus est injective.

- C'est équivalent à $F\cap G=\{0\}$. C'est généralement ainsi qu'on le démontre.
- Pour indiquer que la somme est directe, on ajoute un décorateur autour de $+$ et on écrit $F\oplus G$ à la place de $F+G$.

Définition III.9 Soit E un EV et F et G deux SEV de E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E, lorsque l'on a $E=F\oplus G$.
Cela signifie donc que $F+G=E$ (que φ est surjective) et que F et G sont en somme directe (que φ est injective). Autrement dit que φ est un isomorphisme.
On a alors existence et unicité de l'écriture $u+v$, ie :

$$\forall x\in E,\ \exists!(u,v)\in F\times G,\ x=u+v$$

Dans le cadre de la dimension finie :

- Si $E=F\oplus G$, soit $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G, alors la famille obtenue en réunissant $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est une base de E. On parle de base adaptée à une somme directe.
- Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_p)$ une base de l'EV E.
  On considère les SEV suivants :

$$F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \text{ et } G=\mathrm{Vect}(e_{k+1},\dots,e_n)$$

  Alors $E=F\oplus G$.
- Pour trouver un supplémentaire de F dans E, on part d'une base de F que l'on complète pour avoir une base de E.
  L'espace engendré par les vecteurs ajoutés est un supplémentaire de F.
- On a des relations sur les dimensions :
  Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F\oplus G)=\dim(F)+\dim(G)$$

  Dans le cas général :

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G).$$

  En particulier :

$$\dim(F)+\dim\left(F^{\perp}\right)=\dim(E)$$

- On peut montrer plus facilement que F et G sont supplémentaires :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ &\iff E = F + G \text{ et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{aligned}$$

  C'est la caractérisation : $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ qui est la plus simple.
- Tout SEV admet des supplémentaires. L'un d'entre eux est unique et particulier, c'est le supplémentaire orthogonal.

  Si F est un SEV de E, alors $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$.

⋆ Famille finie de vecteur

Définition III.10 La famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est libre si la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle triviale où tous les poids sont nuls.

C'est-à-dire :

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \implies \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_p = 0 \right)$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

- La famille est libre si et seulement si elle est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On peut aussi dire que son rang est le nombre vecteurs qu'elle contient.
  Une famille est liée si et seulement si au moins l'un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres, ie si l'un des vecteurs appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.
- Une famille de polynômes de degrés échelonnés est libre. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, une famille orthonormale de vecteurs est libre.

Définition III.11 — Famille génératrice. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, on dit qu'une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ d'éléments de F est génératrice du SEV F si $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Autrement dit si tout vecteur de F est combinaison linéaire de des vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$.

Pour une famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ d'un SEV F, si considère l'application linéaire :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & F \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_p) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \end{array} \right.$$

On a :

φ est injective si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre

$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\mathscr{F})$

φ est surjective si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice de F

φ est bijective si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de F

⋆ Bases

Définition III.12 — Base. Une base d'un espace vectoriel E est une famille à la fois libre et génératrice de E.

Il y a existence (famille génératrice) et unicité (famille libre) des **coordonnées** dans une base.

- Toutes les bases ont le même cardinal c'est la **dimension**. Une fois une base choisie, on peut travailler dans E comme dans $\mathbb{K}^n$ en identifiant un vecteur et ses coordonnées.
- On peut construire une base en partant d'une famille génératrice et en enlevant les vecteurs combinaison linéaire des autres ou bien (moins fréquent) en partant d'une famille libre et en ajoutant des vecteurs qui ne sont pas dans l'espace engendré par les précédents.
  En conséquence une famille libre contient nécessairement moins de vecteurs que la dimension, et une famille génératrice contient nécessairement plus de vecteurs que la dimension. Une famille qui a le bon nombre de vecteurs est automatiquement une base si elle est libre ou génératrice.

Proposition III.6 — Dimension des espaces vectoriels de référence. La dimension de $\mathbb{K}^p$ est p.

La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est $n+1$.

La dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $n \times p$.

✯ Application linéaire

Définition III.13 — Application linéaire. Soit E et F des espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une application linéaire si elle vérifie les deux propriétés :

- $\forall (x,y) \in E^2, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$,
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

L'image par une application linéaire d'une combinaison linéaire est une combinaison linéaire des images. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $(u_1,\dots,u_p)$ est une famille de p vecteurs de E et que $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ est p scalaires, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(u_i).$$

- $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace vectoriel. On peut aussi composer les applications linéaires.
- On définit $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'espace image de f.
  L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$. En dimension fini, cela se démontre souvent avec le rang (égalité des dimension) car une inclusion est évidente !
  Si E est de dimension finie, on considère $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E, alors on étudie souvent la famille $\mathscr{F} = (f(e_1), f(e_2),\dots,f(e_n))$. C'est les coordonnées de cette famille que l'on met dans la matrice de l'application. On sait quecette famille engendre l'espace image

  $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2),\dots,f(e_n))$$

  On a aussi :

  $$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff \mathscr{F} \text{ est libre} \\ f \text{ est surjective} &\iff \mathscr{F} \text{ est génératrice de } F \\ f \text{ est bijective} &\iff \mathscr{F} \text{ est une base.} \end{aligned}$$

  Enfin, cette famille détermine l'application linéaire (si deux applications linéaires sont égales sur une base, alors elles sont égales partout !). Ce qui permet de déterminer une application à partir de la matrice.
- On note $\ker(f)$ le noyau de f c'est :

  $$\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}.$$

  L'application est injective si et seulement si le noyau est réduit à $\{0\}$.
- Rappel des raisonnements algébriques habituels :
  - Si on sait que $x \in \ker(f)$, alors on sait que $f(x) = 0$.
  - Si on veut montrer que $f(x) \in \ker(f)$, il suffit de vérifier que $f(x) = 0$.
  - Lorsque $y \in \mathrm{Im}(f)$, on saitqu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$
  - Tandis que pour prouver qu'un élément $y \in F$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il faut construire un x tel que $y = f(x)$.
- Si il existe une application linéaire injective de E dans F alors $\dim(F) \geqslant \dim(E)$. Si il existe une application linéaire surjective de E dans F alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Si il existe un application linéaire bijective (isomorphisme) de E dans F alors $\dim(F) = \dim(E)$.
  Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors on a :

  $$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

✯ Rang

Définition III.14 Le rang d'une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré :

$$Rg(\mathscr{F}) = Rg(u_1,\dots,u_n) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n))$$

Le rang d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est la dimension de l'espace image :

$$Rf(f) = \dim(Im(f))$$

Le rang d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}$ est :

- le rang de l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ associée
- le rang de la famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ associée,

- le nombre de pivots après réduction de Gauss.

Ces trois définitions donnent le même rang. Souvent, on calcule le rang avec la troisième.

- Une famille est libre si son rang est égal au nombre vecteurs qu'elle contient.
  Une famille est génératrice de E si son rang est égal à la dimension de E.
  Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux valeurs.
  Une application linéaire est injective si son rang est égal à la dimension de son espace de départ.
  Une application linéaire est surjective si son rang est égal à la dimension de l'espace d'arrivée.
  Dans tous les cas, le rang est inférieur à ces deux dimensions.

⋆ Projecteur et symétrie

Définition III.15 Soit E un espace vectoriel, qui se décompose en une somme directe. On note $E = F \oplus G$.
On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u \end{array} \right. \qquad \text{avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G.$$

- On sait : le projecteur p sur F parallèlement à G est l'unique application linéaire vérifiant :

$$\forall x \in F,\ p(x) = x \text{ et } \forall x \in G,\ p(x) = 0$$

- On a : $p^2 = p$ et :

$$G = \ker p \qquad \text{et} \qquad F = \operatorname{Im} p = \left\{ x \in E | p(x) = x \right\} = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$$

  Réciproquement, pour montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur, il suffit de vérifier $p^2 = p$. On a alors directement :$\operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$ et p est alors le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Définition III.16 — Symétrie. Soit E un espace vectoriel qui se décompose en une somme directe $E = F \oplus G$.
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \longmapsto & u - v \text{ avec } x = u + v \text{ et } u \in F,\ v \in G. \end{array} \right.$$

On a

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E \text{ ou encore } p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$$

où p est le projecteur.

- On a $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$.
  Réciproquement, pour montrer que s est une symétrie, il suffit de vérifier $s^2 = s$ et on a directement :

$$E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$$

  De plus, s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

⋆ Représentation matricielle

Étant donné E et F deux espaces vectoriels de dimension finie : $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = m$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F et une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On peut associer à f une unique matrice : on met dans cette matrice les coordonnées des images de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$. On la note : $Mat_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}(f)$.

faire un dessin

Étant donné un vecteur x de E, on peut aussi construire la matrice colonne associée : $Mat_{\mathscr{B}}(x)$, c'est la matrice des coordonnées (en colonne).

Étant donné une famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de E, on peut aussi construire la matrice de la famille : dans chaque colonne les coordonnées d'un vecteurs.

faire un dessin

- Les matrices sont un support de calculs : faire des calculs sur la matrice permet de démontrer des relations sur les applications linéaires :

- une égalité de matrice correspond à une égalité d'applications linéaires,
- un produit de matrices correspond à une composée d'application linéaire, une combinaison linéaire de matrices correspond à une combinaison linéaire d'application linéaire,
- une matrice inversible correspond à un endomorphisme inversible.
- L'image de x par f correspond au produit AX.

- Cela dépends des bases choisies.
  On a les formules de changements de base : pour un vecteur x de E, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ une base de E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ une base de F.

$$x = \mathrm{Id}_E(x) \text{ donc } Mat_{\mathscr{B}}(x) = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}) Mat_{\mathscr{B}'}(x)$$
$$f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_F \text{ donc } Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(x) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{Id}) Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})$$

  Les matrices $Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})$ sont les matrices de passage (de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$). Elles contiennent les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.
  En particulier pour un endomorphisme f, les matrices A et B représentent toutes les deux l'endomorphisme f dans deux bases différentes si et seulement si il existe une matrice P inversible telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

- Par contre, étant donné une matrice, on ne connaît ni l'espace de départ, ni l'espace d'arrivée, ni les bases. Si on a ces informations, on peut retrouver l'application linéaire à partir de la matrice, sinon on peut associer à une matrice un endomorphisme de $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ que l'on dit canoniquement associé.
  On peut ainsi définir le noyau et l'image d'une matrice comme le noyau et l'image de l'endomorphisme canoniquement associé.

⋆ Produit scalaire et espace euclidien

Définition III.17 — Produit scalaire. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un produit scalaire est une application φ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

1. pour tout couple (x,y) de E, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (symétrie)
2. pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (bilinéarité).
3. pour $x \in E$, on a $\varphi(x,x) \geqslant 0$ (positivité).
4. pour $x \in E$, on a $\varphi(x,x) = 0 \implies x = 0$ (définie positive).

- Les exemples de références sont :

$$\text{dans } \mathbb{R}^n : \left\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$\text{dans } \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) : \left\langle f,g \right\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

- Pour démontrer la positivité et « définie positive », on utilise souvent les arguments suivants :
  - la forme canonique : $x^2 + by + cz... = (x + \frac{b}{2}y + \frac{c}{2}z)^2 + ...$, en éliminant les variables une par une.
  - La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls,
  - L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si la fonction est nulle.
- On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire espace vectoriel euclidien. si il est de dimension finie.
- On peut associer la norme : $\|x\| = \sqrt{< x,x >}$ et la distance : $d(x,y) = \|x-y\|$ à un produit scalaire.

Proposition III.7 La norme associée au produit scalaire vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |< x,y >| \leqslant \|x\|\|y\|$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ y = \lambda x \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda y \text{ ou}$$

- En conséquence, on a l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont positivement liés, ie :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ y = \lambda x \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y.$$

On a aussi l'**inégalité triangulaire renversée** :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|.$$

et le Théorème de Pythagore : Deux vecteurs (x,y) de E sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

✯ Orthogonalité

Définition III.18 — Vecteurs orthogonaux. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $< x,y >= 0$.
L'orthogonal d'une partie A de E est :

$$\begin{aligned} A^\perp &= \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, < a,x >= 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in E, \middle| \forall a \in A, a \perp x \right\} \end{aligned}$$

On dit que deux SEV F et G de E sont orthogonaux si

$$\forall (x,y) \in F \times G,\ < x,y >= 0$$

Définition III.19 On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
L'image d'un vecteur x de E par cette projection est appelée le projeté orthogonal de x sur F.
C'est l'élément de F le plus proche de x :

$$d(x,F) = d(x,P_F(x)) = \inf_{y \in F} d(x,y)$$

$$\forall y \in F,\ d(x,y) \geqslant d(x,P_F(x)) \text{ avec égalité si et seulement si } y = P_F(x).$$

On a deux moyens de calculer le projeté orthogonal :

- Si on connaît une BON $(u_1,\dots,u_n)$ de E, tels que les premiers vecteurs $(u_1,\dots,u_p)$ forment une BON de F, alors :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < u_i,x > u_i.$$

- Sinon on résout un système d'équations : si $\mathscr{G} = \{e_1,\dots,e_n\}$ est une famille génératrice de F.
Alors $P_F(x)$ est l'unique vecteur y vérifiant :

$$\begin{cases} y \in F, & \text{puisque le projeté sur } F \text{ est un vecteur de } F \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ < x-y,e_i >= 0 \end{cases}$$

✯ Base orthonormée

Soit $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_p)$ une famille libre de E. Alors, on peut construire une famille orthonormale $\mathscr{G} = (v_1,\dots,v_p)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \text{Vect}(u_1,\dots,u_i) = \text{Vect}(v_1,\dots,v_i).$$

Pour cela, on procède vecteur par vecteurs :

- on construit v_1 en divisant u_1 par sa norme,
- on construit v_2 en cherchant un vecteur $x = u_2 + \alpha v_1$ avec α tel que $< x,v_1 >= 0$, puis on divise par la norme.
- on construit v_i, à partir des précédent, en cherchant un vecteur

$$x = u_i + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \dots + \alpha_1 v_i = u_i + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k v_k$$

en choisissant les α_k pour que $< x,v_k >= 0$. On divise ensuite par la norme.

- Cela permet de construire des bases orthonormées, ou de compléter des familles orthonormées en des bases orthonormées.
- Avantage de travailler avec une BON $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$: si $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathscr{B}}$ et $y = (y_1, \dots, y_n)_{\mathscr{B}}$ alors :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = \langle x, u_i \rangle$$

$$< x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Exercices : Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

⋆ Famille libre, famille génératrice

Exercice 1 Soit l'ensemble :

$$F = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \middle| \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\cos(x-\beta) \right\}$$

Montrer que F est un SEV de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donner sa dimension.

Correction : C'est l'occasion de revoir :

$$\cos(x-\beta) = \cos(x)\cos(\beta) - \sin(x)\sin(\beta)$$

et :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\beta) \qquad \text{avec} \qquad a+ib = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\beta}$$

On a alors facilement :

$$F = \text{Vect}(x \longmapsto \sin(x), x \longmapsto \cos(x))$$

Cette famille est libre et donc c'est une base de F.

Exercice 2 Dans $\mathbb{C}_3[X]$, on considère les polynômes :

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 + X^2 \\ P_2 &= -2X - 3X^2 \\ P_3 &= 1 - X + 2X^2 - 3X^3 \\ P_4 &= 1 + X + 2X^2 \\ P_5 &= 3 - X + 6X^2 - 6X^3 \end{aligned}$$

Trouver des bases des sous-espaces :

$$F = \text{Vect}(P_1, P_2), \quad G = \text{Vect}(P_3, P_4, P_5), \quad F \cap G, \quad F + G.$$

Correction : C'est l'occasion de voir que l'on peut faire des calculs avec les polynômes ou avec leur coordonnées dans une matrice.

Par exemple pour montrer que (P_1, P_2) est libre, on peut résoudre le système : $\alpha P_1 + \beta P_2 = 0$ d'inconnue $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, ou regarder le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On obtient : (P_1, P_2) est libre, c'est donc une base de F.

On fait de même pour avoir $P_5 = 2P_3 + P_4$, donc ce n'est pas une famille libre, par contre (P_3, P_4) est libre, donc base de G.

Ensuite, il faut passer de la forme paramètre à la forme équation. on écrit donc pour un polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{C}_3[X]$:

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ \alpha P_1 + \beta P_2 = P \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on réduit le système (d'inconnue (α,β) de second membre (a,b,c,d)) et on obtient les équations de compatibilité ie, les conditions nécessaires et suffisantes sur le second membre (a,b,c,d)) pour qu'il existe une solution. **NB :** on ne cherche pas l'expression de (α,β), mais juste leur condition d'existence

On en déduit les équations cartésiennes de F. On fait de même pour G. On a alors les équations cartésiennes de $F\cap G$. Il reste à résoudre ces équations pour vérifier que seuls le vecteurs nuls vérifie toutes les conditions. Cela donne : $F\cap G=\{0\}$. Les SEV F et G sont alors en somme directe, donc une base de $F\oplus G$ est obtenue en réunissant une base de F et une base de G, cela donne : (P_1,P_2,P_3,P_4) base de $F\oplus G$. An bonus : $\dim(F\oplus G)=4$ donc $F\oplus G=\mathbb{C}_3[X]$.

Autre méthode : on commence par montrer que (P_1,P_2,P_3,P_4) est libre. Ensuite soit $P\in F\cap G$ il serait alors combinaison linéaire de (P_1,P_2), mais aussi de (P_3,P_4), et donc on aurait les deux écritures :

$$P=\alpha P_1+\beta P_2=\gamma P_3+\delta P_4$$

ce qui donne :

$$\alpha P_1+\beta P_2-\gamma P_3-\delta P_4=0$$

et donc $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ sont nuls et $P=0$. Ce qui donne $F\cap G=\{0\}$ et la suite.

⋆ Applications linéaires, noyau et image

Exercice 3 On définit l'application Φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même en posant :

$$\Phi(P)=P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$$

1. Prouver que Φ est linéaire et non injective.
2. Déterminer le noyau de Φ.
3. Soit $n\geqslant 0$. On note le SEV de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$:

   $$X^2\mathbb{R}_n[X]=\left\{X^2P|P\in\mathbb{R}_n[X]\right\}$$

   Montrer que l'on définit une application par :

   $$g:\left\{\begin{array}{ccc} X^2\mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & \Phi(P)\end{array}\right.$$

4. Montrer que g est un isomorphisme.
5. En déduire que Φ est surjective.

Correction :

1. Il faut considérer deux polynôme P et Q et $\alpha\in\mathbb{R}$ et vérifier que $\Phi(P+\alpha Q)=\Phi(P)+\alpha\Phi(Q)$.
   On peut aussi remarquer que :

   $$a:P\mapsto P(X+1),\qquad b:P\mapsto P(X-1)$$

   sont linéaires et que $\Phi=a+b-2Id$.
   Les polynômes constants sont dans $\ker(\Phi)$.
   NB : il faut calculer l'image des vecteurs de la base de $\mathbb{R}[X]$, et donc calcule $\Phi(1)$, $\Phi(X)$, etc.
2. On résout l'équation : $\Phi(P)=0$ en écrivant $P=\sum_{n=0}^{N}a_nX^n$.
   On écrit : $P=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+\ldots$. On vérifie alors que si $n\geqslant 2$, le terme dominant de $\Phi(P)$ est $n(n-1)a_nX^{n-2}\neq 0$. C'est l'occasion de revoir les raisonnements sur le degré / terme dominant d'un polynôme.
   On prouve alors que $\ker(\Phi)=\mathbb{R}_1[X]$.
   Autre idée : on part de $P\in\ker(\Phi)$ et on note $Q(X)=P(X+1)-P(X)$. On voit que $Q(X+1)=Q(X)$ ie Q est périodique de période 1.
   On montre alors que Q est constant (ex : avec d'Alembert Gauss : si Q non constant, α est racine on a alors $\alpha+n$ racine pour tout $n\in\mathbb{N}$, d'où infinité de racines) (autre méthode : Q est borné sur $\mathbb{R}$).
   On note alors $Q=\alpha$ si bien que $P(X+1)=P(X)+\alpha$. On recommence avec $R(X)=P(X)-\alpha X$ qui est aussi périodique.
3. On écrit de même $X^2P=a_nX^{n+2}+a_{n-1}X^{n+1}+a_{n-2}X^n+\ldots$. On vérifie alors que $\Phi(X^2P)\in\mathbb{R}_n[X]$ en raisonnant sur le degré et terme dominant. D'où la définition de l'application.
4. On vérifie que cet endomorphisme est injectif, il est alors bijectif car $\dim(X^2\mathbb{R}_n[X])=\dim(\mathbb{R}_n[X])$

5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $n = \deg(P)$. On a alors :

$$\exists! Q \in \mathbb{R}_n[X],\ g(X^2Q) = \Phi(X^2Q) = P$$

X^2Q est donc un antécédent à P par Φ.

✯ Somme et produit de SEV

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires distincts deux à deux (avec $n \geqslant 2$). On considère $f \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que les n SEV $(\ker(f - \lambda_k Id_E))_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont en somme directe.

Indication : procéder par récurrence.

Dans le cas où E est de dimension finie, donner une relation sur les dimensions de ces espaces.

Correction : La démonstration se fait par récurrence sur p. On note $P(p)$ la proposition : « *Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), E_{\lambda_2}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe* ».

Initialisation pour $p = 2$: Soit deux valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes. On veut montrer que $E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u) = \{0\}$.

Pour cela, on considère $x \in E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u)$. On a alors :

$$u(x) = \lambda_1 x \qquad \text{et} \qquad u(x) = \lambda_2 x$$

et donc $\lambda_1 x = \lambda_2 x$ ou encore $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on obtient $x = 0$ et donc $E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u)$.

Hérédité : Soit p fixé tel que $P(p)$ est vraie. On considère donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ $p+1$ valeurs propres distinctes.

On doit montrer que $E_{\lambda_1}(u), E_{\lambda_2}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u), E_{\lambda_{p+1}}(u)$ sont en somme directe.

Pour cela, on considère $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in \prod_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0$$

On applique u, ce qui donne :

$$u\left(\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0\right) = 0 \text{ ie } \sum_{i=1}^{p+1} u(x_i) = 0 \text{ ou encore } \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = 0$$

On a donc deux « lignes » :

$$\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0 \quad \text{ie} \quad \sum_{i=1}^{p} x_i + x_{p+1} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{ie} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0$$

On fait $l_2 \leftarrow l_2 - \lambda_{p+1} l_1$ pour obtenir :

$$\sum_{i=1}^{p} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_{p+1}) x_i}_{\in E_{\lambda_i}(u)} = 0$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ (\lambda_i - \lambda_{p+1}) x_i = 0 \text{ et donc } x_i = 0 \text{ car } \lambda_i \neq \lambda_{p+1}.$$

On en déduit alors que $x_{p+1} = 0$, puis que la somme est directe. D'où l'hérédité.

On en déduit la relation suivante sur les dimensions :

$$\dim\left(\oplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim\left(E_{\lambda_i}\right)$$

et comme $\oplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i} \subset E$, on en déduit :

$$\sum_{i=1}^{n} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) \leqslant \dim(E).$$

Exercice 5

Soit $(f_1,\dots,f_n)$ des endomorphismes de E avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tels que :

$$f_1+\cdots+f_n=Id_E$$
$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, i\neq j \implies f_i\circ f_j=0$$

Montrer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, f_i est un projecteur et que $\bigoplus_{i=1}^{n}\mathrm{Im}(f_i)=E$.

Correction : Soit $i\in[\![1,n]\!]$, on a alors :

$$f_i\circ f_i=f_i\circ\left(Id_E-\sum_{j\neq i}f_j\right)=f_i\circ Id_E=f_i$$

Donc f_i est un projecteur.

Soit $x\in E$, alors :

$$x=Id(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$$

ce qui donne : $\sum_{i=1}^{n}Im(f_i)=E$.

Il reste à prouver que la somme est directe. Pour cela, on considère $x_1,\dots,x_n$ vérifiant :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i\in\mathrm{Im}(f_i),\qquad\text{et}\qquad x_1+\cdots+x_n=0$$

On applique alors f_i ce qui donne :

$$0=f_i(x_1+\cdots+x_n)=x_i+\sum_{j\neq i}f_i(x_j)$$

Or si $j\neq i$, on a $x_j\in\mathrm{Im}(f_j)$, donc x_j s'écrit $x_j=f_j(a_j)$ et donc $f_i(x_j)=f_i(f_j(a_j))=0$. D'où $x_i=0$ et la somme est directe.

⋆ Puissance d'une matrice carrée

Exercice 6 Calcul de puissance par division euclidienne

Soit $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&1&-1\\2&0&2\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3-3A^2+2A. A est-elle inversible ?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par X^3-3X^2+2X ?
3. En déduire A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

Correction :

1. On a par calcul :

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\-4&1&-3\\4&0&4\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\-8&1&-7\\8&0&8\end{pmatrix}$$

On peut ensuite voir que $\det(A)=0$ (il y a une ligne nulle), ou raisonner par l'absurde : si A inversible, alors $A^2-3A+2I=0$ ce qui n'est pas le cas (coef haut gauche).

2. Il faut écrire : $X^3-3X^2+2X=X(X^2-3X+2)=X(X-1)(X-2)$. Soit $n\in\mathbb{N}$, on sait qu'il existe (a_n,b_n,c_n) et Q_n tels que :

$$X^n=Q_nX(X-1)(X-2)+a_nX^2+b_nX+c_n$$

on obtient $c_n=0$ (en évaluant en 0), $a_n+b_n=1$ (en évaluant en 1) et $2^n=4a_n+2b_n$ (en évaluant en 2). D'où les valeurs du reste :

$$a_n=2^{n-1}-1\qquad b_n=2-2^{n-1}\qquad c_n=0.$$

3. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A^2 + b_n A$$

Exercice 7 Calcul de puissance par binôme de Newton

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, où a est un réel quelconque.
Vérifier que $(A+I_3)^3 = 0$.
En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : On calcule :

$$A+I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$$

puis on écrit $A = -I_3 + (A+I_3)$ et on applique la relation de Newton !
On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} n (A+I_3) + (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} (A+I_3)^2$$

Méthode alternative. Écrire la division euclidienne : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, tels que :

$$X^n = (X+1)^3 P(X) + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$$

On évalue en -1 pour avoir une relation : $\alpha - \beta + \gamma = (-1)^n$, puis on dérive puis on évalue en -1 pour avoir une deuxième relation. $-2\alpha + \beta = n(-1)^{n-1}$ et puis on dérive une deuxième fois et on évalue en -1 pour avoir : $2\alpha = (-1)^n n(n-1)$.
Au final :

$$A^n = (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} A^2 + n(-1)^{n-1}(2-n)A + (-1)^n \left(-1 + \frac{n(n-1)}{2} + n(2-n) \right)$$

Exercice 8 Noyaux itérés et endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
On note :

$$A_k = \ker\left(f^k\right) \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \subset A_{k+1}$$

2. Montrer par l'absurde qu'il existe p entier naturel tel que $A_p = A_{p+1}$.
3. Soit p un entier naturel tel que : $A_p = A_{p+1}$, montrer alors que $\forall n \geqslant p,\ A_n = A_p$.
4. Soit f un endomorphisme nilpotent d'ordre r, c'est-à-dire tel que :

$$f^r = 0 \text{ et } f^{r-1} \neq 0$$

Soit $k \in [\![1, r]\!]$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel E_k de E, tel que :

$$A_k = A_{k-1} \oplus E_k$$

5. Vérifier que $\forall k \in [\![1, r]\!],\ E_k \neq \{0\}$.
6. Montrer que $\bigoplus_{k=1}^{r} E_k = E$

1. Si $x \in A_k$, alors $f^k(x) = 0$, en conséquence $f^{k+1}(x) = 0$ et donc $x \in A_{k+1}$.

2. La suite $(\dim(A_k))$ est une suite d'entiers naturels croissante et bornée par $\dim E$. Elle est donc stationnaire et ne peut pas être strictement croissante.
3. On montre par récurrence sur $n \geqslant p$: $\mathscr{P}(n)$: « $A_n = A_p$ ». C'est évident pour $n = p$.
   Soit un n fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai. Montrons que $A_{n+1} = A_p$. On a alors : $A_n \subset A_{n+1}$, donc $A_p \subset A_{n+1}$. Soit $x \in A_{n+1}$. On a alors : $f^{n+1}(x) = 0$, et donc $f^n(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in A_n = A_p$ et donc $x \in A_{p+1} = A_p$, et $x \in A_p$. Ainsi : $A_{n+1} \subset A_p$. et l'hérédité et la conclusion.
4. A_{k-1} est un SEV de A_k, donc il admet un supplémentaire dans A_k. On note E_k ce supplémentaire.
5. Par l'absurde, supposons qu'il existe $k \in [\![1, r]\!]$, tel que $E_k = \{0\}$. Ce qui signifie que $A_k = A_{k-1}$. On a alors en appliquant ce qui précède : $\forall n \geqslant k, A_n = A_{k-1}$, et en particulier $A_r = A_{k-1}$, et donc $E = A_{k-1}$ ce qui signifie que $f^{k-1} = 0$, et est en contradiction avec $f^{r-1} \neq 0$
6. On a :

$$\begin{aligned} E =& A_r = A_{r-1} \oplus E_r \\ =& A_{r-2} \oplus E_{r-1} \oplus E_r = \dots \\ =& A_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_r \end{aligned}$$

   On doit faire une récurrence finie pour remplacer les $\dots$ et on conclue avec $A_0 = \{0\}$.

✯ Projecteurs et symétries

Exercice 9 Crochet de Lie et projecteur

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension n.
Soit :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ f & \longmapsto & p \circ f - f \circ p \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que pour $f \in \mathscr{L}(E)$:

$$f \in \ker(\varphi) \iff (f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p) \text{ et } f(\ker(p)) \subset \ker(p))$$

3. Montrer que $\varphi^3 = \varphi$.
4. On suppose que p est un projecteur de rang r. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}\,\varphi$ et $\ker\varphi$.

Correction :

1. On considère $(f_1, f_2) \in (\mathscr{L}(E))^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on vérifie alors que :

$$\varphi(f_1 + \alpha f_2) = \varphi(f_1) + \alpha\varphi(f_2)$$

2. On procède par double implication. Supposons que $f \in \ker(\varphi)$. On sait alors que $p \circ f = f \circ p$, ie p et f commutent. Considérons $y \in \mathrm{Im}(p)$, montrons alors que $f(y)\,\mathrm{Im}(p)$, ce qui est équivalent à $p(f(y)) = f(y)$. Or on a :

$$p(f(y)) = p \circ f(y) = f \circ p(y) = f(p(y)) = f(y).$$

   Considérons maintenant $x \in \ker(p)$ et montrons que $f(x) \in \ker(p)$. Pour cela, on calcule :

$$p(f(x)) = f(p(x)) = f(0) = 0$$

   D'où l'implication.
   REM : c'est en fait un résultat du cours : si deux endomorphismes commutent : le noyau de l'un est stable par l'autre. Pour la réciproque, on suppose que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables et on montre que f et p commutent.
   Soit $x \in E$, on décompose x sous la forme $x = u + v$, avec $u \in \mathrm{Im}(p)$ et $v \in \ker(p)$. Notons que avec l'hypothèse : $f(v) \in \ker(p)$ et $f(u) \in \mathrm{Im}(p)$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(p(x)) =& f(u) \\ p(f(x)) =& p(f(u)) + p(f(v)) = f(u) \end{aligned}$$

   d'où $p \circ f(x) = f \circ p(x)$ et comme x est quelconque, cela prouve que les deux endomorphismes commutent.

3. Il faut calculer $\varphi \circ \varphi$ puis φ^3.
On a :

$$\begin{aligned}\varphi^2 : f &\longmapsto p\circ(p\circ f - f\circ p) - (p\circ f - f\circ p)\circ p\\ &\longmapsto p\circ f - 2p\circ f\circ p + f\circ p\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}\varphi^3 : f &\longmapsto p\circ(p\circ f - 2p\circ f\circ p + f\circ p) - (p\circ f - 2p\circ f\circ p + f\circ p)\circ p\\ &\longmapsto p\circ f - p\circ f\circ p - (-p\circ f\circ p + f\circ p)\\ &\longmapsto p\circ f - f\circ p\end{aligned}$$

4. On a $\mathrm{Im}(p)\oplus\ker(p) = E$, et on fixe une base $\mathscr{B}$ de E adaptée à cette somme directe et on travaille avec les matrices plutôt qu'avec les endomorphismes.
On a vu que : $f \in \ker(\varphi) \iff \mathrm{Im}(p)$ et $\ker p$ sont stables par f. Ainsi :

$$f \in \ker(\varphi) \iff Mat_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonale par bloc avec un bloc } r\times r \text{ et un bloc } (n-r)\times(n-r)$$

Donc $\dim(\ker(\varphi)) = r^2 + (n-r)^2 = 2r^2 - 2rn + n^2$. Par théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = n^2 - \dim(\ker(\varphi)) = -2r^2 + 2rn$$

Exercice 10 Soit p et q deux projecteurs tels que $p+q$ soit un projecteur.

1. Montrer que $p\circ q + q\circ p = 0$ puis que $poq = qop = 0$.
2. Montrer que : $\ker(p+q) = \ker(p)\cap\ker(q)$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$

Correction :

1. On sait $(p+q)\circ(p+q) = p+q$, or :

$$(p+q)\circ(p+q) = p + p\circ q + q\circ p + q$$

Ainsi : $p\circ q + q\circ p = 0$.
On compose cette relation par p à gauche :

$$p\circ q + p\circ q\circ p = 0 \text{ donc } p\circ q = -p\circ q\circ p$$

puis à droite :

$$p\circ q\circ p + q\circ p = 0 \text{ donc } q\circ p = -p\circ q\circ p$$

Ainsi : $p\circ q = q\circ p = 0$.
2. Soit $x \in \ker(p)\cap\ker(q)$, alors $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$ donc $(p+q)(x) = 0$. D'où une inclusion. Soit $x \in ker(p+q)$, alors $p(x) = -q(x)$. on applique p, cela donne $p(x) = -p\circ q(x) = 0$ avec ce qui précède, on applique q pour obtenir : $q\circ p(x) = -q(x) = 0$. D'où $x \in \ker(p)\cap\ker(q)$, et l'égalité.
Soit $y \in \mathrm{Im}(p+q)$, alors y s'écrit $y = (p+q)(x) = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. D'où l'inclusion.
Soit maintenant $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, alors y s'écrit sous la forme $y = p(a) + q(b)$ avec $(a,b) \in E^2$. On applique p, ce qui donne : $p(y) = p(a)$, on applique q, ce qui donne $q(y) = q(b)$. On peut donc écrire : $y = p(y) + q(y) = (p+q)(y) \in \mathrm{Im}(p+q)$. D'où l'inclusion réciproque et la conclusion.

Exercice 11 Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev E.

Montrer que : ($f\circ g = f$ et $g\circ f = g$) si et seulement si f et g sont des projecteurs de même noyau.

Correction :

On suppose que f et g sont des projecteurs de même noyau. On note G le noyau commun donc et on peut donc écrire : $E = \mathrm{Im}(f)\oplus G$ et $E = \mathrm{Im}(g)\oplus G$ On a alors pour $x \in E$. On a les décompositions :

$$\begin{aligned}x &= \underbrace{g(x)}_{\in \mathrm{Im}(g)} + \underbrace{(x - g(x))}_{\in G}\\ &= \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{(x - f(x))}_{\in G}\end{aligned}$$

donc :

$$f(x) = f(g(x) + (x - g(x))) = f \circ g(x)$$

et donc $f = f \circ g$. Par symétrie (ou en refaisant) : $g = g \circ f$.

D'où l'implication.

On suppose maintenant que $f = f \circ g$ et $g = g \circ f$. On a alors :

$$f \circ f = f \circ g \circ f = f \circ g = f$$
$$g \circ g = g \circ f \circ g = g \circ f = g$$

Ainsi f et g sont des projecteurs.

De plus si $f(x) = 0$, alors :

$$g(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$$

et si $g(x) = 0$, alors :

$$f(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$$

D'où $\ker(f) = \ker(g)$. Et l'implication réciproque.

Exercice 12 Soit p et q deux projecteurs qui commutent, $p \circ q$ est la projection sur F parallèlement à G.

Déterminer F et G en fonction de $\operatorname{Im} p$, $\operatorname{Im} q$, $\ker p$ et $\ker q$.

Correction : Essentiellement il s'agit de déterminer $\ker(p \circ q)$ et $\operatorname{Im}(p \circ q)$.

On sait que :

$$F = \operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(q \circ p) = \ker(p \circ q - Id) = \ker(q \circ p - Id)$$
$$G = \ker(p \circ q) = \ker(q \circ p)$$

Pour $x \in \ker(p)$, on a $p \circ q(x) = q \circ p(x) = 0$, donc $\ker(p) \subset \ker(p \circ q)$. Clairement de même : $\ker(q) \subset \ker(p \circ q)$.
Ainsi : $\ker(p) + \ker(q) \subset \ker(p \circ q)$.
Montrons donc que $G = \ker(p) + \ker(q)$. On a déjà vu : $G \supset \ker(p) + \ker(q)$. Montrons l'inclusion réciproque.
soit $x \in \ker(p \circ q)$ On écrit :

$$x = \frac{1}{2}(p(x) + x - q(x)) + \frac{1}{2}(q(x) + x - p(x))$$

On a :

$$q(p(x) + x - q(x)) = 0 \text{ et } p(q(x) + x - p(x)) = 0$$

Soit $x \in \ker(p \circ q)$
Montrons que $F = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$.
Soit $x \in F$, on a donc $x = p(q(x))$ donc $x \in \operatorname{Im}(p)$ et $x = q(p(x))$ donc $x \in \operatorname{Im}(q)$
Soit $x \in \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$, alors $p(x) = x$ et $q(x) = x$, donc $p \circ q(x) = x$ donc $x \in F$.

Exercice 13 Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $q \circ p = 0$.

1. Montrer que $f = p + q - p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que :

$$\ker(f) = \ker(p) \cap \ker(q) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q)$$

Correction :

1. On calcule $f \circ f$

$$\begin{aligned} f \circ f &= (p + q - p \circ q) \circ (p + q - p \circ q) \\ &= p + \underline{q \circ p} - p \circ \underline{q \circ p} \\ &\quad + p \circ q + q - p \circ q \\ &\quad - p \circ q - \underline{q \circ p} \circ q + \underline{p \circ \underline{q \circ p} \circ q} \\ &= p + q - p \circ q = f \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$ alors $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$ et donc $f(x) = 0$
Soit maintenant $x \in \ker(f)$, on a alors :

$$p(x) + q(x) = p \circ q(x)$$

on compose (à gauche par q). Cela donne :

$$q(x) = 0$$

on en déduit que $p \circ q(x) = 0$ et donc que $p(x) = 0$ et au final : $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. On sait alors que y s'écrit sous la forme : $y = p(x) + q(x) - p \circ q(x)$ pour un certain $x \in E$.
On écrit alors :

$$y = \underbrace{p(x - q(x))}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{q(x)}_{\in \mathrm{Im}(q)} \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$$

REM : autre méthode $p(y) = y$ et $q(y) = y$ donc $f(y) = y + y - y = y$.
Réciproquement, supposons $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. On sait alors :

$$\exists (a,b) \in E^2,\ y = p(a) + q(b)$$

Calculons $f(y)$:

$$\begin{aligned} p(y) &= p(a) + p \circ q(b) \\ q(y) &= q(b) \\ p \circ q(y) &= p \circ q(b) \\ f(y) &= p(y) + q(y) - p \circ q(y) = p(a) + q(b) = y \end{aligned}$$

✯ Changement de base et matrices semblables

Exercice 14 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = \Big((1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1)\Big)$

Correction : il faut appliquer la formule de changement de base du cours. Le plus simple est de passer par l'identité.
On obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Autre idée (plus facile mais non universelle) :

$$\begin{aligned} f((1,0,-1)) &= 2(1,0,-1) \\ f((0,1,1)) &= 2(0,1,1) \\ f((1,0,1)) &= 4(1,0,1) \end{aligned}$$

Exercice 15 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Correction :

Aucun résultat dans le cours permet facilement d'affirmer que deux matrices sont semblables. Seule la réduction permet éventuellement de le faire facilement.

On peut vérifier qu'elles ont même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique. Mais après cela, il faut construire à la main le changement de base.

Chercher une matrice P telle que $AP = PB$ revient à résoudre un système 16×16 avec de plus la condition P inversible. C'est donc impossible en pratique.

Il faut revenir à la définition en cherchant $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_3)$ une base de $\mathbb{K}^4$ telle que :

$$f(e'_1) = e'_1$$
$$f(e'_2) = e'_1 + e'_2 \text{ ie } (A - I_4)e'_2 = e'_1$$
$$f(e'_3) = e'_2 + e'_3 \text{ ie } (A - I_4)e'_3 = e'_2$$
$$f(e'_4) = e'_3 + e'_4 \text{ ie } (A - I_4)e'_4 = e'_3$$

Comme ici les matrices sont triagulaires supérieures, on cherche chaque vecteur un par un. Voici un exemple de solution :

$$e'_1 = (1,0,0,0)$$
$$e'_2 = (0, \frac{1}{2}, 0, 0)$$
$$e'_3 = (0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, 0)$$
$$e'_4 = (0, \frac{5}{16}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8})$$

Il faut ensuite bien vérifier que l'on a trouvé une base.

Il existe une autre méthode, qui s'explique par la théorie. On peut écrire :

$$B = I_4 + N \qquad \text{et} \qquad A = I_4 + 2N + 3N^3 + 4N^3 = I_4 + C$$

où $N^4 = 0$. et en notant $C = 2N + 3N^3 + 4N^4$, on constate que $C^3 \neq 0$ et $C^4 = 0$. Ainsi, en notant u endomorphisme associé C et en choisissant x un vecteur tel que $u^3(x) \neq 0$. on constate que $(u^3(x), u^2(x), u(x), x)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (exercice classique de première année = étude des endomorphismes nilpotents). La matrice de u dans cette base est N. Ainsi, N est semblable à C, et donc il existe $P \in Gl_4(\mathbb{R})$, telle que $N = P^{-1}CP$. Ainsi :

$$P^{-1}AP = P^{-1}(I_4 + C)P = I_4 + P^{-1}CP = I_4 + N = B.$$

Exercice 16 Soit p la projection de $\mathbb{R}^4$ sur :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\big|\, x+y+z+t = 0\} \text{ parallèlement à } G = \{(x,x,x,2x) \,\big|\, x \in \mathbb{R}\}$$

1. Déterminer (e_1, e_2, e_3) base de F.
   On note $e_4 = (1,1,1,2)$.
2. Donner la matrice de p dans la base $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
3. Utiliser cette matrice et une matrice de passage pour trouver la matrice de p dans la base canonique.

Correction :

1. C'est un exemple classique de passage d'un mode de représentation d'un SEV à un autre. On peut par exemple prendre :

   $$e_1 = (1,-1,0,0) \qquad e_2 = (1,0-1,0) \qquad e_3 = (1,0,0,-1)$$

   REM : e_4 est base de G.
2. On a alors :

   $$Mat_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Il faut utiliser la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{C}$.

⋆ Équations linéaires

Exercice 17 Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(R) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 5.$$

Correction : Si on considère $\varphi(u_n) \longmapsto (u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)$ c'est une application linéaire.
On a $\ker(\varphi)$ est l'ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
On trouve facilement :

$$\ker(\varphi) = \text{Vect}((1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}})$$

Il faut ensuite trouver une solution évidente, ici une constante ne suffit pas (même phénomène que pour les équations différentielles). On monte d'un degré et on trouve que $-5n$ est solution évidente.

✯ Trace

Exercice 18

1. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$AB - BA = I_n.$$

2. Soient deux matrices A et B vérifiant $AB - BA = A$. Montrer que A n'est pas inversible.
3. Soit A telle que $Rg(A) = 1$, montrer que $A^2 = Tr(A)A$.
4. Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit A telle que $Tr(A^TA) = 0$. Montrer que $A = A^T = 0$.

Correction :

1. On applique la trace, cela donne $0 = n$.
2. On a $B - A^{-1}BA = I_n$, donc $Tr(B) - Tr(A^{-1}BA) = n$ or $Tr(B) = TR(A^{-1}BA)$ puisqu'elles sont semblables. Ainsi : $0 = n$.
3. Les colonnes de A sont proportionelles. On écrit donc $A = [\lambda_1 C, \lambda_2 C, \ldots, \lambda_n C]$, autrement dit :

$$A = CL \text{ où } L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

en calculant A^2, cela donne : $A^2 = Tr(A)A$, car LC est un réel égal à $Tr(A)$.
Autre idée : la réduction. A est de rang 1, donc X^{n-1} divise χ_A, donc $\chi_A = X^{n-1}(X - tr(A))$. Si la trace est non nulle, alors A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec $P = diag(Tr(A), 0, \ldots, 0)$ et donc $D^2 = Tr(A)D$, d'où la valeur de A^2.
Si la trace est nulle, alors A est triagonalisable (car polynôme caractéristique scindé). $A = PUP^{-1}$ Il n'y a qu'une seule colonne non nulle dans U, ce qui permet facilement de vérifier que $U^2 = 0$. D'où la résultat.
4. Il faut vérifier que $Tr(A^TA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n {a_{ij}}^2$. C'est du cours.

Exercice 19 Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ie une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$). Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(M) = Tr(AM)$$

correction :
analyse : si A existe alors en calculant $\varphi(E_{i,j})$, on a :

$$\varphi(E_{i,j}) = Tr(AE_{i,j}) = a_{ji}$$

Synthèse : on pose donc la matrice A comme ci-dessus, on constate que pour une matrice $M = (m_{ij})$ quelconque :

$$Tr(AM) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}a_{ji}$$

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}\varphi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}a_{ji}$$

D'où l'égalité.

Exercice 20 Soit $\left(E_{ij}\right)_{i,j}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ie $E_{i,j}$ est la matrice dont le coefficient en (i,j) est 1 les autres sont nuls.

1. Calculer $E_{ij}E_{kl}$.
2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (ie une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) telle que :

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer que φ est proportionnelle à la trace.

Correction :

1. $E_{ij}E_{kl} = 0$ si $j \neq k$. Si $j = k$, on a : $E_{ij}E_{jl} = E_{il}$.
On peut le prouver en représentant les matrices et en faisant le produit. Sinon avec le produit matriciel :

$$[E_{ij}E_{kl}]_{a,b} = \sum_{c=1}^{n} [E_{ij}]_{a,c}\,[E_{kl}]_{c,b}$$

or $[E_{ij}]_{a,c}$ est non nul que pour $c = j$ tandis que $[E_{kl}]_{c,b}$ est non nul que pour $c = k$. Donc si $k \neq j$ il n'y a que des termes nuls.
Pour $k = j$. On a un seul terme non nul lorsque $a = i$ et $b = l$ qui vaut 1.
2. On voit que si $i \neq j$:

$$\varphi(E_{ij}) = \varphi(E_{ik}E_{kj}) = \varphi(E_{kj}E_{ik}) = \varphi(0) = 0 \text{ en choisissant } k \text{ quelconque}$$

et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{ik}E_{ki}) = \varphi(E_{ki}E_{ki}) = \varphi(E_{kk})$$

Ainsi pour une matrice $A = (a_{ij})$:

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\varphi(E_{i,j}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)\varphi(E_{11})$$

⋆ Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

Exercice 21 Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = M^4$. On note I_n la matrice identité de taille n.

1. Calculer $(I_n + M)(M^2 - M^3)$.
En déduire que si $I_n + M$ est inversible alors $M^2 = M^3$.
2. Trouver deux polynômes U et V tels que :

$$(1+X)U + \left(X^2 - X^3\right)V = 1.$$

3. Montrer que si $M^2 = M^3$ alors $I_n + M$ est inversible.
Calculer dans ce cas l'inverse de $I_n + M$ comme polynôme en M.

Correction :

1. On vérifie que

$$(I_n + M)(M^2 - M^3) = M^2 - M^4 = 0$$

Ainsi, si $I_n + M$ est inversible, alors elle est simplifiable à gauche et donc $M^2 - M^3 = 0$
2. **REM :** c'est une relation de Bezout entre deux polynômes. Il y a plusieurs techniques (identifications, etc).
On peut faire la division euclidienne de $X^2 - X^3$ par $1 + X$ pour obtenir :

$$X^2 - X^3 = \left(-X^2 + 2X - 2\right)(1+X) + 2$$

donc :

$$(1+X)(X^2 - 2X + 2) + (X^2 - X^3) = 2$$

et on peut donc poser $U = \frac{1}{2}X^2 - X + 1$ et $V = \frac{1}{2}$.

3. en évaluant en M, on a :

$$(I_n+M)U(M)+\left(M^2-M^3\right)V(M)=I_n$$

Si $M^2-M^3=0$, cela donne :

$$(I_n+M)U(M)=I_n$$

et donc I_n+M est inversible avec $(I_n+M)^{-1}=\frac{1}{2}M^2-M+I_n$

Exercice 22 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u\in\mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^3=Id_E$.

1. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, montrer que $E=\ker(u-Id_E)\oplus\ker\left(u^2+u+Id_E\right)$.
2. Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, montrer que $E=\ker(u-Id_E)\oplus\ker(u-\omega Id_E)\oplus\ker(u-\overline{\omega}Id_E)$, où ω est un nombre complexe à déterminer.

Correction :

1. Soit $x\in E$, avec : $x\in\ker(u-Id_E)\cap\ker\left(u^2+u+Id_E\right)$. On a alors :

$$u(x)=x \qquad \text{et} \qquad u^2(x)+u(x)+x=0$$

ce qui donne $3x=0$ et $x=0$. D'où la somme est directe.
On considère $x\in E$.

R Cette partie n'utilise pas $u^3=I_d$.

Analyse : on suppose $x=a+v$ avec $a\in\ker(u-Id_E)$ et $v\in\ker\left(u^2+u+Id_E\right)$. Alors :

$$\begin{aligned}x&=a+v\\u(x)&=a+u(v)\\u^2(x)&=a+u^2(v)\end{aligned}$$

D'où $3a=x+u(x)+u^2(x)$. d'où la valeur de a puis la valeur de v.
Synthèse : on pose donc : $a=\frac{1}{3}\left(x+u(x)+u^2(x)\right)$ et $v=x-a$. On a alors : $x=a+v$ de manière évidente.
Montrons que : $a\in\ker(u-Id_E)$ On a :

$$\begin{aligned}u(a)&=\frac{1}{3}\left(u(x)+u^2(x)+u^3(x)\right)\\&=\frac{1}{3}\left(u(x)+u^2(x)+x\right)\\&=a\end{aligned}$$

Montrons que : $v\in\ker\left(u^2+u+Id_E\right)$. On a :

$$\begin{aligned}v&=\frac{1}{3}\left(2x-u(x)-u^2(x)\right)\\u(v)&=\frac{1}{3}\left(2u(x)-u^2(x)-x\right)\\u^2(v)&=\frac{1}{3}\left(2u^2(x)-x-u(x)\right)\end{aligned}$$

En faisant la somme, on a bien $v+u(v)+u^2(v)=0$.

2. Il faut poser $\omega=j$.
On peut adapter la technique précédente : on considère $(a,b,c)\in\ker(u-Id)\times\ker(u-jId)\times\ker(u-j^2Id)$ vérifiant :

$$a+b+c=0$$

on applique u et u^2 :

$$\begin{cases}a+b+c=0\\a+jb+j^2c=0\\a+j^2b+jc=0\end{cases}$$

on fait alors les opérations :

$$\begin{aligned} l_1+l_2+l_3 &\text{ pour avoir } 3a=0\\ l_1+jl_2+j^2l_3 &\text{ pour avoir } 3c=0\\ l_1+j^2l_2+jl_3 &\text{ pour avoir } 3b=0 \end{aligned}$$

On fixe ensuite x et on fait une analyse synthèse pour trouver $(a,b,c)\in \ker(u-Id)\times\ker(u-jId)\times\ker(u-j^2Id)$ vérifiant : $x=a+b+c$.
Analyse : on applique u et u^2 :

$$\begin{cases} a+b+c=x\\ a+jb+j^2c=u(x)\\ a+j^2b+jc=u^2(x) \end{cases}$$

on fait alors les opérations :

$$\begin{aligned} l_1+l_2+l_3 &\text{ pour avoir } 3a=x+u(x)+u^2(x)\\ l_1+jl_2+j^2l_3 &\text{ pour avoir } 3c=x+ju(x)+j^2u^2(x)\\ l_1+j^2l_2+jl_3 &\text{ pour avoir } 3b=x+j^2u(x)+ju^2(x) \end{aligned}$$

Synthèse : on vérifie rapidement que ces valeur existe et conviennent.
Une autre idée consiste à écrire : u est diagonalisable car il annule un polynôme scindé à racines simples.
Ces valeurs propres sont à chercher dans $\{1,j,j^2\}$.
Supposons que ces trois valeurs sont valeurs propres, alors :

$$E=E_1\oplus E_j\oplus E_{j^2} \text{ car } u \text{ est diagonalisable.}$$

ce qui est le résultat demandé.
Supposons qu'il n'y ait que $\{1,j\}$ qui soit valeurs propres (et pas j^2). On a alors :

$$E=E_1\oplus E_j \text{ et } E_{j^2}=\{0\} \text{ donc de même : } E=E_1\oplus E_j\oplus E_{j^2}$$

Les autres cas sont symétriques.

R La démonstration par la réduction n'est valable qu'en dimension finie.

✯ Formes linéaires

Exercice 23 Soit f et g deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel E de dimension $n\geqslant 2$ telles que $\ker(f)=\ker(g)$.

Montrer que f et g sont proportionnelles.

Correction : ce résultat est du cours. Il a été démontré en cours.

Comme f n'est pas nulle, elle est surjective et donc il existe x_0 tel que $f(x_0)=1$. On a alors :

$$E=\ker(f)\oplus vect(x_0)$$

En effet, si $x\in E$, on peut écrire :

$$x=(x-f(x)x_0)+f(x)x_0$$

On a donc aussi

$$E=\ker(g)\oplus vect(x_0)$$

Si $x\in E$, on décompose x sous la forme :

$$x=u+\alpha x_0 \text{ avec } u\in\ker(f) \text{ et } \alpha\in\mathbb{K}$$

on a alors :

$$f(x)=\alpha \qquad \text{et} \qquad g(x)=\alpha g(x_0)$$

On a donc : $g(x)=f(x_0)f(x)$ pour tout $x\in E$ et $f(x_0)$ ne dépend pas de x.

Exercice 24 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1,\dots,f_p)$, p formes linéaires sur E ($p \geqslant 2$).
Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

1. La famille $(f_1,\dots,f_p)$ est libre.
2. L'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x),\dots,f_p(x)) \end{array} \right.$$

est surjective.

3. il existe une famille $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$ telle que :

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_p(x_1) & \dots & f_p(x_p) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Correction :

Montrons que 1 $\implies$ 2.

On va travailler par récurrence sur p. On note $\mathscr{P}(p)$ la proposition : « Pour une famille $(f_1,\dots,f_p)$ de forme linéaires sur E, si $(f_1,\dots,f_p)$ est libre alors φ est surjective »

Pour $p=1$, la famille (f_1) est libre si et seulement si f_1 est non nulle si et seulement si l'application $x \longmapsto f_1(x)$ est surjective.

Montrons le résultat pour $p=2$. Supposons (f_1,f_2) famille libre, en particulier f_2 est non nulle, on considère alors x_1 tel que $(_1\ x_2$ tel que $f_2(x_2)=1$

Considérons p fixé, tel que $\mathscr{P}(p)$ est vraie.

Déjà, comme la famille $(f_1,\dots,f_p)$ est libre, il est clair qu'aucune des applications linéaires n'est nulle. On considère alors la famille $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ construite de telle manière que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ f_i(x_i)=1$$

Montrons que la famille :

$$(x_1,\dots,x_p) \text{ est libre}$$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ tels que :

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$$

Montrons que 2 $\implies$ 3. Comme φ est surjective, on peut trouver x_1, tel que $(f_1(x_1),\dots,f_p(x_1)) = (1,0\dots,0) = e_1$, puis x_2 tel que : $(f_1(x_2),\dots,f_p(x_2)) = e_2$, etc. Cette famille convient.

Montrons que 3 $\implies$ 1. On considère une combinaison linéaire qui donne 0 :

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = 0 (\text{ ie la forme linéaire nulle})$$

on applique en x_1 ... x_p (dont on a supposé l'existence). Cela donne :

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1(x_1) + \dots + \lambda_p f_p(x_1) &= 0 \\ \lambda_1 f_1(x_2) + \dots + \lambda_p f_p(x_2) &= 0 \\ &\vdots\vdots \\ \lambda_1 f_1(x_p) + \dots + \lambda_p f_p(x_p) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_p(x_1) & \dots & f_p(x_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = 0$$

Comme la matrice est inversible, cela donne que les (λ_i) sont nuls

Exercice 25 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $(f_1,\dots,f_p)$ une famille libre de formes linéaires sur E (avec $p\in\mathbb{N}^*$) et f une autre forme linéaire.

Montrer l'équivalence suivante :

$$\bigcap_{i=1}^{p}\ker(f_i)\subset\ker(f)\iff f\in\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p)$$

Correction :

Pour le sens $\Longrightarrow$, on procède par récurrence pour montrer le résultat suivant : $\mathscr{P}(p)$: Pour toute famille libre $(f_1,\dots,f_p)$ une famille libre de formes linéaires sur E, il existe $x_1,\dots x_p$, p vecteurs de E, tels que :

$$\forall(i,j)\in[\![1,p]\!],\ f_i(x_j)=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

REM :

Pour la réciproque : supposons qu'il existe $(\lambda_1\dots\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$ tel que f s'écrit :

$$f=\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_p f_p$$

soit $x\in\bigcap_{i=1}^{p}\ker(f_i)$, alors :

$$f(x)=\lambda_1\underbrace{f_1(x)}_{=0}+\cdots+\lambda_p\underbrace{f_p(x)}_{=0}=0$$

donc $\bigcap_{i=1}^{p}\ker(f_i)\subset\ker(f)$.

Exercice 26 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v deux vecteurs distincts de E. Construire une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(u)\neq\varphi(v)$.

Indication : construire une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E tel que $e_1=u-v$.

Correction :

On construit donc la base $\mathscr{B}$ ce qui est possible puisqu'on complète le vecteur non nul (et donc la famille libre), $u-v$.

REM : on s'est en fait ramener au problème suivant : soit un vecteur w non nul, trouver une forme linéaire non nulle en w.

Considérons l'application suivante :

$$\varphi:\ x=(x_1,\dots,x_n)_{\mathscr{B}}\longmapsto x_1$$

Alors φ est une forme linéaire. qui vaut 1 en e_1, donc telle que $\varphi(u-v)=1$ en particulier $\varphi(u)\neq\varphi(v)$.

⋆ Exercices de concours

Exercice 27

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\geqslant 2$.
   Montrer que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, si $(H_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est une famille hyperplans de E, alors
   $$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k}H_i\right)\geqslant n-k$$
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\geqslant 2$. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe n hyperplans de E, $H_1,\dots,H_n$ stables par f et tels que $\bigcap_{i=1}^{n}H_i=\{0_E\}$.
   Montrer que f est diagonalisable.

Correction :

1. On considère pour $i\in ii1k$, f_i une forme linéaire telle que $H_i=\ker(f_i)$. On construit alors :
   $$f:\left\{\begin{array}{ccc}E&\to&\mathbb{K}^k\\ x&\longmapsto&(f_1(x),\dots,f_k(x))\end{array}\right.$$

On a alors :

$$\ker(f) = \bigcap_{i=1}^{k} H_i \text{ et } rg(f) \leqslant k$$

ainsi :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\right) = n - rg(f) \geqslant n - k$$

2.

Fonctions génératrices

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

✯ Définition

Définition III.20 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La série génératrice de X est la série entière $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n\right)$ notée G_X.

Proposition III.8 La série génératrice de X a un rayon de convergence noté R_X au moins égal à 1.

On a de plus :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X(t) = E(t^X)$$

Enfin, la série entière G_X converge normalement sur $[-1,1]$.

Démonstration. On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n) = 1$ ainsi, le rayon de convergence est au moins égal à 1.

La formule $G_X(t) = E(t^X)$ provient directement du théorème de transfert (t^X est une variable aléatoire composée).

Comme le rayon est a moins égal à 1, on sait qu'il y a convergence normale sur tout segment de $]-1,1[$, on va montrer qu'il y a convergence normale sur $[-1,1]$:

$$\forall t \in [-1,1],\ |p(X=n)t^n| \leqslant p(X=n)$$

et $\sum p(X=n)$ converge, d'où la convergence normale sur $[-1,1]$. ■

- On appelle fonction génératrice de la variable aléatoire X la fonction $t \longmapsto G_X(t)$. Cette fonction est au moins définie sur $]-1,1[$ puisque le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1.
  En fait, on voit que $G_X(1) = 1$ et que la série $G_X(-1)$ converge absolument. Donc cette fonction est définie au moins sur $[-1,1]$. Comme il y a convergence normale sur $[-1,1]$, la fonction génératrice est continue sur $[-1,1]$.
  Notons aussi que $G_X(0) = p(X=0)$.
- On peut aussi définir la série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, c'est alors un polynôme.

Proposition III.9 La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X. Autrement dit, deux variables aléatoires qui ont la même fonction génératrice ont la même loi.

Démonstration. C'est l'unicité du développement en série entière de la fonction $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n$, puisqu'on a vu que le rayon est strictement positif. ■

R Ainsi, on calcule parfois la fonction génératrice pour avoir la loi.

✯ Lien avec l'espérance et la variance

Proposition III.10 La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si : G_X est dérivable en 1. Dans ce cas on a : $E(X) = G'_X(1)$

La variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ si et seulement si : G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= G''_X(1) \\ \text{et donc} \qquad V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2 \end{aligned}$$

On retrouve très facilement ces résultats

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n$$

$$\text{donc } \forall t \in]-R_X, R_X[,\ G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(X=n)t^{n-1}$$

$$\text{en particulier } G'_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(X=n) = E(X) \qquad \text{si } R_X > 1.$$

De même :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} p(X=n)n(n-1)t^{n-2}$$

$$\text{en particulier } G''_X(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} p(X=n)n(n-1) \qquad \text{si } R_X > 1$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p(X=n) = E(X(X-1)) \qquad \text{avec le théorème de transfert}$$

$$\text{enfin } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$$

$$= G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$$

La seule difficulté de la démonstration est de prouver que l'on peut faire ces dérivations dans le cas où $R_X = 1$. Conformément au programme, on admet ces démonstrations.

R En particulier, si on prouve que le rayon de convergence de la série génératrice est strictement supérieur à 1, alors les hypothèses sont clairement vérifiées.

Cette proposition a un intérêt que si on écrit la fonction génératrice G_X sans le symbole somme (ie si on a reconnu le développement d'une série entière d'une fonction usuelle). Dans ce cas, on dérive l'expression obtenue pour avoir l'espérance.

Bien retenir la relation : $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$.

⋆ Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes

Proposition III.11 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ **indépendantes**. On a alors :

$$G_{X+Y} = G_X \times G_Y \quad \text{au sens où } R_{X+Y} \geqslant \min(R_X, R_Y) \text{ et } \forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_X, R_Y) \implies G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

Démonstration. On a en utilisant les probas totales avec le SCE associé à X :

$$\forall t \in]-R_{X+Y}, R_{X+Y}[,\ G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X+Y=n)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p(X=k \cap Y=n-k) \right) t^n$$

dans cette écriture, on a enlevé les termes nuls.

On utilise alors l'indépendance pour écrire :

$$\forall t \in]-R_{X+Y}, R_{X+Y}[,\ G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p(X=k)p(Y=n-k) \right) t^n$$

C'est donc le produit de Cauchy des deux séries entières :

$$G_X = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=n)t^n \qquad \text{et} \qquad G_Y = \sum_{n=0}^{+\infty} p(Y=n)t^n$$

D'après les propriétés du produit de Cauchy des séries entières, on obtient que le rayon de convergence R_{X+Y} de la série entière G_{X+Y} vérifie :

$$R_{X+Y} \geqslant \min(R_X, R_Y)$$

et on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_X, R_Y) \implies G_{X+Y}(z) = G_X(z) G_Y(z).$$

■

R La réciproque est fausse : on peut avoir $G_{X+Y} = G_X G_Y$ et X et Y non indépendante !

- On peut aussi remarquer que à $t \in \mathbb{R}$ fixé, tel que $|t| \leqslant \min(R_X, R_Y)$ on a :

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= E\left(t^{X+Y}\right) \\ &= E\left(t^X\right) E\left(t^Y\right) && \text{par indépendance des VAR } t^X \text{ et } t^Y \\ &= G_X(t) G_Y(t) \end{aligned}$$

On a une généralisation au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

Proposition III.12 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ **indépendantes**. On a alors :

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = G_{X_1} \ldots G_{X_n}$$

au sens où :

$$R_{X_1+\cdots+X_n} \geqslant \min\left(R_{X_1}, \ldots, R_{X_n}\right)$$

et :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \min(R_{X_1}, \ldots, R_{X_n}) \implies G_{X_1+\cdots+X_n}(z) = G_{X_1}(z) \ldots G_{X_n}(z)$$

- Cette proposition est très utile dans le cas où on cherche la loi de la somme.

✯ Cas des variables aléatoires finie

Pour les variables aléatoires finies vues en première année, la fonction caractéristique est un polynôme.

Proposition III.13 Soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \frac{1}{n}(t + t^2 + \cdots + t^n) = \begin{cases} \dfrac{t}{n}\left(\dfrac{1-t^n}{1-t}\right) & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Démonstration. On a clairement :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} t^k$$

On reconnaît une série géométrique de raison t ■

On peut retrouver $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ sur cet exemple :

$$\begin{aligned} G'_X(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k t^{k-1} \\ \text{et donc} \qquad G'_X(1) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2} = E(X) \end{aligned}$$

et ensuite :

$$G_X''(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)t^{k-2}$$

et donc
$$\begin{aligned} G_X''(1) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - k\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$E(X(X-1)) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2}$$

et donc :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right) \\ &= \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{n-1}{6}\right) = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

R Dans ce cas, le seul intérêt est de présenter les calculs : on aurait fait les mêmes calcul en calculant directement $V(X)$.

Proposition III.14 Soit $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = 1 - p + pt$$

On retrouve en particulier $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

Démonstration. On a $p(X=0) = 1-p$ et $p(X=1) = p$, d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1-p) + pt$$

Ainsi, $G_X'(1) = p$, $G_X''(1) = 0$.
Donc $E(X) = p$ et

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left(X(X-1)\right) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= p - p^2 = pq \end{aligned}$$

■

Proposition III.15 Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1-p+pt)^n$$

On retrouve en particulier $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k \\ &= (1-p+pt)^n \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G'_X(t) = pn(1-p+pt)^{n-1}$$

et donc $G'_X(1) = np$.

On a aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G''_X(t) = p^2 n(n-1)(1-p+pt)^{n-2}$$

et donc $G''_X(1) = p^2 n(n-1)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} V(X) &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ &= np\left((n-1)p + 1 - np\right) \\ &= npq \end{aligned}$$

R On peut aussi écrire $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ sont indépendantes. En conséquence :

$$G_X(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = (G_{X_1}(t))^n = (1-p+pt)^n$$

■

⋆ Exercices

Exercice 1 loi géométrique tronquée

Soit n un entier naturel on considère une pièce telle que la probabilité d'avoir pile est $p \in]0,1[$.
On fait n tirages Pile/Face en s'arrêtant au premier Pile ou au bout de n tirages si il n'y a pas eu de Pile.
On note X la variable aléatoire définie ainsi :

$X = 0$ si pas de Pile, $\quad X = i$ où i est le rang du premier Pile.

Donner la loi de X, sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.

Correction : On a :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1,n]\!],\ p(X=i) &= p(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap P_i) \\ &= q^{i-1}p \end{aligned}$$

d'autre part, $p(X=0) = q^n$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) &= q^n + \sum_{i=1}^{n} pq^{i-1}t^i \\ &= q^n + \frac{p}{q}\sum_{i=1}^{n}(tq)^i \\ &= q^n + pt\left(\frac{1-t^n q^n}{1-tq}\right) \end{aligned}$$

On dérive :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G'_X(t) = p\left(\frac{1-t^n q^n}{1-tq}\right) - npq^n t^n \frac{1}{1-tq} + pqt(1-t^n q^n)\frac{1}{(1-tq)^2}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} E(X) = G'_X(1) &= (1-q^n) - nq^n + q(1-q^n)\frac{1}{p} \\ &= (1-q^n)\left(1+\frac{q}{p}\right) - nq^n \\ &= (1-q^n)\frac{1}{p} - nq^n \end{aligned}$$

Pour la variance il faut dériver une deuxième fois. On commence par simplifier :

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\ G'_X(t) &= p\left(\frac{1-t^nq^n}{1-tq}\right) - npq^nt^n\frac{1}{1-tq} + pqt(1-t^nq^n)\frac{1}{(1-tq)^2}\\ &= \frac{p}{(1-tq)^2}\left((1-tq)(1-t^nq^n) - nq^nt^n(1-tq) + qt\right)\\ &= \frac{p}{(1-tq)^2}\left((1-tq)t^nq^n(1-n)+1\right)\end{aligned}$$

Cela donne :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ G'_X(t) = \frac{2pq}{(1-tq)^3}\left((1-tq)t^nq^n(1-n)+1\right) + \frac{p}{(1-tq)^2}\left(-qt^nq^n(1-n) + (1-tq)nt^{n-1}q^n(1-n)\right)$$

Ce qui donne :

$$G''_X(1) = \frac{2q}{p^2}\left(pq^n(1-n)+1\right) + \frac{1}{p}\left(-q^{n+1}(1-n) + pnq^n(1-n)\right)$$

il reste alors à calculer la variance.

Exercice 2 **Extrait de Centrale PSI 2019**

On dispose d'un stock infini de boules noires et blanches. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

- on tire au hasard une boule de l'urne ;
- on replace dans l'urne la boule tirée ;
- on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires par $X_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, X_n donne le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages. On note g_n la fonction génératrice de la variable X_n. On rappelle que $g_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = k)t^k$.

Q 1. Déterminer les lois de X_1, X_2 et X_3 puis les fonctions g_1, g_2 et g_3.

Q 2. Soient n et k deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Établir que

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n+1}P(X_{n-1} = k-1) + \frac{n+1-k}{n+1}P(X_{n-1} = k).$$

Q 3. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout réel t,

$$g_n(t) = \frac{t^2-t}{n+1}g'_{n-1}(t) + g_{n-1}(t)$$

Q 4. Démontrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ et tout réel t,

$$g_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} t^k.$$

Q 5. Identifier la loi de X_n et donner son espérance.

Correction :

1. Notons d'abord qu'il est assez clair que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ (le cas où $X_n(\omega) = n+1$ correspondrait à une expérience où l'on a tiré systématiquement une boule blanche).

   L'évènement $(X_1 = 1)$ est l'évènement : « tirer une boule noire au premier tirage » tandis que l'évènement $(X_1 = 2)$ est l'évènement : « tirer une boule blanche au premier tirage ». Puisque l'urne a initialement une boule blanche et une boule noire (donc deux boules au total), et qu'on présume le tirage uniforme, on a donc :

   $$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

   Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'évènements $((X_1 = 1), (X_1 = 2))$:

   $$\forall k\in\{1,2,3\},\quad P(X_2 = k) = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = k) + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = k).$$

Or $P(X_1=1)=P(X_1=2)=\frac{1}{2}$ d'après ce qui précède, et il y a X_1 boules blanches dans l'urne après le premier tirage, pour trois boules au total (et donc $3-X_1$ boules noires). Cela nous permet de calculer les différentes probabilités conditionnelles : pour que $(X_2=k)$ se réalise, il faut que $(X_1=k-1)$ se réalise et qu'on tire une boule blanche au deuxième tirage, OU que $(X_1=k)$ se réalise et qu'on tire une boule noire au deuxième tirage. Nous avons donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(X_2=1) &=& \frac{1}{2}P_{(X_1=1)}(X_2=1)=\frac{1}{2}\times\frac{3-1}{3}=\frac{1}{3},\\ P(X_2=2) &=& \frac{1}{2}\left(P_{(X_1=1)}(X_2=2)+P_{(X_1=2)}(X_2=2)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{3-2}{3}\right)=\frac{1}{3},\\ P(X_2=3) &=& \frac{1}{2}P_{(X_1=2)}(X_2=3)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Le même raisonnement que ci-dessus implique :

$$\forall k\in[\![1,4]\!],\quad P(X_3=k)=P(X_2=k-1)P_{(X_2=k-1)}(X_2=k)+P(X_2=k-1)P_{(X_2=k)}(X_3=k).$$

pour que $(X_3=k)$ se réalise, il faut que $(X_2=k-1)$ se réalise et qu'on tire une boule blanche au troisième tirage, OU que $(X_2=k)$ se réalise et qu'on tire une boule noire au troisième tirage. Or il y a X_2 boules blanches dans l'urne après deux tirages, pour quatre boules au total (et donc $4-X_2$ boules noires). On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(X_3=1) &=& \frac{1}{3}P_{(X_2=1)}(X_3=1)=\frac{1}{3}\times\frac{4-1}{4}=\frac{1}{4},\\ P(X_3=2) &=& \frac{1}{3}\left(P_{(X_2=1)}(X_3=2)+P_{(X_2=2)}(X_3=2)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{4-2}{4}\right)=\frac{1}{4},\\ P(X_3=3) &=& \frac{1}{3}\left(P_{(X_2=2)}(X_3=3)+P_{(X_2=3)}(X_3=3)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{4}+\frac{4-3}{4}\right)=\frac{1}{4}\\ P(X_3=4) &=& \frac{1}{3}P_{(X_1=3)}(X_3=4)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

En résumé :

$$\left\{\begin{array}{lll} \forall k\in\{1,2\}, & P(X_1=k) &= \frac{1}{2},\\ \forall k\in\{1,2,3\}, & P(X_2=k) &= \frac{1}{3},\\ \forall k\in[\![1,4]\!], & P(X_3=k) &= \frac{1}{4}, \end{array}\right.$$

Le calcul de leurs fonctions génératrices est alors immédiat :

$$\forall t\in[-1,1],\quad \left\{\begin{array}{lcl} g_1(t) &=& \sum_{k=1}^{2}P(X_1=k)t^k=\frac{1}{2}\left(t+t^2\right),\\ g_2(t) &=& \sum_{k=1}^{3}P(X_2=k)t^k=\frac{1}{3}\left(t+t^2+t^3\right),\\ g_3(t) &=& \sum_{k=1}^{4}P(X_3=k)t^k=\frac{1}{4}\left(t+t^2+t^3+t^4\right), \end{array}\right.$$

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Pour obtenir la relation demandée, on reprend le même raisonnement que pour X_2 et X_3 : pour que $(X_n=k)$ se réalise, il faut que $(X_{n-1}=k-1)$ se réalise et qu'on tire une boule blanche au n-ième tirage, OU que $(X_{n-1}=k)$ se réalise et qu'on tire une boule noire au n-ième tirage. Si $(X_{n-1}=j)$ se réalise avec $j\notin\{k-1,k\}$, alors il est impossible de réaliser l'évènement $(X_n=k)$.
Or il y a X_{n-1} boules blanches et $n+1-X_{n-1}$ boules noires dans l'urne après $n-1$ tirages, pour $n+1$ boules au total. On en déduit, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\left((X_{n-1}=j)\right)_{j\in[\![1,n]\!]}$:

$$\begin{aligned} P(X_n=k) &= P(X_{n-1}=k-1)P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n=k)+P(X_{n-1}=k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n=k)\\ &= \frac{k-1}{n+1}P(X_{n-1}=k-1)+\frac{n+1-k}{n+1}P(X_{n-1}=k), \end{aligned}\tag{4.3}$$

d'où le résultat.

3. Les variables aléatoires X_n, pour $n\in\mathbb{N}$, sont à support fini, donc les fonctions génératrices sont des applications polynomiales, et sont en particulier définies sur $\mathbb{R}$. Soient $t\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.
Pour tout $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on multiplie la relation (4.3) par t^k, et on somme la relation obtenue pour k allant de 1 à $+\infty$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty}P(X_n=k)t^k &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k-1}{n+1}P(X_{n-1}=k-1)t^k+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n+1-k}{n+1}P(X_{n-1}=k)t^k\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)P(X_{n-1}=k-1)t^k+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty}(n+1-k)P(X_{n-1}=k)t^k\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}kP(X_{n-1}=k)t^{k+1}+(n+1)\sum_{k=1}^{+\infty}P(X_{n-1}=k)t^k-\sum_{k=1}^{+\infty}kP(X_{n-1}=k)t^k\right)\\ &= \frac{t^2-t}{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty}kP(X_{n-1}=k)t^{k-1}+\sum_{k=1}^{+\infty}P(X_{n-1}=k)t^k. \end{aligned}$$

(nous pouvons bien scinder la somme en deux, puisqu'elles sont en vérité finies et il n'y a pas de problème de convergence). La seconde somme du membre de droite est $g_{n-1}(t)$ par définition d'une fonction génératrice (notons qu'on a $P(X_{n-1}=0)=0$). La première somme est la dérivée de $t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_{n-1}=k)t^k = g_{n-1}(t)$. On en déduit :

$$g_n(t) = \frac{t^2-t}{n+1} g'_{n-1}(t) + g_{n-1}(t),$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, soit P_n la proposition :

$$\text{« } \forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} t^k \text{ ».}$$

Nous allons démontrer qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ par récurrence sur n.
Si $n=1$ alors elle est vraie, d'après le calcul de g_1 effectué dans la question 1. D'où l'initialisation.
Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel qu'on ait P_n. D'après la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_{n+1}(t) = \frac{t^2-t}{n+2} g'_n(t) + g_n(t).$$

Or, d'après P_n, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} t^k, \text{ et donc : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad g'_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k t^{k-1}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_{n+1}(t) &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{t^2-t}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1} k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} t^k\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=1}^{n+1} k t^{k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} k t^k + (n+2)\sum_{k=1}^{n+1} t^k\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=2}^{n+2} (k-1) t^k - \sum_{k=1}^{n+1} k t^k + (n+2)\sum_{k=1}^{n+1} t^k\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}\left((n+1)t^{n+2} - \sum_{k=1}^{n+1} t^k + (n+2)\sum_{k=1}^{n+1} t^k\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2}\left((n+1)t^{n+2} + (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} t^k\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \times (n+1)\sum_{k=1}^{n+2} t^k.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_{n+1}(t) = \frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+2} t^k,$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, P_n implique bien P_{n+1}.
Nous avons démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition P_n, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ par principe de récurrence. C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} t^k.$$

5. De l'expression de la fonction génératrice ci-dessus et de l'unicité de ses coefficients, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall k \in [\![1, n+1]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

On voit que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, la variable aléatoire X_n suit une loi de probabilité uniforme de paramètre $n+1$. Le calcul de l'espérance est alors un résultat de cours :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad E(X_n) = \frac{n+2}{2}.$$

✯ Cas des lois usuelles sur $\mathbb{N}$

Proposition III.16 Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors sa série génératrice est :

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-t(1-p)} \qquad \text{de rayon de convergence } R_X = \frac{1}{1-p} > 1$$

Démonstration. On a :

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(X=n)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n$$

Série géométrique de raison : $t(1-p)$ et de premier terme pt. Le rayon est donc : $R_X = \frac{1}{1-p}$, et :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G_X(t) = \frac{pt}{1-t(1-p)} = \frac{pt}{1-qt}$$

■

On retrouve en particulier le résultat :

Proposition III.17 Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$

Démonstration. En dérivant, on a :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G'_X(t) = \frac{p(1-qt)+pqt}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}$$

et donc :

$$G'_X(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

d'où $E(X) = \frac{1}{p}$

On a aussi :

$$\forall t \in]-R_X, R_X[,\ G''_X(t) = p(-2)(-q)\frac{1}{(1-qt)^3} = 2pq\frac{1}{(1-qt)^3}$$

et donc :

$$G''_X(1) = 2pq\frac{1}{(1-q)^3} = 2\frac{q}{p^2}$$

Puis :

$$\begin{aligned} V(X) &= 2\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1}{p^2}(2q+p-1) = \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

■

Proposition III.18 Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors sa série génératrice est :

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \qquad \text{de rayon de convergence } R_X = +\infty.$$

On retrouve en particulier l'espérance $E(X) = \lambda$ et la variance $V(X) = \lambda$.

Démonstration. On a :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k$$

l'application de la règle de d'Alembert donne que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) =& e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ =& e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.\end{aligned}$$

En dérivant :

$$\begin{aligned}&\forall t \in \mathbb{R},\ G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} \\ &\text{et donc } G'_X(1) = \lambda = E(X) \\ &\forall t \in \mathbb{R},\ G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)} \\ &\text{et donc } G''_X(1) = \lambda^2 = E(X(X-1))\end{aligned}$$

On obtient ensuite :

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

■

On retrouve aussi que si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et si $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

On utilise le résultat sur la fonction génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Ainsi : $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

✯ Exercices

Exercice 3 Soit x un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi de probabilité est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(X=n) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

1. Calculer sa série génératrice G_X à l'aide de fonctions usuelles.
2. En déduire son espérance et sa variance.

Correction :

1. On obtient :

$$G_X(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} t^n \right)$$

le rayon de convergence est $+\infty$
Dans le cas où $t \geqslant 0$, cela donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ G_X(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} \right) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{t}x)}{\operatorname{ch} x}$$

Dans le cas où $t \leqslant 0$, cela donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ G_X(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x\sqrt{-t})^{2n}}{(2n)!} \right) = \frac{\cos(\sqrt{-t}x)}{\operatorname{ch} x}$$

2. On dérive :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+,\ G'_X(t) =& \frac{x \operatorname{sh}(x\sqrt{t})}{2\sqrt{t} \operatorname{ch} x} \\ G''_X(t) =& \frac{x}{2\operatorname{ch}(x)} \left(\operatorname{ch}\left(x\sqrt{t}\right) \frac{x}{2t} - \operatorname{sh}\left(x\sqrt{t}\right) \frac{1}{2t\sqrt{t}} \right)\end{aligned}$$

Rappel : on a les relations : $\text{ch}' = \text{sh}$, $\text{sh}' = \text{ch}$, $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$, $= \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$, $1 - {}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2}$.
Ce qui donne :

$$E(X) = \frac{xx}{2}$$
$$E(X(X-1)) = \frac{x}{4}(x - (x))$$

Il reste alors à calculer la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \frac{x}{4}(x-(x)) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}{}^2(x) \\ &= \frac{x^2}{4}\left(1 - {}^2(x)\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{4}(x) \\ &= \frac{x^2}{4\text{ch}^2(x)} + \frac{x}{2} - \frac{x}{4}(x) \end{aligned}$$

Exercice 4 Soit X une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $p_n = p(X = n)$ et $r_n = p(X > n)$, et on note G la série génératrice de X.

1. Quelle relation a-t-on entre la série $\sum p_n$ et la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On considère la série entière $\sum r_n t^n$.
   Montrer que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
3. Pour $|t| < 1$, on pose $H(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$. Montrer que $H(t) = \dfrac{1 - G(t)}{1 - t}$.

Correction :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, r_n est le reste de la série convergente (vers 1) $\sum p_n$.
2. La suite (r_n) tends vers 0, donc $R \geqslant 1$.
   NB : on ne sait pas que X admet une espérance et donc on n'a pas l'hypothèse $\sum r_n$ converge.
3. Il faut écrire pour $|t| < 1$:

$$\begin{aligned} (1-t)H(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^{n+1} \\ &= r_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (r_n - r_{n-1}) t^n = 1 - p_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n = 1 - G(t). \end{aligned}$$

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$, et σ une permutation de $[\![1,n]\!]$ représentée par le n-uplet $\sigma = \Big(\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\Big)$.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on dit que $\sigma(i)$ est un **maximum provisoire** de σ si :

$$\sigma(i) = \max\Big(\sigma(1), \ldots, \sigma(i)\Big)$$

Exemple : si $n = 6$ et $\sigma = (2,5,4,1,6,3)$ présente des maximums provisoires en $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 5$ et $\sigma(5) = 6$ et
Interprétation : on tire les n jetons de $[\![1,n]\!]$ un à un sans remise jusqu'au dernier, et on constate qu'au tirage i, on a un « record » : un nombre plus grand que tous ceux obtenus précédemment.

1. Quelles sont les permutations pour lesquelles le nombre de maximums provisoires est 1 (resp. n).
   Si k est un entier compris entre 1 et n, on note $M_{n,k}$ le nombre de permutations ayant k maximums provisoires.
2. Déterminer $M_{n,1}$ et $M_{n,n}$.
3. On suppose $n \geqslant 3$. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$,

   $$M_{n,k} = (n-1)M_{n-1,k} + M_{n-1,k-1}$$

   On pourra, pour une permutation σ, discuter suivant que $\sigma(n) = n$ ou non.
   Dans la suite on désigne par X_n la VARD représentant le nombre de maximums provisoires de $[\![1,n]\!]$.
4. Justifier que $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$
5. Si G_{X_n} désigne la fonction génératrice de X_n, que vaut $G_{X_n}(1)$?
6. Exprimer $P(X_n = k)$ à l'aide de $M_{n,k}$.

7. Montrer :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant 2, G_{X_n}(t) = \left(\frac{t+n-1}{n}\right) G_{X_{n-1}}(t)$$

8. En déduire $G_{X_n}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
9. Donner la loi de X_4. Déterminer G_{X_4} et en déduire $E(X_4)$ et $V(X_4)$.
10. Déterminer $E(X_n)$ sous forme d'une somme. Déterminer $\lim\limits_{n\infty} E(X_n)$.

Correction :

1. Le nombre de maximums provisoires est 1 si $\sigma(1) = n$. Le nombre de maximums provisoires est n si $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$.
2. $M_{n,1} = (n-1)!$ et $M_{n,n} = 1$ d'après ce qui précède.
3. On note :

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{n,k} &= \{\sigma \in \Sigma(n) | \sigma \text{ a } k \text{ maximums provisoires}\}\\ A &= \{\sigma \in \mathscr{M}_{n,k} | \sigma(n) = n\}\\ B &= \{\sigma \in \mathscr{M}_{n,k} | \sigma(n) \neq n\}\end{aligned}$$

on a :$\mathscr{M}_{n,k} = A \cup B$ union disjointe.
Les éléments de A s'identifie aux éléments de $\mathscr{M}_{n-1,k-1}$ auquels on a ajoute n à la fin. donc $\text{Card}(A) = M_{n-1,k-1}$.
Pour les éléments de B, on fait un choix successif

- choix de $\sigma(n)$: c'est un entier de $[\![1, n-1]\!]$,
- choix du reste de la permutation ce qui s'identifie avec le choix d'une permutation de $\mathscr{M}_{n-1,k}$

Ainsi, on obtient : $\text{Card}(B) = (n-1)M_{n-1,k}$.
D'où la relation.

4. évident. Pour avoir $X_n = k$, il faut prendre $(n-k+1, \ldots, n, , *, *, * \ldots)$.
5. $G_n(1)) = 1$ cours.
6. $p(X_n = k) = \frac{M_{n,k}}{n!}$ en munissant l'ensemble des permutations de la proba uniforme.
7. On part de :

$$\begin{aligned}\left(\frac{t+n-1}{n}\right) G_{X_{n-1}}(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1)M_{n-1,i-1}}{n!} t^i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{n-1,i}}{n!} t^{i+1}\\ &= \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{n,i}}{n!} t^i - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{n-1,i-1}}{n!} t^i + p(X_n = 1)t + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{n-1,i}}{n!} t^{i+1}\\ &= G_{X_n}(t) - p(X_n = n)t^n - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{n-1,i-1}}{n!} t^i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{n-1,i}}{n!} t^{i+1}\end{aligned}$$

On fait ensuite un changement de variable pour avoir :

$$\begin{aligned}-\sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{n-1,i-1}}{n!} t^i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{n-1,i}}{n!} t^{i+1} &= -\sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{n-1,i-1}}{n!} t^i + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{M_{n-1,i}}{n!} t^{i+1} + \frac{M_{n-1,n-1}}{n!} t^n\\ &= \frac{M_{n-1,n-1}}{n!} t^n = \frac{M_{n,n}}{n!} t^n = p(X_n = n)t^n\end{aligned}$$

D'où :

$$G_{X_n}(t) = \left(\frac{t+n-1}{n}\right) G_{X_{n-1}}(t)$$

8. Par récurrence :

$$G_{X_n}(t) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t+k)$$

9. On a :

$$\begin{aligned}G_{X_4}(t) &= \frac{1}{24} t(t+1)(t+2)(t+3)\\ &= \frac{1}{24} \left(t^3 + 6t + 11t^2 + 6t\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$p(X_4=1)=\frac{6}{24} \qquad p(X_4=2)=\frac{11}{24} \qquad p(X_4=3)=\frac{6}{24} \qquad p(X_4=4)=\frac{1}{24}$$

On calcule ensuite $G'_{X_4}(1)$ et $G''_{X_4}(1)$ ce qui est facile car on a la forme développée.

10. On a :

$$G'_{X_n}(t)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1}(t+k)$$

et donc :

$$\begin{aligned}G'_{X_n}(1)=&\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1}(1+k)\\=&\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n!}{i+1}\\=&\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+1}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i}\underset{n\infty}{\sim}\ln(n)\end{aligned}$$

Exercice 6 On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. On note X_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième lancer. On pose :

$$M_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k) \qquad \text{et} \qquad m_n=\min_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k)$$

1. Donnez la loi des X_k et leur fonction de répartition F.
2. Exprimez la fonction de répartition F_n de M_n à l'aide de F.
3. Déterminez la limite simple de la suite (F_n). La convergence est-elle uniforme ?
4. Déterminez la fonction de répartition G_n de m_n.

Correction :

1. $X_k\sim U(\llbracket 1,6\rrbracket)$. ainsi on a leur fonction de répartition :

$$F:x\longmapsto p(X\leqslant x)\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ \frac{1}{6} & \text{si } x\in[1,2[\\ \frac{2}{6} & \text{si } x\in[2,3[\\ \frac{3}{6} & \text{si } x\in[3,4[\\ \frac{4}{6} & \text{si } x\in[4,5[\\ \frac{5}{6} & \text{si } x\in[5,6[\\ 1 & \text{si } x\geqslant 6\end{cases}$$

2. On a pour $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}F_n(x)=p\left(M_n\leqslant x\right)=&p\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k\leqslant x)\right)\\=&\prod_{k=1}^{n}p\left((X_k\leqslant x)\right) && \text{par indépendance}\\=&(F(x))^n\end{aligned}$$

3. Clairement, la suite (F_n) converge simplement vers :

$$L:x\longmapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<6\\ 1 & \text{si } x\geqslant 6\end{cases}$$

De plus :

$$\|F_n - L\|_\infty = \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Il y a donc convergence uniforme.

4. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G_n(x) =& p(m_n \leqslant x) = 1 - p(m_n > x) \\ =& 1 - p\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k > x)\right) \\ =& 1 - \prod_{k=1}^{n} p\left((X_k > x)\right) && \text{par indépendance} \\ =& 1 - \prod_{k=1}^{n} \left(1 - p\left((X_k \leqslant x)\right)\right) \\ =& 1 - (1 - F(x))^n \end{aligned}$$

Exercice 7 On lance indéfiniment un dé parfait. Les lancers sont supposés indépendants.

1. En dérivant : $f : x \longmapsto \frac{1}{1-x}$, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

puis que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

2. On note X « le rang d'apparition du 1er six » et Y : « le nombre de cinq obtenus avant l'apparition du 1er six ». Soit n et k deux entiers naturels. Calculer $P(X = n \cap Y = k)$ puis $P(Y = k)$.
3. On note S_q « le rang d'apparition du q-ième six » pour $q \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de probabilité de la variable S_q.
4. Déterminer G la fonction génératrice de S_q.
   Calculer l'espérance et la variance de S_q.

---

1. On dérive k fois la série entière dans l'intervalle ouvert de convergence :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et donc :

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

On divise par $k!$ pour obtenir le résultat.

2. X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. Sachant que $X = n$, Y suit une loi géométrique de paramètre $(n-1, \frac{1}{5})$.
   Ainsi si $n > k$:

$$\begin{aligned} P(X = n \cap Y = k) =& p(X = n) p_{X=n}(Y = k) \\ =& \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1-k} \\ =& \binom{n-1}{k} \frac{1}{6^n} 4^{n-1-k} \\ =& \binom{n-1}{k} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \\ =& \binom{n-1}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

si $k \geqslant n$ alors $P(X = n \cap Y = k) = 0$
On utilise ensuite les probas totales avec le SCE associé à X :

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} P(Y=k \cap X=n) \\
&= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n-1}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} && \text{changement de variable} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^{k+1}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

3. Pour $n \geqslant q$. On considère Z_{n-1} le nombre de 6 dans les tirages 1 à $n-1$ et on note T_n le chiffre tiré au tirage n. On a :

$$(S_q = n) = (Z_{n-1} = q-1) \cap (T_n = q)$$

Or Z_{n-1} et T_n sont indépendants car Z_{n-1} dépend des tirages 1 à $n-1$ tandis que T_n dépend du tirage n.
Cela donne (pour $n \geqslant q$)

$$\begin{aligned}
p(S_q = n) =& p\left((Z_{n-1} = q-1) \cap (T_n = q)\right) \\
=& p\left(Z_{n-1} = q-1\right) p\left(T_n = q\right) \\
=& \binom{n-1}{q-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{q-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-q} \frac{1}{6} \\
=& \binom{n-1}{q-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{q} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-q} \\
=& \binom{n-1}{q-1} 5^{n-q} \frac{1}{6^n}
\end{aligned}$$

4. On obtient :

$$\begin{aligned}
G(t) &= \sum_{n=q}^{+\infty} p(Sq=n) t^n \\
&= \sum_{n=q}^{+\infty} \binom{n-1}{q-1} 5^{n-q} \left(\frac{t}{6}\right)^n \\
&= \sum_{n=q-1}^{+\infty} \binom{n}{q-1} 5^{n-q+1} \left(\frac{t}{6}\right)^{n+1} && \text{changement de variable} \\
&= \left(\frac{t}{6}\right)^q \sum_{n=q-1}^{+\infty} \binom{n}{q-1} \left(\frac{5t}{6}\right)^{n-q+1} && \text{convergence pour } |t| < \frac{6}{5} \\
&= \left(\frac{t}{6}\right)^q \frac{1}{\left(1-\frac{5t}{6}\right)^q} \\
&= \left(\frac{t}{6-5t}\right)^q
\end{aligned}$$

5. On dérive et on remplace t par 1. On a :

$$\begin{aligned}
G'(t) =& q \left(\frac{6-5t+5t}{(6-5t)^2}\right) \left(\frac{t}{6-5t}\right)^{q-1} \\
=& \frac{6q}{(6-5t)^2} \left(\frac{t}{6-5t}\right)^{q-1} = 6q \frac{t^{q-1}}{(6-5t)^{q+1}}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$G'(1) = 6q$$

On re-dérive :

$$G''(t) = 6q\left(\frac{(q-1)t^{q-2}(6-5t)^{q+1} - (q+1)(-5)(6-5t)^q t^{q-1}}{(6-5t)^{2q+2}}\right)$$

et donc :

$$\begin{aligned} G''(1) =& 6q\left((q-1)+5(q+1)\right) \\ =& 6q(6q+4) \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} V(S_q) =& E\left(S_q(S_q-1)\right) + E(S_q) - \left(E(S_q)\right)^2 \\ =& G''(1) + G'(1) - \left(G'(1)\right)^2 \\ =& 6q(6q+4) + 6q - (6q)^2 \\ =& 6q(5) = 30q \end{aligned}$$

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et a et b deux entiers naturels non nuls.

On suppose que G_X est définie sur un intervalle D.
On pose $Y = aX + b$. Déterminer D' l'ensemble de définition de G_Y puis $G_Y(t)$ en fonction de G_X

Rappels sur les polynômes

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

Généralités

Suite à support fini, polynôme formel

Définition III.21 — Suites à support fini. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est à support fini si elle est nulle à partir d'un certain rang.

On appelle polynôme à un indéterminée à coefficient dans $\mathbb{K}$ une suite de $\mathbb{K}$ à support finie.

Notation III.1. *On peut noter P ou $P(X)$ le polynôme. En utilisant la composition définie plus loin.*

On parle alors de **polynôme formel** (qui désigne donc la suite des coefficients) par opposition à la **fonction polynomiale** (qui désigne la fonction $t \in \mathbb{K} \longmapsto P(t) \in \mathbb{K}$) que l'on définira plus loin.

L'intérêt est :

- de pouvoir appliquer un polynôme sur des matrices, des endomorphismes,
- de pouvoir dériver les polynômes complexes (alors qu'on ne peut pas dériver des fonctions de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

En pratique, on utilise la notation « avec des grands X » pour désigner le polynômes, et « des petits x » pour désigner la valeur du polynôme en x (la variable x doit alors avoir une valeur). Par exemple, écrire $P(X) = 0$ signifie que P est le polynôme nul (c'est une égalité de polynômes), tandis que écrire $P(x) = 0$ signifie que pour le x considéré est une racine (c'est une égalité dans $\mathbb{K}$). Bien entendu, on ne peut pas utiliser la variable X lorsqu'on manipule les polynômes. On ne peut pas écrire : « $\forall X \in \mathbb{K}$ », ou « Soit $X \in \mathbb{K}$ »

Définition III.22 Soit P un polynôme. Les valeurs de la suite P sont les coefficients du polynôme P.

Pour $n \in \mathbb{N}$, a_n est le **coefficient d'ordre** n de P.

Notation III.2. *On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Deux polynôme sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

La suite nulle (tous les termes sont nuls) est dans $\mathbb{K}[X]$, c'est **le polynôme nul**. Un scalaire λ (ie un élément de $\mathbb{K}$) peut être identifié à un élément de $\mathbb{K}[X]$: c'est la suite dont le premier terme est λ et tous les autres sont nuls, c'est un **polynôme constant**.

On note X et on appelle **indéterminée** la suite support fini : $(0,1,0,0\dots)$. On appelle **monôme** un polynôme avec un seul coefficient non nul, ie de la forme $(0,0,\dots,a_k,0,\dots)$.

$\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On a aussi le produit et la composition dans $\mathbb{K}[X]$ que l'on va voir plus loin.

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ (à coefficients réels) peut être vu comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ (à coefficients complexes donc). Dans ce sens, on peut écrire : $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Par contre, les propriétés d'un polynôme réel peuvent être très différentes si on le regarde comme un polynôme à coefficients complexes ou si on le regarde comme un polynôme à coefficients réels. Par exemple X^2+1 vu comme un polynôme réel, n'admet pas de racines, et est irréductible, par contre, vu comme un polynôme complexe, $X^2+1 = (X-i)(X+i)$, est réductible et a deux racines distinctes.

Produit de deux polynômes

Définition III.23 — Produit de polynômes. Soit $P = (a_n)$ et $Q = (b_n)$ deux polynômes.

On définit le produit des deux polynômes $P = (a_n)$ et $Q = (b_n)$ comme la suite $PQ = (c_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j$$

La suite PQ est un polynôme (ie la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à support fini).

Proposition III.19 Soit P, Q et R trois polynômes, on a alors :

$$\begin{aligned} PQ &= QP && \text{le produit est commutatif} \\ (PQ)R &= P(QR) && \text{le produit est associatif} \\ (P+Q)R &= PR+QR && \text{le produit est distributif} \end{aligned}$$

L'indéterminée X est la suite $X = (0,1,0,0,0\ldots,)$, on a alors :

$$\begin{aligned} X^2 &= X \times X = (0,0,1,0,0\ldots,) \\ X^3 &= (0,0,0,1,0,0,0,\ldots,) \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

On ajoute la convention $X^0 = 1 = (1,0,0,0,\ldots,)$, pour avoir pour $k \in \mathbb{N}$, X^k est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(X^k\right)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, si $P = (a_n)$ est un polynôme avec $\forall k > n,\ a_k = 0$, on a :

$$\begin{aligned} P &= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots) \\ &= a_0(1,0,0,\ldots) + a_1(0,1,0,0,\ldots) + a_2(0,0,1,0,\ldots) \\ &\qquad + \cdots + a_n(0,0,\ldots,1,0,\ldots) \\ &= a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots a_nX^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \text{ au sens de l'égalité de suites.} \end{aligned}$$

Si on ne connaît pas la valeur de n (le degré du polynôme), on écrit simplement :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k.$$

! La somme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k$ est en fait une somme sur un nombre **fini** de termes par définition d'un polynôme comme une suite à support fini.

Ainsi, on peut écrire, un polynôme est une expression de la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} a_kX^k \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}, \text{ et } (a_0,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^n.$$

n est alors un majorant du degré, ou encore :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k \qquad \text{avec } (a_k) \text{ une suite à support fini.}$$

Dans ces écritures, X désigne la suite à support fini $(0,1,0,\ldots)$.

Fonction polynomiale

Définition III.24 Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On pose alors

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\alpha^k \qquad \text{c'est un élément de } \mathbb{K}.$$

Cette expression a bien un sens puisqu'il s'agit d'une somme finie.

On dit que l'on évalue le polynôme P en α, ou que l'on substitue α à X.

La fonction polynomiale associée à P est :

$$\tilde{P} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ \alpha & \longmapsto & P(\alpha) \end{array} \right.$$

R On confond parfois le polynôme et la fonction polynomiale. On verra que la fonction polynomiale détermine le polynôme (dans le cadre du programme).

Comme on a : $0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$, on a $P(0) = a_0$ et $P(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ (somme des coefficients). Enfin,

$P(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$ somme alternée des coefficients.

■ **Exemple III.5** Pour bien comprendre ce qu'est un polynôme, montrons qu'il existe des polynômes P_0, P_1 et P_2 tels que

$$\forall i \in [\![1,2]\!],\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ P_i(\cos\theta) = \cos(i\theta).$$

Pour P_0, cela s'écrit : $\forall \theta \in \mathbb{R}, P_0(\cos(\theta)) = 1$. Ainsi, le polynôme qui convient est $P_0 = 1$, *i.e.* le polynôme constant.
Pour P_1, cela s'écrit : $\forall \theta \in \mathbb{R}, P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$. Ainsi, un polynôme qui convient est $P_1 = X$.
Pour P_2, cela s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad P_2(\cos(\theta)) &= \cos(2\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, un polynôme qui convient est $P_2 = 2X^2 - 1$. ■

Degré d'un polynôme

Si P est un polynôme non nul, alors l'ensemble $\left\{ k \in \mathbb{N} \middle| a_k \neq 0 \right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un maximum.

Définition III.25 — degré d'un polynôme. On appelle degré d'un polynôme non nul P, l'indice maximal d'un coefficient non nul :

$$d(P) = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \middle| a_k \neq 0 \right\}$$

Par convention, on pose que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Autrement dit si n est le degré de P, alors $a_n \neq 0$ et $\forall k > n,\ a_k = 0$, *i.e.* P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ sans termes nuls à la fin.

Notation III.3. *On le note $d(P)$ ou parfois* $\deg(P)$.
On note $\mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Définition III.26 Si $d(P) = n$,
- on appelle terme dominant de P, son monôme de plus haut degré, *i.e.* $a_n x^n$,
- on appelle coefficient dominant de P, le coefficient de son terme dominant, *i.e.* a_n,
- on appelle coefficient constant ou terme constant le coefficient a_0,
- on appelle polynôme unitaire ou normalisé un polynôme dont le coefficient dominant est égal à 1.

R Écrire $\deg(P) \in \mathbb{N}$ revient à écrire que P n'est pas le polynôme nul, écrire $\deg(P) \geqslant 1$ revient à dire que P n'est pas constant.

Si $d(P) = n$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors on accepte l'écriture :

$$P = a_n X^n + \underbrace{\cdots}_{\deg < n}$$

qui consiste à n'écrire que le terme dominant (on dit que l'on **étudie les termes dominants** ou que l'on **néglige les termes de degré inférieurs** comme pour un développement limité).

On a de manière évidente :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \qquad d(\lambda P) = d(P)$$
$$\text{et } d(0 \times P) = -\infty.$$

Proposition III.20 Soit P et Q deux polynômes.

Le degré de la somme est au plus le maximum des degré :

$$\text{dans le cas général,} \qquad d(P+Q) \leqslant \max(d(P), d(Q))$$
$$\text{si } d(P) \neq d(Q) \text{ alors} \qquad d(P+Q) = \max(d(P), d(Q))$$

Le degré du produit est la somme des degré :

$$d(PQ) = d(P) + d(Q).$$

En particulier, si $k \in \mathbb{N}$, on a $d\left(P^k\right) = kd(P)$.

Démonstration. Si P ou Q est nuls les propositions sont évidentes avec la convention : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\infty < n$ et $-\infty + n = -\infty$.

Notons $n = d(P)$ et $m = d(Q)$, et supposons $n > m$, on a alors :

$$\begin{aligned} P+Q &= a_n X^n + \underbrace{\dots}_{d<n} + b_m X^m + \underbrace{\dots}_{d<m} \\ &= a_n X^n + \underbrace{\dots}_{d<n} \end{aligned}$$

ainsi, $d(P+Q) = n$ dans ce cas.

Ainsi, si les degrés sont différents, le degré de la somme est le maximum des degré. Si les degré sont identiques, on peut avoir **une perte de degré** (si $a_n + b_n = 0$) : les termes de plus haut degrés s'annulent. L'exemple le plus parlant est que si on calcule $P - P$ on obtient le polynôme nul.

On reprends les mêmes notations, et on calcule PQ :

$$\begin{aligned} PQ &= \left(a_n X^n + \underbrace{\dots}_{d<n}\right)\left(b_m X^m + \underbrace{\dots}_{d<m}\right) \\ &= a_n b_m X^{n+m} + \underbrace{\dots}_{d<(n+m)} \end{aligned}$$

ainsi, $d(PQ) = n + m$.

■

En conséquence : si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors $\alpha P + \beta Q$ est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, $K_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Corollaire III.21 Soit P et Q deux polynômes tels que le produit PQ soit égal au polynôme nul, alors P ou Q est le polynôme nul.

On dit que $\mathbb{K}[X]$ est **intègre.**

Démonstration. On a : $PQ = 0$, donc en utilisant le degré : $d(P) + d(Q) = -\infty$, donc forcément $d(P)$ ou $d(Q)$ doit être égal à $-\infty$, ie $P = 0$ ou $Q = 0$. ■

Corollaire III.22 En particulier, un polynôme non nul est **simplifiable pour le produit**, c'est-à-dire :

$$\text{si } A \neq 0, \qquad AB = AC \Rightarrow B = C.$$

Autre conséquence, les seuls polynômes $A \in \mathbb{K}[X]$ tel qu'il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $AB = 1$ sont les polynômes constants non nuls.

Retour sur la formule du produit

Voici plusieurs moyens de comprendre la notation : $c_l = \sum_{i+j=l} a_i b_j$.

Déjà, il s'agit *a priori* d'une somme double : c'est la somme sur

$$\left\{(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!] \,\middle|\, i+j=l\right\}$$

l'ensemble des couples vérifiant une propriété. En fait, si on représente les couples (i,j) dans un tableau, l'ensemble des couples (i,j) vérifiant la propriété correspond à une diagonale.

Voici un exemple pour $n=4$ et $m=3$: on représente les couple (i,j) et la somme $i+j$:

j \ i	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5	6	7

Ce tableau montre que pour $l \in [\![0,7]\!]$, le terme c_l est obtenu en faisant la somme sur tous les termes du tableau qui contiennent l, cela correspond donc à une des diagonales en couleur. Ainsi, on voit qu'il ne s'agit pas d'une somme double sur un tableau, mais d'une somme simple le long d'une diagonale.

On a donc en suivant le schéma ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+a_4X^4)(b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3)\\
=&a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)X\\
&+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)X^2\\
&+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_1)X^3\\
&+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0)X^4\\
&+(a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1)X^5\\
&+(a_3b_3+a_4b_2)X^6+a_3b_4X^7
\end{aligned}$$

Autre manière de voir : si $i \in [\![0,n]\!]$, et $l \in [\![0,n+m]\!]$ il y a un et un seul $j \in [\![0,m]\!]$ tel que $i+j=l$, c'est de manière évidente $j=l-i$. On peut donc écrire :

$$c_l = \sum_{i=\max(0,l-m)}^{\min(l,n)} a_i b_{l-i} = \sum_{i=0}^{l} a_i b_{l-i}$$

Les deux dernières somme se comprennent avec la convention qu'un coefficient qui n'existe pas est nul (ce qui est cohérent avec la définition des polynômes comme des suites à support fini).

Ainsi, si $i>n$, $a_i=0$, et si $i>l$, $b_{l-i}=0$.

Avec cette convention, on peut écrire indifféremment la somme de 0 à l ou de 0 à n (en fait dans tous les cas, cette somme s'arrête à $\min(l,n)$).

De même, on a la formule :

$$c_l = \sum_{j=\max(0,l-n)}^{\min(l,m)} a_{l-j} b_j = \sum_{j=0}^{l} a_{l-j} b_j.$$

Enfin, comme peut le vérifier sur l'exemple ci-dessus, certaines couleur ne correspondent qu'à une case :

- si $l=0$, le seul couple (i,j) qui correspond est $(i,j)=(0,0)$, ce qui signifie que le terme constant de PQ est le produit des termes constants de P et de Q. Autrement dit :

  $$c_0 = a_0 b_0.$$

- si $l=n+m$, le seul couple (i,j) qui correspond est $(i,j)=(n,m)$, ce qui signifie que le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficients dominants de P et de Q. Autrement dit :

  $$c_{n+m} = a_n b_m.$$

Au final, la formule à retenir est :

$$c_l = \sum_{i+j=l} a_i b_j = \sum_{i=0}^{l} a_i b_{l-i} = \sum_{j=0}^{l} a_{l-j} b_j.$$

Pour la retrouver, il suffit de développer le produit :

$$PQ = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j\right) = \left(\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant m}} a_i b_j X^{i+j}\right)$$

Cette écriture signifie simplement que le produit PQ se fait en choisissant un terme $a_k X^k$ de P et en le multipliant par un terme $b_j X^j$ de Q, on ajoute ainsi $n \times m$ termes du type $a_i b_j X^{i+j}$, pour obtenir la somme indiqué.

Pour calculer cette somme double, on regroupe les termes selon la valeur de $l = i + j$, qui peut aller de 0 à $n+m$. Cela revient dans le tableau précédent, à regrouper le tableau en parties de même couleur.

De manière théorique cela se montre avec la formule :

$$[\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!] = \bigcup_{l=0}^{n+m} \left\{(i,j) \middle| i+j=l\right\} \text{ union disjointe,}$$

qui signifie que l'on peut créer une partition de l'ensemble des couples (i,j) en sous-ensemble tel que $i+j=l$.

On a donc :

$$\left(\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant m}} a_i b_j X^{i+j}\right) = \sum_{l=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=l} a_i b_j\right) X^l$$

Proposition III.23 En conséquence immédiate, on a que :

$$P^2 = \sum_{k=0}^{2n} c_l X^l, \qquad \text{avec } c_l = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{l-i}.$$

Exercice 1 Soit n_1, n_2 et N trois entiers naturels non nuls.

Montrer la formule :

$$\sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{N-k} = \binom{n_1+n_2}{N}$$

En déduire pour n entier quelconque la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Correction : On regarde l'égalité de polynôme :

$$(1+X)^{n_1}(1+X)^{n_2} = (1+X)^{n_1+n_2}$$

pour le terme de gauche, on développe avec Newton :

$$(1+X)^{n_1+n_2} = \sum_{N=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{N} X^N$$

et à droite :

$$\begin{aligned}(1+X)^{n_1}(1+X)^{n_2} &= \left(\sum_{i=0}^{n_1}\binom{n_1}{i}X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n_2}\binom{n_1}{j}X^j\right)\\ &= \sum_{N=0}^{n_1+n_2}\left(\sum_{k=0}^{n_1}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{N-k}\right)X^N\end{aligned}$$

avec la formule du produit. On doit donc identifier le terme en X^N.

La dernière formule s'obtient en prenant $n_1 = n_2 = N = n$, et en utilisant $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Composition dans $\mathbb{K}[X]$

Définition III.27 — Composition de polynôme. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et Q un autre polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On pose alors $P \circ Q$ comme le polynôme :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$$

Cette expression est bien définie car il s'agit d'une somme finie.

Notation III.4. *On peut noter $P \circ Q$ ou plus simplement $P(Q)$.*

R Il n'existe pas de formule simple pour les coefficients de la composée de deux polynômes. En règle générale, les coefficients d'une composée sont durs à calculer.

Le polynôme $P(X)$, i.e. P composé avec le polynôme X est égal au polynôme P. C'est pourquoi on peut écrire indifféremment P ou $P(X)$.

Un polynôme est **pair** si $P(X) = P(-X)$, cela est équivalent à dire que $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = 0$ (tous les coefficients d'ordre impair sont nuls).

De même, un polynôme est **impair** si $P(X) = -P(-X)$, ce qui signifie que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k} = 0$ (tous les coefficients d'ordre pair sont nuls).

On a de manière évidente :

Proposition III.24 Pour trois polynômes P, Q et R et deux scalaires λ et μ, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q)(R) &= \lambda P(R) + \mu Q(R)\\ (PQ)(R) &= P(R)Q(R)\end{aligned}$$

Proposition III.25 Si P et Q sont des polynômes, on a :

$$d(P \circ Q) = d(P) \times d(Q)$$

Démonstration. Si P ou Q est nul, c'est clair avec la convention $n \times -\infty = -\infty$.

Sinon, on a avec les notations habituelles :

$$\begin{aligned}P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(b_m X^m + \underbrace{\dots}_{d<m} \right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(a_k (b_m)^k X^{mk} + \underbrace{\dots}_{d<mk} \right)\\ &= a_n (b_m)^n X^{mn} + \underbrace{\dots}_{d<mn}\end{aligned}$$

Avec $a_n (b_m)^n \neq 0$. ■

Représentation informatique des polynômes

Classiquement, un polynôme est représenté par la liste de ses coefficients :

```
P=[a0,a1, ..., an]
```

! Le degré du polynôme P est `len(P)-1`.

On peut alors écrire différentes fonctions :

Coefficient Renvoie le coefficient d'ordre k (0 si on dépasse la taille de la liste) :

```
def coef(P,k) :
  if k < len(P) :
    return P[k]
  return 0
```

Degré Renvoie le degré d'un polynôme (sans compter les 0 finaux) :

```
def degre(P) :
  n = len(P)
  for k in range(len(P)-1,-1,-1):
    if P[k] != 0 :
      return k
  return -1 # si P=0
```

Somme de deux polynôme P et Q

```
def som(P,Q) :
  n = len(P)
  m = len(Q)
  l = max(n,m)
  S = [0]*l #initialisation
  for k in range(n):
    S[k] = P[k]
  for k in range(m):
    S[k] += Q[k]
  return S
```

On peut aussi utiliser une liste en compréhension :

```
S = [coef(P,k) + coef(Q,k) for k in range(l)]
```

On peut aussi faire une fonction qui enlève les 0 à la fin d'une liste pour simplifier les sommes. On peut aussi remplacer n et m par $d(P)-1$ et $d(Q)-1$ en faisant attention à écrire : `for k in range( degre(P) +1):`

Produit externe Si $a \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme :

```
def mult_constante(a,P):
  return [a*coef(P,k) for k in range(len(P))]
```

Produit de deux polynômes P et Q :

```
def prod_poly(P, Q):
  n = len(P)
  m = len(Q)
  R = [0]*(n+m-1)
  for i in range(n) :
    for j in range(m) :
      R[i+j] += P[i]*Q[j]
  return R
```

Puissance Il suffit d'utiliser plusieurs fois la fonction produit.

Composition Il suffit d'utiliser plusieurs fois les fonctions puissance et somme.

Évaluation en un point Pour calculer la valeur de $P(\alpha)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}$, on utilise l'algorithme de Horner qui consiste à écrire :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n \\ &= (\ldots((((a_n\alpha + a_{n-1})\alpha + a_{n-2})\alpha + a_{n-3})\alpha + a_{n-4})\alpha + \cdots + a_1)\alpha + a_0 \end{aligned}$$

Par exemple pour un polynôme de degré 4 :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 \\ &= \Big(\big((a_4\alpha + a_3)\alpha + a_2\big)\alpha + a_1\Big)\alpha + a_0 \end{aligned}$$

L'algorithme s'écrit :

```
def horner(P, alpha):
  S = 0
  for k  in range(n-1,-1,):
    S = S*alpha + P[k]
  return S
```

P On peut utiliser `reversed(P)` pour parcourir `P` en sens inverse.

Cet algorithme est plus efficace que l'algorithme naïf qui consiste à calculer directement la somme : $\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$.

Il existe une structure spéciale pour les polynômes : la classe `poly1d` du module `numpy`.
Le programme de produit de deux polynômes permet de bien comprendre la formule du produit.

Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Définition III.28 — Polynôme dérivé. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme. Le polynôme dérivée noté P' est :

$$P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k$$

On aurait aussi pu écrire : $P' = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k X^{k-1}$ puisque le premier terme est nul.

R On peut ainsi dériver un polynôme complexe, alors que l'on a pas la limite du taux d'accroissement. C'est une **dérivée formelle**.

Bien sûr, pour un polynôme réel, cela coïncide avec la notion de dérivée vue en analyse.

Proposition III.26 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$\begin{array}{llll} \text{si } \deg(P) > 0 & \text{alors} & \deg(P') = \deg(P) - 1 \\ P \text{ est constant} & \text{si et seulement si} & P' = 0. \end{array}$$

On a les propriétés classiques :

Proposition III.27 Soient P et Q deux polynômes et λ un élément de $\mathbb{K}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} (\lambda P)' &= \lambda P' \\ (P+Q)' &= P' + Q' \\ (PQ)' &= P'Q + PQ' \\ (P \circ Q)' &= P' \circ Q \times Q' \end{aligned}$$

Contrairement à ce que l'on peut penser ces formules ne sont pas déjà connues. En effet, celles qui sont couramment utilisées concernent la dérivation des fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et non la dérivation formelle.

R On verra plus loin une manière plus rapide de montrer ces relations : on sait qu'elles sont vraies pour les applications polynomiales, elles sont donc vraies pour les polynômes formels puisque l'application polynomiale caractérise le polynôme.

Démonstration. On note $P=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ On a alors pour la première formule :

$$\begin{aligned}(\lambda P)' &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k\right)' \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda k a_k X^{k-1} && \text{par définition de la dérivation} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} = \lambda P'\end{aligned}$$

Pour la deuxième, on a :

$$\begin{aligned}(P+Q)' &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k+b_k) X^k\right)' \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(a_k+b_k) X^{k-1} && \text{par définition de la dérivation} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k X^{k-1} = P'+Q'.\end{aligned}$$

La troisième est plus ardue. On part de la formule du produit :

$$PQ=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k \text{ avec } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Par définition de la dérivation, cela donne :

$$(PQ)' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) c_{k+1} X^k$$

Ce que l'on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}(PQ)' &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \left(\sum_{i=0}^{k+1} a_i b_{k+1-i}\right) X^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k+1} (k+1) a_i b_{k+1-i} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i) a_i b_{k+1-i} X^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k+1} i a_i b_{k+1-i} X^k\end{aligned}$$

On commence par étudier la première somme. On enlève les termes nuls :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i) a_i b_{k+1-i} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k} (k+1-i) a_i b_{k+1-i} X^k$$

On a :

$$\begin{aligned}PQ' &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) b_{k+1} X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i (k+1-i) b_{k+1-i}\right) X^k\end{aligned}$$

Le premier terme est donc bien PQ'.

Pour la deuxième somme. On enlève le permier terme nul :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k+1} i a_i b_{k+1-i} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{k+1} i a_i b_{k+1-i} X^k$$

Puis on fait le changement de variable : $i \leftarrow (k+1-i)$ (le changement de variable peut se justifier car il s'agit de somme d'un nombre fini de termes).

Cela donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k+1} i a_i b_{k+1-i} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k} (k+1-i) a_{k+1-i} b_i X^k$$

On a d'un autre côté :

$$\begin{aligned} QP' &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}(k+1-i)b_i a_{k+1-i}\right)X^k \end{aligned}$$

On constate bien que le deuxième terme est QP'.

On a donc bien obtenu la formule.

La dernière se démontre en remarquant que :

$$P\circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$$

et donc par application des règles précédentes :

$$(P\circ Q)' = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k k Q^{k-1} Q' = P'\circ Q \times Q'$$

■

Dérivées successives, formule de Taylor

Définition III.29 — Dérivée d'ordre r. Soit P un polynôme et $r \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence le polynôme dérivée d'ordre r de P par :

$$P^{(0)} = P \qquad \text{et} \qquad \forall r \geqslant 0,\quad P^{(r+1)} = \left(P^{(r)}\right)'.$$

Un cas très important est la dérivation du monôme X^n :

$$\left(X^n\right)^{(p)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-p+1)X^{n-p} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

On peut donc écrire pour $p \leqslant n$:

$$\left(X^n\right)^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!}X^{n-p} = A_n^p X^{n-p}$$

Proposition III.28 Pour la somme et le produit externe on a la propriété de linéarité :

$$\begin{aligned} \forall (P,Q)\in(\mathbb{K}[X])^2,\qquad (\lambda P)^{(r)} &= \lambda P^{(r)} \\ (P+Q)^{(r)} &= P^{(r)} + Q^{(r)} \end{aligned}$$

En appliquant la dérivée de X^n et la linéarité, on peut calculer directement la dérivée r-ième d'un polynôme (alors que pour une fonction c'est impossible).

Précisément :

Proposition III.29 Soit P un polynôme que l'on écrit : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = d(P)$.

On a :

- pour $l > n$ le polynôme $P^{(l)}$ est nul,

- sinon, pour $l \leqslant n$, on a :

$$P^{(l)} = \sum_{k=l}^{n} a_k \frac{k!}{(k-l)!} X^{k-l}$$

On peut aussi écrire :

$$P^{(l)} = \sum_{k=l}^{+\infty} a_k \frac{k!}{(k-l)!} X^{k-l} = \sum_{k=l}^{+\infty} a_k A_k^l X^{k-l}$$

Ou encore :

$$P^{(l)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{l+k} \frac{(k+l)!}{k!} X^k \qquad \text{en posant } k \leftarrow k-l$$

Pour une fonction quelconque, il est impossible de calculer les dérivées successives immédiatement. Pour un polynôme, c'est possible.

Pour le produit, on a la formule de Leibniz :

Théorème III.30 — Formule de Leibniz. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors on a, pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$\Big(PQ\Big)^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{k}{r} P^{(k)} Q^{(r-k)}$$

Attention $P^{(0)} = P$, alors que si $x \in \mathbb{K}$, $x^0 = 1$, on se méfiera donc de l'analogie avec la formule de Newton.

Démonstration. La formule de Leibniz se démontre par récurrence. Comme dans le cas de fonctions. ■

La formule de Leibniz est particulièrement utile pour les polynômes, puisque $P^{(k)} = 0$ si $k > d(P)$. On l'utilisera toujours dans le cas où l'un des polynômes se dérive facilement.
C'est la même technique que pour les matrices : on dérive un produit en utilisant la formule de Leibniz en dérivant le polynôme pour avoir un nombre fini de termes.

Théorème III.31 — Formule de Taylor. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \Big(X-a\Big)^k.$$

En particulier, pour $a = 0$, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Enfin, on a :

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k.$$

R Il s'agit bien sûr de somme finie.

La formule la plus importante est celle en 0 !

En fait la formule de Taylor en 0 est assez naturelle :

$$\begin{aligned}
\text{Si } P =& a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_kX^k + \cdots + a_nX^n \\
& \text{alors clairement } a_0 = P(0) \\
\text{puis : } P' =& a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 \cdots + ka_kX^{k-1} + \cdots + na_nX^{n-1} \\
& \text{et donc } a_1 = P'(0) \\
\text{ensuite : } P'' =& 2a_2 + 3\times 2a_3X \cdots + k(k-1)a_kX^{k-2} + \cdots + n(n-1)a_nX^{n-2} \\
& \text{et encore } 2a_2 = P''(0)
\end{aligned}$$

Si on dérive encore une fois, on a : $3\times 2a_3 = P^{(3)}(0)$, puis : $4\times 3\times 2a_4 = P^{(4)}(0)$, etc.

Démonstration. **Preuve de la formule de Taylor en 0**.

La preuve provient de la formule qui donne la dérivée d'ordre k d'un polynôme :

$$P^{(k)} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{k+j}\frac{(j+k)!}{j!}X^j$$

le terme constant de $P^{(k)}$ corresponds à $j=0$ et est donc $k!a_k$, *i.e.* $k!a_k = P^{(k)}(0)$, ou encore $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$. ■

Ainsi, il est équivalent de connaître le polynôme formel P et de connaître toutes les valeurs de ses dérivées en 0. Autrement dit *un polynôme est entièrement déterminée par ses dérivée en* 0.

Ce n'est pas le cas pour les fonctions.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée en 0 par 0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$, alors que la fonction f n'est pas nulle, et ne coïncide avec la fonction nulle sur aucun intervalle.

Remarquons en particulier que les dérivées étant locales, si on connaît la fonction polynomiale sur $]-\alpha,\alpha[$, avec $\alpha > 0$, alors on connaît le polynôme formel et donc la fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ entier. Là encore, ce n'est pas le cas des fonctions : on peut trouver des fonctions $\mathscr{C}^\infty$, non identiquement nulle, mais nulle sur $[-1,1]$.

Ce qui montre au passage que si P et Q sont deux polynômes dont les fonctions polynomiales coïncident sur un intervalle du type $]a-\alpha, a+\alpha[$, avec $a \in \mathbb{R}$ alors ils ont les mêmes coefficients.

On obtient donc un résultat important :

Corollaire III.32 Si deux polynômes ont la même fonction polynomiale, alors ils sont égaux.

L'intérêt de la formule de Taylor en a est qu'elle permets d'exprimer les coefficients d'une composition $P\circ(X+a)$ en fonction du polynôme P ce qui est très pratique car les coefficients d'une composition ne sont pas simples à déterminer dans le cas général.

Démonstration. **Démonstration directe de la formule de Taylor en** a

On va utiliser $X = (X-a+a)$ et la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k(X-a+a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(X-a)^j a^{k-j}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k\binom{k}{j}(X-a)^j a^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_k\binom{k}{j}(X-a)^j a^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{(X-a)^j}{j!}\sum_{k=j}^{n} a_k\frac{k!}{(k-j)!}a^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{(X-a)^j}{j!}P^{(j)}(a)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule donnant la dérivée j-ième d'un polynôme. :

$$P^{(j)} = \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j}$$

■

On pourrait aussi démontrer ce théorème *via* l'analyse, c'est à dire en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, mais uniquement dans ce cas on considérant les fonctions polynomiales et non les polynômes formels.

▪ **Exemple III.6** Comme application, on peut déterminer l'unique polynôme P de degré 3 tel que $P(0) = 0$, $P'(0) = 1$, $P''(0) = 0$ et $P^{(3)}(0) = -1$. Ce polynôme est :

$$P = X - \frac{1}{6}X^3.$$

Ce polynôme est unique, car si deux polynômes P et Q sont solutions, la différence R vérifie : $R(0) = R'(0) = R''(0) = R^{(3)}(0) = 0$, et donc en utilisant encore la formule de Taylor, on a $R = 0$. ▪

Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Multiples et diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$

Définition III.30 Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A ou que A est multiple de B si :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \qquad A = BQ$$

On dit aussi que B est un diviseur de A ou que A est un multiple de B.

Notation III.5. *On note alors $B|A$ pour dire B divise A.*

Si $B|A$ avec B non nul, alors A est non nul et $\deg(A) \geqslant \deg(B)$. En effet, on a $\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q)$.

Proposition III.33 Si A, B et C sont trois polynômes, on a :

- Si $B|A$ et $A|C$, alors $B|C$, c'est-à-dire la relation « divise » est transitive.
- $A|A$, c'est-à-dire la relation « divise » est réflexive.
- Cette relation n'est pas antisymétrique :

$$\Big(A|B \text{ et } B|A\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad A = \lambda B\Big)$$

  On dit dans ce cas que A et B sont associés.
- Elle est compatible avec l'addition :

$$\text{Si } B|A \text{ et } B|C \quad \text{ alors } \quad B|(A+C)$$

  et avec la multiplication :

$$\text{Si } B|A \quad \text{ alors } \quad B|AC$$

R La relation divise est une relation d'ordre dans l'ensemble des polynômes unitaires (ensemble dans lequel les polynômes associés sont égaux).

Démonstration. Supposons $B|A$ et $A|C$, et montrons $B|C$. On sait :

$$\begin{aligned} &\exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], \qquad A = BQ_1 \\ \text{et} \quad &\exists Q_2 \in \mathbb{K}[X], \qquad C = AQ_2 \end{aligned}$$

On constate alors que $C = BQ_1Q_2$, d'où $B|C$.

La relation $A|A$ s'obtient en écrivant $A = 1 \times A$ (la constante 1 est un polynôme).

Supposons $A|B$ et $B|A$, on a alors :

$$\begin{array}{ll} & \exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], \quad A = BQ_1 \\ \text{et} & \exists Q_2 \in \mathbb{K}[X], \quad B = AQ_2 \end{array}$$

Si on regarde les degrés, on a alors :

- Soit $A = 0$ et donc $B = 0$ et donc la propriété $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda B$ est vraie.
- Soit $A \neq 0$ et donc $B \neq 0$ et $\deg(A) \leqslant \deg(B) \leqslant \deg(A)$, et donc $\deg(A) = \deg(B)$, et donc $\deg(Q_1) = 0$, ie Q_1 est une constante non nulle, que l'on note donc λ, et on a : $A = \lambda B$.

D'où, dans les deux cas $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda B$. La réciproque est évidente.

Considérons maintenant A, B, C tels que $B|A$ et $B|C$, on a alors :

$$\begin{array}{ll} & \exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], \quad A = BQ_1 \\ \text{et} & \exists Q_2 \in \mathbb{K}[X], \quad C = BQ_2 \end{array}$$

On voit alors $B(Q_1 + Q_2)|A + C$ et en conséquence $B|(A + C)$.

Pour la multiplication, on suppose $B|A$ et on a : $\exists Q_1 \in \mathbb{K}[X], A = BQ_1$ et donc $BQ_1C = 1C$ et en conséquence $B|AC$.

■

Pour l'instant pour démontrer qu'un polynôme divise un autre, il n'y a pas d'autre choix que de procéder par *identification* : on résout le système obtenu en considérant les coefficients de Q.

▪ **Exemple III.7** On veut montrer que $X - 1$ divise $X^4 - 1$. Ce que l'on peut démontrer de manière évidente en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3.$$

De manière directe, on cherche Q tel que $X^4 - 1 = Q \times (X - 1)$. On voit :

- Le degré de Q est forcément 3, donc Q s'écrit $aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a donc l'équation

  $$X^4 - 1 = (aX^3 + bX^2 + cX + d)(X - 1).$$

  Il ne faut surtout pas développer et résoudre le système (cela donne le résultat, mais c'est relativement long)
- le terme dominant est 1 et le terme constant est 1 (on obtient les deux termes extrémaux en regardant les termes dominants et constants), la relation s'écrit donc : $X^4 - 1 = (X^3 + bX^2 + cX + 1)(X - 1)$
- on regarde les termes de degré 3, qui donne $-1 + b = 0$, donc $b = 1$, puis les termes de degré 1, qui donne $-c + 1 = 0$, donc $c = 1$.
- on peut éventuellement vérifier avec les termes des degrés restant.

Au final, on obtient $Q = X^3 + X^2 + X + 1$ et la relation :

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X^3 + X^2 + X + 1)$$

donc $(X - 1)|(X^4 - 1)$.

▪

Division euclidienne

Théorème III.34 — Division euclidienne. Soit A et B deux polynômes avec $B \neq 0$. Il existe alors un unique couple (Q, R) de polynôme de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

On appelle Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Démonstration. **Unicité :** Supposons (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) solutions, on a alors :

$$A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2 \qquad \text{et donc} \qquad B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1.$$

En particulier avec les degrés :

$$\deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(R_2 - R_1).$$

Or on sait $\deg(R_2-R_1)\leqslant max(\deg(R_2),\deg(R_1))<\deg(B)$. Donc $\deg(Q_1-Q_2)<0$, ce qui signifie donc : $\deg(Q_1-Q_2)=-\infty$ ou encore $Q_1=Q_2$. En reportant, on obtient $R_2=R_1$ d'où l'égalité.

Existence : On fixe le polynôme $B=\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ et on procède par récurrence sur le degré de A. On note donc :

$$\mathscr{P}(n): \qquad \forall A\in\mathbb{K}_n[X],\ \exists(Q,R)\in\mathbb{K}[X],\ A=BQ+R \text{ avec } \deg(R)<\deg(B).$$

Pour l'initialisation, les rangs $n=0$, $n=1$, $n=m-1$ sont évidents : il suffit de poser $Q=0$ et $R=B$.
Pour l'hérédité, soit n fixé, avec $n\geqslant m-1$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $A\in\mathbb{K}_{n+1}[X]$, on écrit alors :

$$A=a_{n+1}X^{n+1}+a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0$$

On écrit alors :

$$a_{n+1}X^{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}\underbrace{\left(b_mX^m+b_{m-1}X^{m-1}+\cdots+b_1X+b_0\right)}_{B}+C$$

où C est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. On a ainsi écrit :

$$\begin{aligned}A=&\frac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}B++C+a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0\\ =&\frac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}B+A_1 \qquad \text{avec } A_1\in\mathbb{K}_n[X].\end{aligned}$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence sur A_1, cela donne l'existence de

$$Q_1 \text{ et } R_1\in\mathbb{K}[X],\ \text{ tel que } A_1=BQ_1+R_1 \text{ avec } \deg(R_1)<\deg(B).$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}A=&\frac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}B+BQ_1+R_1\\ =&B\underbrace{\left(\frac{a_{n+1}}{b_m}X^{n+1-m}+Q_1\right)}_{Q}B+R_1\end{aligned}$$

On a bien que Q est un polynôme, car $n+1\geqslant m$ et on obtient ainsi :

$$A=BQ+R \text{ avec } \deg(R)<\deg(Q).$$

■

Proposition III.35 — Lien avec la divisibilité. Soient A et B des éléments de $\mathbb{K}[X]$ avec $B\neq 0$.
On a alors :

$$B|A \iff \text{le reste de la division euclidienne de } A \text{ par } B \text{ est nul}$$

✯ **Divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$**

Un polynôme B divise A si il existe $C\in\mathbb{K}[X]$ tel que $A=BC$.

Si A et B sont des polynômes complexes, alors le polynôme C est complexe, il n'y a pas de difficultés. Par contre, si A et B sont réels, il est *a priori* possible que B divise A dans $\mathbb{C}[X]$ au sens où $\exists C\in\mathbb{C}[X], A=BC$, mais pas dans $\mathbb{R}[X]$. De même, il est *a priori* possible que les quotients et les restes de la division euclidienne dépendent de si on considère A et B comme des polynômes réelles ou complexes.

En fait cette situation est impossible du fait de l'unicité de la division euclidienne. Soit A et B réel, on peut faire la division euclidienne de A par B :

$$\text{dans } \mathbb{C}: \quad \exists(Q_{\mathbb{C}},R_{\mathbb{C}})\in\left(\mathbb{C}[X]\right)^2,\quad A=BQ_{\mathbb{C}}+R_{\mathbb{C}} \quad \text{avec } \deg(R_{\mathbb{C}})<\deg(B)$$

$$\text{dans } \mathbb{R}: \quad \exists(Q_{\mathbb{R}},R_{\mathbb{R}})\in\left(\mathbb{R}[X]\right)^2,\quad A=BQ_{\mathbb{R}}+R_{\mathbb{R}} \quad \text{avec } \deg(R_{\mathbb{R}})<\deg(B).$$

L'unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{C}$ assure que $R_{\mathbb{C}}=R_{\mathbb{R}}$ et $Q_{\mathbb{C}}=Q_{\mathbb{R}}$. En particulier,

$$A|B \text{ dans } \mathbb{C} \iff R_{\mathbb{C}}=0 \iff R_{\mathbb{R}}=0 \iff A|B \text{ dans } \mathbb{R}.$$

On retiendra :
- si A et B sont réels, le quotient et le reste de la division euclidienne sont réels,
- on ne distingue pas divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

⋆ Calculer la division euclidienne

Pour calculer effectivement la division euclidienne il suffit d'appliquer la même méthode que pour les entiers : à chaque étape, on enlève le terme dominant du reste en ajoutant un monôme au quotient.

■ **Exemple III.8** On veut faire la division euclidienne de $X^5+4X^4+2X^3+X^2-X-1$ par X^3-2X+3

$$\begin{array}{r|l} X^5+4X^4+2X^3+X^2-X-1 & X^3-2X+3 \\ \cline{2-2} 4X^4+4X^3-2X^2-X-1 & X^2+4X+4 \\ 4X^3+6X^2-13X-1 & \\ 6X^2-5X-13 & \end{array}$$

On obtient ainsi :

$$X^5+4X^4+2X^3+X^2-X-1=(X^3-2X+3)(X^2+4X+4)+(6X^2-5X-13)$$

Le quotient est X^2+4X+4 et le reste est $6X^2-5X-13$. ■

⋆ Algorithme de division euclidienne

L'algorithme de division euclidienne de deux polynôme peut s'écrire après avoir écrit les fonctions d'addition et de division de deux polynômes. On utilise ici la structure `poly1d` du module `numpy`.

Voici un bref descriptif de la syntaxe de cette structure :

Convertion en polynôme une liste `L` de coefficients est convertie en polynôme avec la syntaxe `poly1d(L)`. Par exemple, `poly1d( [1,2,0,4])` corresponds au polynôme X^3+2X^2+4.

Le degré est obtenu par `R.order`

Les coefficients sont obtenus par `R.coef`. C'est une liste des coefficients (du plus grand au plus petit). Attention, `R.coef[0]` est le coefficient dominant.

Les opérations $+$, $-$ et $\times$ s'écrivent naturellement entre polynôme.

L'algorithme consiste alors à :
- Initialiser R à la valeur de A et Q à 0,
- à chaque étape : ajouter le monôme : $\frac{r_n}{b_n}X^{n-p}$ au quotient et donc enlever monôme : $\frac{r_n}{b_n}X^{n-p}B$ au reste (pour faire disparaître son terme dominant).
- Jusqu'à ce que le degré du reste soit inférieur au degré de B.

Voici un exemple d'algorithme obtenu :

```
def divEuclidienne(A,B) :
  R = poly1d(A) # R sera le reste
  Q = poly1d([0]) # Q sera le quotient

  m = B.order
  n = R.order
  while n >= m :

    # on crée le monôme r_n/b_m X^(n-m)
    # d'abords une liste terme dominant + 0
    monL = [R.coeffs[0] / B.coeffs[0]] +[0]*(n-m)
    #puis le polynôme:
    mon = poly1d( monL )

    Q = Q + mon
    R = R - mon*B
    n = R.order
  return Q,R
```

La correction de l'algorithme est assuré par le fait qu'à chaque itération, on a :

$$BQ+R=A$$

La terminaison de l'algorithme est vérifiée car le degré de R diminue à chaque itération.

R Bien sûr, on peut aussi utiliser l'opération `/` de la structure `poly1d`.

Racines

Lien entre racine et divisibilité

Définition III.31 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Un élément α de $\mathbb{K}$ est racine (dans $\mathbb{K}$) du polynôme P si $P(\alpha)=0$.

On a un lien entre racine et divisibilité par $(X-\alpha)$:

Proposition III.36 Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$, alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X-\alpha)|P$$

On a donc remplacé le problème de la recherche de Q tel que $P=Q(X-\alpha)$, par le simple calcul de $P(\alpha)$!
Ainsi, pour montrer que $X-1$ divise $P=X^4-1$, il suffit de vérifier que $P(1)=0$, ce qui est beaucoup plus rapide que de calculer le polynôme Q.

Démonstration. Dans le cas où $(X-\alpha)$ divise P, on a $P=(X-\alpha)Q$, Donc $P(\alpha)$ est nul.

Pour la réciproque, on suppose que $P(\alpha)=0$ et on fait la division euclidienne de P par $X-\alpha$. Cela donne l'existence d'un polynôme Q et d'un scalaire λ tel que :

$$P=Q(X-\alpha)+\lambda$$

En évaluant en α, on obtient $\lambda=0$. et donc $P=Q(X-\alpha)$. ■

D'une manière générale, si P est un polynôme, alors la division euclidienne de P par $X-\alpha$ donne l'existence d'un polynôme Q tel que :

$$P=Q(X-\alpha)+P(\alpha)$$

On voit aussi dans la démonstration que si A divise B alors toutes racines de A sont aussi des racines de B.

Cas de plusieurs racines distinctes

Proposition III.37 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
Si $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ sont p racines deux à deux distinctes d'un polynôme P, alors le polynôme $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p)$ est un diviseur de P.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de racines p.

Le cas $p=1$ vient d'être fait.

Pour passer de p racines à $p+1$ racines, on applique l'hypothèse de récurrence au p premières racines qui implique que

$$\exists Q\in\mathbb{K}(X],\qquad P=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p)Q$$

En évaluant cette dernière égalité de polynôme sur la dernière racine α_{p+1}, on a :

$$\underbrace{P(\alpha_{p+1})}_{=0}=\underbrace{(\alpha_{p+1}-\alpha_1)(\alpha_{p+1}-\alpha_2)\cdots(\alpha_{p+1}-\alpha_p)}_{\neq 0 \text{ car les racines sont distinctes}}Q(\alpha_{p+1}).$$

D'où $Q(\alpha_{p+1})=0$, et en appliquant la proposition précédente, on a : $(X-\alpha_{p+1})|Q$, et donc $\exists Q_1\in\mathbb{K}[X],\ Q=(X-\alpha_{p+1})Q_1$, puis :

$$P(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p)(X-\alpha_{p+1})Q_1(X)$$

■

Ici encore, pour démontrer que $A|P$, on peut écrire le polynôme A sous la forme $A=\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)$, et on a juste besoin de calculer les valeurs de $P(\alpha_i)$.

■ **Exemple III.9** On veut montrer que pour tout n, p et $q \in \mathbb{N}$, $P = X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ est divisible par $1 + X + X^2$. Plutôt que de chercher Q tel que $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q} = Q(1 + X + X^2)$ et de résoudre un système (de taille n) vérifié par Q, on écrit : $1 + X + X^2 = (X - j)(X - j^2)$, avec $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

Et on a :

$$\begin{aligned} 1 + X + X^2 | P &\iff (X - j)(X - j^2) | P \\ &\iff P(j) = 0 \text{ et } P(j^2) = 0. \end{aligned}$$

On calcule donc $P(j)$, en utilisant les relations $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 1$. On obtient facilement $P(j) = j^2 + j + 1 = 0$, et de même $P(j^2) = 0$. Ainsi, $1 + X + X^2 | P$. Comme $1 + X + X^2$ et P sont deux polynômes réels, cela signifie que :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], \qquad P = (1 + X + X^2)Q.$$

■

En conséquence de ce théorème, on a un résultat important :

Proposition III.38 Un polynôme de degré n ayant $n + 1$ racines est nul.

Démonstration. Supposons que P ait $n + 1$ racines, alors, il est divisible par $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_{n+1})$, donc si il est non nul alors son degré est supérieur ou égal à $n + 1$, ce qui est impossible. En conclusion, le polynôme P est nul. ■

En conséquence :

- Si on sait que $P \in \mathbb{K}_n[X]$ (ie est de degré inférieur ou égal à n) et que l'on montre que P admet $n + 1$ racines, il est alors nul,
- Si un polynôme admet une infinité de racines, alors il est nul (pas besoin dans ce cas de connaître son degré).
- Si deux polynômes ont la même valeur sur une infinité de valeurs, alors ces deux polynômes sont égaux (égalité des coefficients).
- En particulier, si deux polynômes ont la même fonction polynomiale $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, alors ils sont égaux (puisque $\mathbb{K}$ a une infinité de valeurs).

Un polynôme est donc entièrement déterminé par sa fonction polynomiale. C'est pourquoi on confond (souvent) les deux.

■ **Exemple III.10** Montrons que la fonction cos n'est pas un polynôme. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe P tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \cos(x)$. En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, P\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0.$$

L'ensemble $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ étant infini, P a une infinité de racine et donc $P = 0$ ce qui signifie $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 0$ et est évidement une contradiction. ■

■ **Exemple III.11** Montrons l'unicité du polynôme de degré 2 tel que $P(1) = 0$, $P(0) = 3$ et $P(2) = 3$ (on admet qu'il existe).

On considère donc P et Q solution du problème. On pose alors $R = P - Q$. Le polynôme R est alors de degré inférieur ou égal à 2 et a trois racines distinctes (0, 1 et 2). Il est donc nul et $P = Q$. ■

L'utilisation de l'argument infinité de racine (ou $n + 1$ racine) est surtout utilisé pour montrer l'unicité d'un polynôme vérifiant certaines propriétés. La technique consiste à supposer qu'il y a deux polynômes et de montrer que la différence est nulle par un argument de racines.

Il faut qu'il soit clair qu'il y a une infinité de racine : par exemple si $\forall k \in \mathbb{Z}, P(\cos(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)) = 0$, on n'a pas $P = 0$, mais seulement $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

Autre exemple, si on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, P\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$, il faut d'abords en déduire (en dessinant le tableau de variation de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$) que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, P(x) = 0$, puis $P = 0$ car P a une infinité de racine. Le principe étant que quand x décrit $\mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^2}$ décrit $\mathbb{R}_+^*$, ce qui se montre avec le tableau de variation.

Proposition III.39 — Décomposition des polynômes scindés à racines simples. Soit P un polynôme de degré n qui admet n racines distinctes notées $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, alors :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i).$$

où λ est le coefficient dominant de P.

Démonstration. On sait que P s'écrit :

$$P = Q\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i).$$

L'étude du degré assure que $\deg(Q) = 0$, puis l'étude du terme dominant permet d'obtenir la valeur de Q. ■

▪ **Exemple III.12** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme unitaire $X^n - 1$ admet n racines distinctes dans $\mathbb{C}$ (les racines n-ièmes de l'unité). On a donc :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

▪

Généralisation aux racines d'ordre multiple

Définition III.32 On dit que α est racine d'ordre au moins d si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(d-1)}(\alpha) = 0$$

i.e. si α est racine de P ainsi que de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $d-1$ s'annule en α.
On dit que α est racine d'ordre d (ou plus précisément d'ordre exactement d) si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(d-1)}(\alpha) = 0, \text{ et si } P^{(d)}(\alpha) \neq 0$$

i.e. si α est racine de P ainsi que de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $d-1$ s'annule en α. tandis que la dérivée d'ordre d n'est pas nulle.

On dit que α est **racine simple**, si α est racine d'ordre 1, ie :

$$P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) \neq 0$$

On dit que α est **racine double**, si α est racine d'ordre 2, **triple** si d'ordre 3. Enfin, on dit que α est **racine multiple** de P si elle est racine d'ordre au moins 2.

Proposition III.40 Il est clair que si α est racine d'ordre d de P, alors α est racine d'ordre $d-1$ de P', et même racine simple de $P^{(d-1)}$.

Proposition III.41 Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a un lien entre divisibilité par $(X-\alpha)$ et ordre de la racine α :

$$\begin{aligned} & \alpha \text{ est racine d'ordre au moins } d \\ \iff \quad & (X-\alpha)^d | P \end{aligned}$$

Pour l'ordre exact :

$$\begin{aligned} & \alpha \text{ est racine d'ordre exactement } d \\ \iff \quad & (X-\alpha)^d | P \quad \text{et} \quad (X-\alpha)^{d+1} \text{ ne divise pas } P \\ \iff \quad & \exists Q \in \mathbb{K}[X], \qquad P = (X-\alpha)^d Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$

Démonstration. La partie $\Rightarrow$ provient de l'égalité de Taylor, et est juste une généralisation de la proposition sur les racines simples. Supposons que α soit racine d'ordre au moins d du polynôme P, alors on a :

$$P = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k=d}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k,$$

puisque par définition d'une racine d'ordre au moins d, les $d-1$ premières dérivées sont nulles.

Puis, comme dans le cas d'une racine simple, on fait le changement de variable et la factorisation par $(X-\alpha)^l$:

$$\begin{aligned}P&=\sum_{k=d}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k\\&=\sum_{k=0}^{n-d}\frac{P^{(k+d)}(\alpha)}{(k+d)!}(X-\alpha)^{k+d}\\&=(X-\alpha)^d\underbrace{\sum_{k=0}^{n-d}\frac{P^{(k+d)}(\alpha)}{(k+d)!}(X-\alpha)^k}_{Q}\end{aligned}$$

Avec un tel choix de Q, on a : $P=(X-\alpha)^dQ$ et donc $(X-\alpha)^d|P$.

Si on suppose de plus que α est racine d'ordre exactement d, alors on a :

$$Q(\alpha)=\frac{P^{(d)}(\alpha)}{d!}\neq 0$$

On est donc assuré d'avoir $Q(\alpha)\neq 0$.

Pour la réciproque, supposons donc que $P=(X-\alpha)^dQ$, pour un certain polynôme $Q\in\mathbb{K}[X]$.

Déjà on peut voir que $P(\alpha)=0$. Puis si $d>1$, on a :

$$P'=d(X-\alpha)^{d-1}Q+(X-\alpha)^dQ=(X-\alpha)^{d-1}(dQ+(X-\alpha)Q).$$

ainsi, $P'(\alpha)=0$.

Le cas d'un d quelconque se démontre donc avec la formule de Leibnitz : Pour $l\leqslant d$, on a :

$$\begin{aligned}P^{(l)}&=\left((X-\alpha)^dQ\right)^{(l)}\\&=\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\left((X-\alpha)^d\right)^{(k)}Q^{(l-k)}\\&=\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\frac{k!}{(k-d)!}(X-\alpha)^{d-k}Q^{(l-k)}.\end{aligned}$$

Puisque si $k\leqslant d$:

$$\left((X-\alpha)^d\right)^{(k)}=\frac{k!}{(k-d)!}(X-\alpha)^{d-k}$$

En substituant X par α, le terme $(X-\alpha)^{d-k}$ est nul, si $k<d$ égal à 1 si $k=d$.

En conséquence, lorsque $l<d$, on $\forall k\in[\![0,l]\!]$, $(X-\alpha)^{d-k}$ est nul en α, donc $P^{(l)}(\alpha)$ est une somme de termes nuls.

On obtient ainsi :

$$\forall l<d,\quad P^{(l)}(\alpha)=0.$$

Ainsi, si $(X-\alpha)^d$ divise P, alors α est racine d'ordre au moins d de P.

Supposons maintenant que $Q(\alpha)\neq 0$, et on veut alors montrer que $P^{(d)}(\alpha)\neq 0$.

On a :

$$P^{(d)}=\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}\frac{k!}{(k-d)!}(X-\alpha)^{d-k}Q^{(d-k)}.$$

Pour les k tels que $k<d$, on a vu que le terme $(X-\alpha)^{d-k}$ est nul en α, ainsi le seul terme qui ne s'annule pas en α est le terme pour $k=d$. On obtient donc :

$$P^{(d)}(\alpha)=d!Q(\alpha)\neq 0.$$

■

Ici encore l'intérêt est de remplacer la recherche du polynôme Q tel que $P=(X-\alpha)^dQ$, par un simple calcul des valeurs de $P(\alpha)$, $P'(\alpha)$, etc.

■ **Exemple III.13** Montrons que pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.
On utilise l'équivalence :

$$(X-1)^3 | P_n \iff 1 \text{ est racine d'ordre au moins 3 de } P_n$$
$$\iff P_n(1) = 0,\ P_n'(1) = 0,\ P_n''(1) = 0 \text{ et } P_n^{(3)}(1) = 0.$$

Cette dernière propriété se démontre facilement. ■

Exercice 2

1. Montrer que le polynôme $X^2 + X + 1$ divise le polynôme $(X+1)^{2n+1} + X^{n+2}$ pour tout entier positif n.
2. Montrer que le polynôme $X^2 + X$ divise le polynôme $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$.
3. Montrer que le polynôme $(X-1)^2$ divise $\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2 - n^2 X^{n-1}$.

Correction :

1. Il faut vérifier $P(j) = 0$ et $P(j^2) = 0$. En utilisant $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
2. Il faut vérifier $P(0) = 0$ et $P(-1) = 0$.
3. Il faut vérifier $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver deux réels a, b tels que $aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

Correction : il faut vérifier $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$, cela donne :

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ (n+1)a + nb = 0 \end{cases}$$

Proposition III.42 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des racines de P, d'ordre respectivement au moins égal à : $r_1, \ldots r_p$. Alors :

le polynôme P est divisible par $\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{r_i}$.

Pour compter les racines d'un polynôme, on a donc deux choix :
Compter les racines distinctes Chaque racine compte pour 1,
Compter les racines avec leur ordre de multiplicité Une racine d'ordre exactement d compte pour d racine.

En conséquence : si on sait que le polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ (ie est de degré inférieur ou égal à n) que et que l'on montre P admet $n+1$ racines comptés avec leur ordre de multiplicité, alors P est nul.
Autrement dit, tout polynôme (non nul) de degré n possède au plus n racines comptés avec leur ordre de multiplicité,

Proposition III.43 — Décomposition des polynômes scindés. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ qui admet autant de racines (comptés avec leur ordre de multiplicité) que son degré . C'est-à-dire tel qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ p racines de P distinctes deux à deux, d'ordre respectivement égal à $r_1, r_2, \ldots, r_p$ vérifiant : $\deg(P) = \sum_{k=1}^{p} r_k$.

Alors on a la décomposition :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{r_i}.$$

où λ est le coefficient dominant de P.
Un tel polynôme est scindé (sur $\mathbb{K}$).

On verra que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé.

Démonstration. On a déjà vu que $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{r_i}$ divise P, ainsi, P s'écrit :

$$P = Q\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{r_i}. \text{ avec } Q \in \mathbb{K}[X]$$

L'étude des degrés assure que Q est que constante et que c'est le terme dominant de P.

■

Décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Factoriser un polynôme c'est le transformer en un produit de polynôme. Pour beaucoup de problèmes, par exemple la recherche de racines, cela permet de se ramener à des petits problèmes plus simples.

Polynômes irréductibles

On a vu qu'un polynôme est toujours divisible par lui-même et par les constantes. Lorsque ceux sont ces seuls diviseurs, alors il est irréductible.

Définition III.33 — Polynômes irréductibles. Un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si les seuls diviseurs de P sont les polynômes constants et les polynômes λP (avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$).

Autrement dit, si on factorise un polynôme irréductible P sous la forme $P = QR$, alors c'est que Q ou R est une constante.

Ainsi un polynôme irréductible n'est pas factorisable de manière non triviale. On peut relier cette définition à celle de **nombres premiers**, qui sont les entiers p divisibles uniquement par 1 et par eux-mêmes.

Un polynôme qui n'est pas irréductible est réductible ou factorisable.

Proposition III.44 On a clairement :
- Si P est de degré 1, alors il est irréductible (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- Si P est de degré supérieur strictement à 1 et qu'il a une racine alors il n'est pas irréductible
- Tout polynôme de degré 2 à discriminants négatifs est irréductibles dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour le premier point, si $d(P) = 1$, et si $P = QR$, et alors $d(P) = 1 = d(Q) + d(R)$, donc l'un des deux polynômes Q ou R est une constante. Donc la seule manière de factoriser P sous la forme QR est que l'un des polynômes soit une constante, l'autre s'écrivant donc λP (avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$). Ainsi, P est irréductible.

Pour le deuxième point : si P a une racine, alors il s'écrit sous la forme, $P = (X-\alpha)Q$. Avec $d(Q)+1 = d(P)$, donc si P est de degré supérieur strictement à 1, Q n'est pas un polynôme constant.

Pour le dernier point, supposons que P soit de degré 2, sans racine, et que $P = QR$. Supposons par l'absurde qu'aucun des deux polynômes Q et R ne soient une constantes alors comme : $d(P) = 2 = d(Q) + d(R)$, c'est donc que $d(Q) = 1$ et $d(R) = 1$. Donc Q (et R) s'écrit sous la forme $Q = aX + b$, donc Q a une racine, donc P a une racine, contradiction. ■

Un polynôme peut être irréductible dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{C}$: par exemple : $X^2+1 = (X-i)(X+i)$ est irréductible dans $\mathbb{R}$ (polynôme de degré 2 à discriminants négatifs), tandis qu'il peut se factoriser dans $\mathbb{C}$.
Par contre, si un polynôme P est réductible dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si il se factorise sous la forme $P = QR$, avec Q et R non constant, alors il ne sera pas irréductible sur $\mathbb{C}$, puisque la factorisation $P = QR$ est aussi valable dans $\mathbb{C}$.

Bien entendu, la propriété sur les polynômes de degré 2 ne se généralise pas : un polynôme peut ne pas avoir de racines mais ne pas être irréductibles. Par exemple : $P = (X^2+X+1)^2(X^2+1)$.

Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème III.45 — de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Démonstration. ADMIS conformément au programme. ■

En conséquence on a :

Proposition III.46 Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Démonstration. On a vu que les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Soit maintenant un polynôme P irréductible, alors P a au moins une racine α (d'après le théorème de d'Alembert), donc P s'écrit sous la forme $P = (X-\alpha)Q$. Comme P est irréductible, Q doit être une constante notée λ, on a donc $P = \lambda(X-\alpha)$ et P est de degré 1. ■

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème III.47 — Décomposition dans $\mathbb{C}$. Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ de $\mathbb{C}[X]$.
On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines (distinctes) de P dans $\mathbb{C}$, et $k_1, \ldots k_p$ l'ordre de multiplicité de ces racines, alors :

- $n = k_1 + k_2 + \ldots k_p$ (ie P a autant de racines comptés avec leur ordre de multiplicité que son degré).
- On a la décomposition :

$$\begin{aligned} P =& \lambda(X-\alpha_1)^{k_1}\ldots(X-\alpha_p)^{k_p} \\ =& \lambda\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{k_i} \end{aligned}$$

où λ est le coefficient dominant de P.

- Cette factorisation est unique à l'ordre près des racines.

On dit que tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}$.

On peut aussi écrire : tout polynôme de degré n se décompose sous la forme :

$$P = (X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n) \text{ avec } (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \text{ les racines,}$$

avec la convention que l'on écrit une fois les racines simples, deux fois les racines doubles, etc.

Ce résultat correspond à factoriser un polynôme comme on décompose une entier en produit de nombre premier : de la même manière que $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, on a : $X^4 + X^3 - X^2 - X = (X+1)^2 X(X-1)$.

Si le polynôme est unitaire et que l'on connaît ses racines, alors on connaît les coefficients (il suffit de développer). Pour un polynôme quelconque, il reste une dernière inconnue : le terme dominant.

Démonstration. Commençons par l'unicité. Il suffit de montrer que si P s'écrit

$$P = \lambda\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{k_i},$$

alors :

- le facteur λ est forcément le coefficient de plus haut degré a_n, ce qui est évident en identifiant les termes de plus haut degré (et montre au passage, que l'on a forcément $n = k_1 + k_2 + \ldots k_p$)
- les $(\alpha_i)_{i=1\ldots n}$ sont les seules racines de P, ce qui est clair.
- pour tout i, k_i est l'ordre de multiplicité de α_i dans P. Puisque $(X-\alpha_i)^{k_i}$ divise P mais $(X-\alpha_i)^{k_i+1}$ ne divise pas P.

Cela démontre donc que cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs, puisqu'on peut toujours échanger α_1 et α_2.

La preuve se fait par récurrence sur le degré n. On note

$$\mathscr{P}(n) : \forall P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ on peut décomposer } P \text{ en facteurs irréductibles.}$$

Il s'agit quelque part d'une récurrence forte, puisqu'on rappelle que $\mathbb{C}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Initialisation : La proposition est clairement vraie pour les polynôme de degré 0 (*i.e.* les constantes), et les polynômes de degré 1(*i.e.* ceux qui s'écrivent sous la forme $a_0 + a_1 X = a_1\left(X + \frac{a_0}{a_1}\right)$.

Hérédité : Supposons la proposition vrai au rang n, et soit $P \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$. Pour simplifier les notations, on a déjà que si P est de degré strictement inférieur à $n+1$, alors c'est que $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et donc le résultat a déjà été démontré. On peut donc supposer $d(P) = n+1$.

D'après le théorème de d'Alembert, P a une racine. Soit donc α_0 une racine de P, d'ordre de multiplicité k_0. On a vu que P s'écrit alors : $P = (X-\alpha_0)^{k_0} Q$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à Q qui est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Plus précisément on a $d(P) = k_0 + d(Q)$. Comme $d(P) = n+1$, $d(Q)$ est strictement inférieur à n si α est racine multiple, égal à n si α est racine simple. De plus, on constate en développant les coefficients dominants (ou en utilisant le résultat sur le terme dominant d'un produit) que le terme dominant de Q est le coefficient dominant de P.

Ainsi, si on note $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines de Q, et $k_1, \dots k_p$ l'ordre de multiplicité de ces racines, alors on a :

$$P = a_{n+1}(X-\alpha_0)^{k_0}(X-\alpha_1)^{k_1}\dots(X-\alpha_p)^{k_p},$$

et $d(Q) = k_1 + \dots k_p$. On obtient bien la factorisation demandée. Puis, comme on l'a vu cette écriture impose que les racines de P sont les $(\alpha_i)_{i=0\dots p}$, avec ordre de multiplicité $(k_i)_{i=0\dots p}$.

On a aussi : $d(P) = k_0 + d(Q) = k_0 + k_1 + \dots k_p$. Donc le degré de P est bien égal à son nombre de racines comptés avec ordre de multiplicité. ■

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

⋆ Rappel sur la relation entre divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$

On a vu que pour deux polynômes réels A et B il est équivalent que :

- $A|B$ dans $\mathbb{C}[X]$, au sens où il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$, tel que $B = QA$,
- $A|B$ dans $\mathbb{R}[X]$, au sens où il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$, tel que $B = QA$.

En effet, si $A = QB$, alors l'unicité de la division euclidienne assure que $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Par contre, on a vu qu'un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ pouvait être réductible dans $\mathbb{C}[X]$.

⋆ Cas des polynômes de degré impair

Commençons par un résultat que l'on peut obtenir par l'analyse :

Proposition III.48 Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Démonstration. Il suffit de voir que $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$, ainsi les limites en plus et moins l'infini sont infini et de signes contraires. Donc le polynôme étant continu, il s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. ■

En conséquence, **un polynôme de degré impair n'est pas irréductible sur** $\mathbb{R}$.

⋆ Racine complexe d'un polynôme réel

Proposition III.49 Soit P un polynôme réel, et α une racine dans $\mathbb{C}$ de P. Alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P.
De plus l'ordre de multiplicité de α dans P est le même que celui de $\overline{\alpha}$.

Remarquons que si $\alpha \notin \mathbb{R}$, alors α et $\overline{\alpha}$ sont distinctes (on a donc en fait deux racines).

Démonstration. On note $P = a_0 + a_1 X + \dots a_n X^n$. On a

$$\begin{aligned} P(\overline{\alpha}) &= a_0 + a_1\overline{\alpha} + \dots a_n\overline{\alpha}^n \\ &= \overline{a_0 + a_1\alpha + \dots a_n\alpha^n} \\ &= \overline{P(\alpha)}. \end{aligned}$$

Ainsi : $P(\alpha) = 0 \iff P(\overline{\alpha}) = 0$.

Pour l'ordre de multiplicité, il suffit d'appliquer ce résultat aux dérivées successives de P. ■

On peut donc rassembler les racines de $P \in \mathbb{R}[X]$ en trois parties :

- les racines réelles,
- les racines complexes : $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$,
- les conjugués des précédentes : $(\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_p})$,

⋆ Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ en polynôme irréductible

On obtient alors le résultat final :

Théorème III.50 — Décomposition dans $\mathbb{R}$**.** Les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ sont les polynôme de degré 1, et les polynômes de degré 2 à discriminants strictement négatifs.

De plus pour un polynôme réel P de degré $n \geqslant 1$, on peut le factoriser sur $\mathbb{R}$ sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{l=1}^{q} (X-\alpha_l)^{d_l} \prod_{i=1}^{p} (X^2+\gamma_i X+\delta_i)^{e_i},$$

avec :

- λ est le coefficient dominant de P,
- $(\alpha_l)_{i=l\ldots q}$ les racines de P dans $\mathbb{R}$, la racina α_l ayant pour ordre de multiplicité d_l,
- les polynômes $X^2+\gamma_i X+\delta_i$ sont tous à discriminants négatifs.

Démonstration. Plus qu'une démonstration, nous allons écrire un algorithme qui permet de passer de la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$ la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$.

Montrons tout d'abords que les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ sont les polynôme de degré 1, et les polynômes de degré 2 à discriminants strictement négatifs.

On a déjà vu que ces polynômes sont irréductibles, il est aussi clair que si P est de degré 2 avec un discriminant positifs, il a une racine donc n'est pas irréductible.

Soit donc un polynôme de degré supérieur ou égal à 3.

Ce polynôme a une racine sur $\mathbb{C}$, notée α.

Si α est réel, alors P est réductible. Si α n'est pas réel, alors $\overline{\alpha}$ est une autre racine de P, distinctes car $\overline{\alpha} \neq \alpha$. Donc $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})|P$, ce qui s'écrit :

$$\exists Q \in \mathbb{C}[X], \qquad P = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})Q$$

Or

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2 \text{ est un polynôme réel,}$$

donc en fait Q est aussi un polynôme réel, de degré supérieur ou égal à 1, car degré P est supérieur à 3. Donc P n'est par irréductible.

Ainsi les seuls polynômes irréductibles sont ceux de degré 1 et ceux de degré 2 sans racines.

La suite de la proposition n'est qu'une généralisation de ce qui précède. Soit P un polynôme réel. Commençons par se ramener à un polynôme sans racine réelle. Soit $(\alpha_l)_{i=l\ldots q}$ les racines réelles de P avec d_l les ordres de multiplicité correspondants. On sait déjà que $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P = \prod_{l=1}^{q} (X-\alpha_l)^{d_l} Q.$$

Le polynôme Q est sans racines réelles, en effet :

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un réels distincts des racines de P, *i.e.* des $(\alpha_l)_{i=l\ldots q}$, alors $Q(\alpha)$ ne peut être nul, puisque cela impliquerai que α soit une nouvelle racine réelle de P.
- Si $Q(\alpha_i) = 0$, alors α_i est racine d'ordre au moins d_i+1. Ainsi, aucune racine de P n'est racine de Q.

Remarquons aussi que le terme dominant de Q est le terme dominant de P.

On décompose alors Q sur $\mathbb{C}$ sous la forme ;

$$Q = \lambda \prod_{i} (X-\alpha_i)^{k_i}.$$

Les α_i étant forcément complexes, on les groupe par deux α_i et $\overline{\alpha_i}$, ces deux racines étant distinctes et avec le même ordre de multiplicité. On obtient :

$$\begin{aligned} Q =& \lambda \prod_{i=1}^{p} ((X-\alpha_i)(X-\overline{\alpha_i}))^{k_i} \\ =& \lambda \prod_{i=1}^{p} \left(X^2 - 2\Re(\alpha_i)X + |\alpha_i|^2\right)^{k_i} \\ =& \lambda \prod_{i=1}^{p} (X^2+\gamma_i X+\delta_i)^{e_i}. \end{aligned}$$

en posant $\gamma_i = 2\Re(\alpha_i)$, et $\delta_i = |\alpha_i|^2$.

Ces polynômes sont bien sans racines réelles, ie à discriminant négatif. ■

À retenir : Pour factoriser un polynôme P sur $\mathbb{R}$, on peut le factoriser sur $\mathbb{C}$, puis regrouper les racines complexes non réelles par deux, puisqu'on est sûr qu'à chaque racine complexes non réelle α, $\overline{\alpha}$ est aussi racine. Cette méthode est appelée **Méthode indirecte de factorisation sur** $\mathbb{R}$.

▪ **Exemple III.14** Décomposons sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme X^5-1.

On a 5 racines dans $\mathbb{C}$ (les racines n-ième de l'unité), ce qui donne la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^5-1=(X-1)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{8\pi}{5}}\right)$$

Une seule racine est réelle (1), les autres sont complexes non réelles, il faut donc les regrouper deux par deux. En plaçant les racines sur un cercle, on a facilement :

$$\overline{e^{i\frac{2\pi}{5}}}=e^{i\frac{8\pi}{5}} \qquad \text{et} \qquad \overline{e^{i\frac{4\pi}{5}}}=e^{i\frac{6\pi}{5}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left(X-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{8\pi}{5}}\right)&=\left(X-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)\\&=X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X+1\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\left(X-e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)&=\left(X-e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right)\\&=X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X+1\end{aligned}$$

Au final on a la décomposition :

$$X^5-1=(X-1)\left(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X+1\right)$$

▪

Somme et produit des racines d'un polynôme

✯ Relation entre coefficients et racines

Proposition III.51 Soit un polynôme de degré n, $P=\sum_{k=1}^{n}a_kX^k$.

On le décompose en facteurs irréductibles (éventuellement sur $\mathbb{C}$), en écrivant :

$$P=a_n\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i) \qquad \text{les } (\alpha_i) \text{ étant les racines (non distinctes).}$$

a_n étant le coefficient dominant de P

Alors, la somme des racines est

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

et le produit des racines est

$$\prod_{i=1}^{n}\alpha_i=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

En développant on peut exprimer tous les coefficients (a_k) en fonction des racines (α_i).

Ne pas oublier le terme dominant.

Démonstration. Il suffit de développer. ■

▪ **Exemple III.15** Pour un polynôme de degré 4, on a :

$$\begin{aligned}P =& a_4X^4+a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0\\ =& a_4(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)(X-\varepsilon)\\ =& a_4\Big(X^4-(\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon)X^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\varepsilon+\beta\gamma+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon)X^2\\ &+(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\varepsilon+\beta\gamma\varepsilon)X+(\alpha\beta\gamma\varepsilon)\Big)\end{aligned}$$

On obtient donc les relations :

$$\begin{aligned}-a_4(\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon) =& a_3\\ a_4(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\varepsilon+\beta\gamma+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon) =& a_2\\ a_4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\varepsilon+\beta\gamma\varepsilon) =& a_1\\ a_4(\alpha\beta\gamma\varepsilon) =& a_0.\end{aligned}$$

▪

On voit que dans le développement de $a_n\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ il y a 2^n termes puisque dans chaque parenthèse contient deux termes. Devant X^k il y a $\binom{n}{k}$ termes : puisque cela corresponds à choisir k parenthèses où l'on choisit le X.
Sur l'exemple ci-dessus, on voit : la ligne du triangle de Pascal $(1,4,6,4,1)$.

✯ Cas des polynômes du second degré

Proposition III.52 Soit $P=aX^2+bX+c$ avec $a\neq 0$ un polynôme de degré 2. (α,β) les deux racines dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes).
Alors on a :

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$
$$\text{et}\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

Proposition III.53 Soit x et y deux nombres tels que $x+y=P$ et $xy=Q$, avec P et Q donnés. Alors x et y sont les racines du polynômes X^2-PX+Q.

Ainsi, on peut calculer deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

Démonstration. On considère le polynôme $(X-x)(X-y)$, on a :

$$\begin{aligned}(X-x)(X-y) =& X^2-(x+y)X+xy\\ =& X^2-PX+Q.\end{aligned}$$

■

✯ Exemple des racines n-ième de l'unité

On a vu :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{2i\frac{k\pi}{n}}\right)$$

En appliquant ce qui précède, on peut calculer :

la somme des racines n-ièmes de l'unité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}e^{2i\frac{k\pi}{n}}=0$

le produit des racines n-ièmes de l'unité $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}e^{2i\frac{k\pi}{n}}=(-1)^{n-1}$

En effet, la première relation s'obtient par le terme de degré $n-1$ du polynôme X^n-1, la deuxième par le terme constant.

Exercices classiques sur les polynômes

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

⋆ Divisibilité

Il faut à chaque fois se ramener aux racines

Exercice 1 On considère le polynôme $P = X^2 + X + 1$.

1. Déterminer les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que P divise $X^5 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 1$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2010X^{2011} + 3X^2 + 1$ par P.

Correction :

1. On peut écrire $P = (X - j)(X - \overline{j})$. Il s'agit donc de déterminer les valeur de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $Q = X^5 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 1$ admet j et $\overline{j}$ comme racine. On a :

$$\begin{aligned} Q(j) &= j^5 + \lambda j^3 + \mu j^2 + 1 \\ &= j^2 + \lambda + \mu j^2 + 1 \\ &= (1+\mu) j^2 + (1+\lambda) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} Q(j^2) &= j^{10} + \lambda j^6 + \mu j^4 + 1 \\ &= j + \lambda + \mu j + 1 \\ &= (1+\mu) j + (1+\lambda) \end{aligned}$$

On cherche donc (λ, μ) tels que :

$$\begin{cases} (1+\mu) j^2 + (1+\lambda) = 0 \\ (1+\mu) j + (1+\lambda) = 0 \end{cases}$$

Avec $l_1 \leftarrow l_1 - j l_2$, cela donne :

$$(1+\lambda)(1-j) = 0$$

donc $\lambda = -1$ (car $j \neq 1$), puis $\mu = -1$. Au final, la seule valeur pour laquelle $P | Q$ est : $Q = X^5 - X^3 - X^2 + 1$

2. On note $A = 2010X^{2011} + 3X^2 + 1$ et on cherche (a, b) tels que :

$$A = QP + aX + b$$

On écrit ensuite $P = (X - j)\left(X - \overline{j}\right)$ et on a alors le système :

$$\begin{aligned} A(j) &= aj + b \\ A\left(\overline{j}\right) &= a\overline{j} + b \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer : $A(j)$ et $A\left(\overline{j}\right)$

⋆ Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

Exercice 2 Décomposer $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$, et rechercher par ailleurs les solutions de l'équation $P(x) = 0$ en posant $y = x + \frac{1}{x}$.

En déduire l'expression exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Correction : comme vu en cours :

$$\begin{aligned} (X-1)P &= X^5 - 1 = \prod_{k=0}^{5} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) \\ &= (X-1)\left(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1\right) \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition dans $\mathbb{C}$:

$$P = \left(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1\right)$$

On résout $P(x) = 0$ en posant $y = x + \frac{1}{x}$ (0 n'est pas solution).

$$\begin{aligned}1 + x + x^2 + x^3 + x^4 &= x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2\right)\\ &= x^2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right)\end{aligned}$$

On est donc ramené à l'équation $y^2 + y - 1 = 0$, on trouve deux racines, puis on résout $x + \frac{1}{x} = y$.

Ce qui nous donne les 4 racines complexes. En identifiant on trouve la valeur demandée.

Exercice 3

1. Résoudre l'équation $z^3 = 1 + i$.
2. Factoriser sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P(X) = X^6 - 2X^3 + 2$.

Correction : il faut écrire $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc on cherche $z = \rho e^{i\theta}$, cela donne :

$$\rho = 2^{\frac{1}{6}} \qquad \exists k \in [\![0,2]\!],\ \theta = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$$

On cherche les racines de P en posant $y = x^3$, cela donne : $y^2 - 2y + 2 = 0$, et donc $y = 1 + i$, d'où les 6 solutions sur $\mathbb{C}$. En les regroupant 2 à 2, on obtient la factorisation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Soit le polynôme : $P = X^4 - X^2 + 1$. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Commentaire : il s'agit classiquement d'appliquer le théorème de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$:

- la factorisation en polynôme irréductible est un produit de polynôme de degré 1 dans $\mathbb{C}[X]$,
- dans $\mathbb{C}[X]$, c'est un produit de polynôme de degré 1 et de degré 2 à discriminant négatif.

Ici il s'agit d'un polynôme de degré 4. Pour la factorisation dans $\mathbb{R}$, il y a donc trois possibilités :

- soit 4 polynôme de degré 1,
- soit 2 polynôme de degré 1 et un polynôme de degré 2 irréductible,
- soit 2 polynôme de degré 2 irréductibles.

Pour savoir quelle est la situation, on peut chercher des racines. Pour cela on se ramène à résoudre l'équation : $y^2 - y + 1 = 0$ pour chercher des racines dans $\mathbb{R}$. Cette équation n'admet pas de solutions, on peut donc en déduire que c'est la troisième solution.

Technique 1 : On factorise en regroupant les termes en X^4 et le terme constant :

$$\begin{aligned}X^4 - X^2 + 1 &= (X^2 + 1)^2 - 2X^2 - X^2 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2\\ &= (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1).\end{aligned}$$

On a obtenu la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$, on en déduit facilement la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$, puis les racines dans $\mathbb{C}[X]$.

Technique 2 : On cherche les racines dans $\mathbb{C}$.

Pour cela on pose $y = x^2$, et on résout l'équation $y^2 - y + 1 = 0$, ce qui donne comme solution : $y_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, soit $y_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $y_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Pour trouver les racines dans $\mathbb{C}$, on doit donc résoudre $x^2 = y_1$ et $x^2 = y_2$.

Pour la première équation cela donne : $x_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $x_2 = -e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$. Pour la deuxième équation cela donne : $x_3 = e^{i\frac{-\pi}{6}}$ et $x_2 = -e^{i\frac{-\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

D'où les racines et la factorisation dans $\mathbb{C}$:

$$X^4 - X^2 + 1 = \left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{-\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$$

Aucune de ces racines est réelles.

En les plaçant sur un cercle, on les regroupe deux par deux :

$$\left(X-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X-e^{i\frac{-\pi}{6}}\right)=X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+1=X^2-2\sqrt{3}+1$$
$$\left(X-e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X-e^{i\frac{-5\pi}{6}}\right)=X^2-2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+1=X^2+2\sqrt{3}+1.$$

D'où la factorisation sur $\mathbb{R}$:

$$X^2-X^2+1=(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1).$$

⋆ Polynômes de Lagrange

On pourra aussi voir la fiche sur les matrices de VanDerMonde et le lien avec les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Exercice 5 **Interpolation de Lagrange**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier i de $\{1,2,\dots,n\}$, on suppose donné n réels $a_1,\dots a_n$ distincts.

On note L_i le polynôme : $L_i=\prod_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\k\neq i}}(X-a_k)$.

Par exemple, si $n=3$, $a_1=-1$, $a_2=0$, et $a_3=1$, alors :

$$L_1=X(X-1)\qquad L_2=(X-1)(X+1)\qquad L_3=X(X+1)$$

1. Vérifier que, pour tous entiers i et j de $\{1,2,\dots,n\}$, le réel $L_i(a_j)$ est nul lorsque i est différent de j, et est non nul lorsque i est égal à j.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Montrer qu'il existe un **unique** polynôme, que l'on note P_f, de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que pour tout entier j de $\{1,2,\dots,n\}$, on a l'égalité $P_f(a_j)=f(a_j)$, et que ce polynôme est donné par la formule :

$$P_f=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)}{L_i(a_i)}L_i.$$

Correction :

1. On a :

$$L_i(a_j)=\prod_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\k\neq i}}(a_j-a_k)=\begin{cases}0 & \text{si } i\neq j \text{ car le produit contient le terme } (a_j-a_j)\\ \neq 0 & \text{si } i=j \text{ car les } (a_j) \text{ sont distincts deux à deux.}\end{cases}$$

2. Pour l'unicité : si deux polynômes conviennent P_j et Q_f, alors leurs différences : $R=P_f-Q_f$ est nulle sur les n valeurs distinctes (a_j). Or ce polynôme est de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc R est nul et l'unicité.
   Pour l'existence : on pose P_j comme indiqué, on constate que :

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ P_f(a_j)=f(a_j)$$

⋆ Polynômes de Tchebychev

Exercice 6 **Polynôme de Tchebychev de deuxième espèce**

On considère la suite de polynômes U_n définie par :

$$U_0(X)=1,\qquad U_1(X)=2X,\qquad \text{et}\qquad \forall n\in\mathbb{N},\qquad U_{n+2}(X)=2XU_{n+1}(X)-U_n(X)$$

1. (a) Calculer U_2, U_3 et U_4.
   (b) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}$, U_n est de degré n.
   (c) Déterminer le coefficient dominant de U_n.
   (d) Étudier la parité de U_n.
2. (a) Soit $\theta\in\mathbb{R}$, tel que $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\theta\neq k\pi$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

(b) Déterminer ainsi $U_n(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On distinguera les cas où $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$.
(c) Déterminer les racines de U_n sur $]-1,1[$, puis toutes les racines de U_n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un polynôme V_n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}, \qquad V_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

On pose $R_n = U_n - V_n$.
(a) Calculer $R_n(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.
(b) En déduire $V_n = U_n$.

Commentaire : étude très classique d'une suite de polynôme. Des récurrences, étude de degré/ terme dominant/ parité. Lien avec les complexes,la trigonométrie. Raisonnement sur les racines. Unicité du polynôme.

Correction :

1. (a) On trouve : $U_2 = 4X^2 - 1$, $U_3 = 8X^3 - 4X$, et $U_4 = 16X^4 - 12X^2 + 1$.
(b) Par récurrence double. On note pour $n \in \mathbb{N}$:

$\mathscr{P}_n$: U_n est de degré n

Initialisation : U_0 est bien de degré 0 et U_1 est bien de degré 1.
Hérédité : considérons $n \in \mathbb{N}$ fixé, tel que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vrais. On a alors $U_{2n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$, somme de deux polynômes, avec : $d(2XU_{n+1}) = 1 + d(U_{n+1}) = n+2$ et $d(U_n) = n$ (d'après les HR). On en déduit que $d(U_{2n+2}) = n+2$.
D'où la conclusion.

(c) Les premiers termes semblent indiquer que, en négligeant les termes de degrés inférieurs : $U_n = 2^n X^n + \dots$.
Démontrons cela par récurrence double :

$\mathscr{P}_n$: $U_n = 2^n X^n + \dots$ en négligeant les termes de degré inférieur.

Initialisation : on a bien $U_0 = 2^0 X = X + \dots$, et $U_1 = 2X + \dots$.
Hérédité : considérons $n \in \mathbb{N}$, fixé, tel que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vrais. On a alors :

$$\begin{aligned} U_{2n+2} =& 2XU_{n+1} - U_n = 2X\left(2^{n+1}X^{n+1} + \dots\right) - \left(2^n X^n + \dots\right) \\ =& 2^{n+2}X^{n+2} + \dots. \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie.

(d) Les premiers termes semblent indiquer que U_n a la même parité que n. On considère donc la proposition

$\mathscr{P}_k$: U_{2k} est pair et U_{2k+1} est impair.

On procède par récurrence (simple) sur $k \in \mathbb{N}$.
Initialisation : pour $k = 0$, on a bien U_0 pair et U_1 est impair.
Hérédité : Considérons $k \in \mathbb{N}$ fixé, tel que $\mathscr{P}_k$ est vrai. On a alors :

$$\begin{aligned} U_{2k+2}(-X) =& 2(-X)U_{2k+1}(-X) - U_{2k}(-X) \\ =& 2(X)U_{2k+1}(X) - U_{2k}(X) && \text{d'après HR} \\ =& U_{2k+2}(X). \end{aligned}$$

Ce qui montre que U_{2k+2} est pair.
Puis de même :

$$\begin{aligned} U_{2k+3}(-X) =& 2(-X)U_{2k+2}(-X) - U_{2k+1}(-X) \\ =& -2XU_{2k+2}(X) + U_{2k+1}(X) && \text{d'après HR et ce qui précède} \\ =& -U_{2k+3}(X). \end{aligned}$$

Ce qui montre que U_{2k+2} est impair et l'hérédité.
En conclusion, pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme U_n est de la même parité que n.

2. (a) On considère $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $\forall k \in \mathbb{Z},\ \theta \neq k\pi$, *i.e.* $\sin(\theta) \neq 0$, et on pose la proposition :

$$\mathscr{P}_n :\ U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

et on démontre que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vrai quelque soit n par récurrence double.
Initialisation : $U_0(\cos(\theta)) = 1$ et $\frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$, d'où $\mathscr{P}_0$. $U_1(\cos\theta) = 2\cos\theta$ et $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos(\theta)$, en utilisant $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.
Hérédité : considérons $n > 0$, fixé, tel que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n-1}$ soient vrais. On a alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1}(\cos\theta) =& 2\cos\theta U_n(\cos\theta) - U_{n-1}\cos\theta \\ =& 2\cos\theta\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} && \text{d'après les HR} \\ =& \frac{1}{\sin\theta}\left(2\cos(\theta)\sin(n+1)\theta - \sin(n\theta)\right). \end{aligned}$$

Il faut simplifier cette expression en utilisant les formules de trigonométrie, que l'on peut retrouver rapidement :

$$\begin{aligned} 2\cos(\theta)\sin(n+1)\theta =& \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\left(e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}\right) \\ =& \frac{1}{2i}\left(e^{i(n+2)\theta} + e^{ni\theta} - e^{-in\theta} - e^{-i(n+2)\theta}\right) \\ =& \sin(n+2)\theta + \sin n\theta. \end{aligned}$$

En reportant, on trouve :

$$U_{n+2} = \frac{\sin(n+2)\theta)}{\sin\theta}.$$

D'où l'hérédité.
En conclusion, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

(b) Pour calculer $U_n(0)$, il suffit de poser $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a bien alors $\sin(\theta) \neq 0$, et on peut donc appliquer la formule précédente pour obtenir :

$$U_n(0) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Il suffit alors de dessiner un cercle pour obtenir :

$$U_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ s'écrit } n = 4k \\ 0 & \text{si } n \text{ s'écrit } n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } n \text{ s'écrit } n = 4k+2 \\ 0 & \text{si } n \text{ s'écrit } n = 4k+3. \end{cases}$$

NB : il est inutile de considérer le cas $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

(c) Si $x \in]-1,1[$, alors x s'écrit de manière unique sous la forme $x = \cos(\theta)$, avec $\theta = \arccos(x) \in]0,\pi[$. L'équation $U_n(x) = 0$, est alors équivalente à $U_n(\cos\theta) = 0$, qui s'écrit (puisque $\sin\theta \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \sin((n+1)\theta) = 0 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ (n+1)\theta = k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{k}{n+1}\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,n]\!],\ \theta = \frac{k}{n+1}\pi && \text{car } \theta \in]0,\pi[\\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{n+1}\pi \text{ ou } \frac{2}{n+2}\pi \text{ ou } \ldots \text{ ou } \frac{n}{n+1}\pi. \end{aligned}$$

On obtient alors les racines de U_n sur l'intervalle $]-1,1[$:

$$\mathscr{S} = \left\{ \cos\left(\frac{k}{n+1}\right) \middle| k \in [\![1,n]\!] \right\} = \left\{ \cos\left(\frac{1}{n+1}\pi\right), \cos\left(\frac{2}{n+2}\pi\right), \ldots, \cos\left(\frac{n}{n+1}\pi\right) \right\}$$

NB : on a raisonné par équivalence ici.
Il reste à déterminer combien cela fait de racines. On a :

- les valeurs $\frac{k}{n+1}\pi$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ sont n valeurs distinctes de $]0,\pi[$,
- la fonction cos est injective sur $]0,\pi[$,

ainsi, il y a n éléments distincts dans $\mathscr{S}$.
NB : ce n'est pas évident ! ! !
On a donc déterminé n racine de U_n dans l'intervalle $]-1,1[$, or U_n est un polynôme de degré n. On en déduit que l'on a trouvé toutes les racines.
Ainsi, les racines de U_n sont :

$$\left\{ \cos\left(\frac{k}{n+1}\right) \middle| k \in [\![1,n]\!] \right\} = \left\{ \cos\left(\frac{1}{n+1}\pi\right), \cos\left(\frac{2}{n+2}\pi\right), \ldots, \cos\left(\frac{n}{n+1}\pi\right) \right\}.$$

3. (a) De manière évidente, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \sin(\theta) \neq 0,\ R_n(\cos\theta) = 0.$$

   (b) Ainsi, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, tel que $\sin(\theta) \neq 0$, on a $\cos\theta$ est racine de V_n. En particulier, pour tout $\theta \in]0,\pi[$, $\cos\theta$ est racine de V_n. Or lorsque θ parcourt $]0,\pi[$, $\cos\theta$ parcourt $]-1,1[$, *i.e.* la fonction cos est surjective de $]0,\pi[$ dans $]-1,1[$. Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, x est racine de R_n, et R_n a une infinité de racine donc R_n est nul. Ce qui montre que $U_n = V_n$.

Exercice 7

Polynôme de Tchebychev de première espèce

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et les racines de T_n.
3. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n$$

4. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant 2^{n-1} tel que

$$\forall x \in [-1,1],\ P_n(x) \in [-1,1]$$

5. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire, on a $\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ avec égalité si et seulement si $P = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$.
6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(n\theta) = T_n(\operatorname{ch}\theta)$$

   En déduire que

$$(|x| \leqslant 1) \iff (|T_n(x)| \leqslant 1)$$

7. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, T_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(x^2-1)y'' + xy' - n^2 y = 0$$

R On peut aussi vérifier que la famille T_n est orthogonale pour le produit scalaire :

$$< P,Q >= \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Correction :

1. Pour l'unicité, voir l'exercice précédent.
   Pour l'existence, on peut faire avec la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\cos(nx)+i\sin(nx) &= (\cos x + i\sin x)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)\end{aligned}$$

   On ne garde que les termes pour k pairs (la partie réelle) :

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^{2k}$$

   Ainsi on pose :

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k}\left(1-X^2\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k}\left(X^2-1\right)^k\end{aligned}$$

   et on a bien le résultat.
   On peut aussi procéder par récurrence double avec les formules :

$$\begin{aligned}\cos\left((n+2)x\right) &= \cos((n+1)x+x) = \cos((n+1)x)\cos(x) - \sin((n+1)x)\sin(x) \\ \cos\left(nx\right) &= \cos((n+1)x-x) = \cos((n+1)x)\cos(x) + \sin((n+1)x)\sin(x)\end{aligned}$$

   Ce qui donne facilement la relation de récurrence de la question 3 : $T_{n+1}+T_{n-1} = 2XT_n$. On montre alors l'existence par récurrence.
2. Par récurrence pour $n \geqslant 1$:

$$\mathscr{P}(n) : T_n = 2^{n-1}X^n + \dots$$

   On a bien $T_1 = X$ et $T_2 = 2x^2-1$.
   Si on considère n tels que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, alors :

$$\begin{aligned}T_{n+2} &= 2XT_{n+1} - T_n \\ &= 2X\left(2^{n-1}X^{n+1} + \underbrace{\dots}_{d<n+1}\right) - X^n + \underbrace{\dots}_{d<n} \\ &= 2^nX^{n+2} + \underbrace{\dots}_{d<n+2}\end{aligned}$$

   D'où l'hérédité.
   On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k}\left(X^2-1\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k}\left(X^n + \underbrace{\dots}_{d<n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k} X^n + \underbrace{\dots}_{d<n}\end{aligned}$$

   D'où le degré.

Pour le coefficient dominant, on reconnaît la somme des binomiaux pairs :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Pour les racines : on résout $P(y) = 0$ pour $y \in [-1,1]$, pour une telle valeur, on peut poser $y = \cos(x)$ et on est donc ramener à résoudre :

$$\cos(nx) = 0$$

ce qui donne :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} = \pi\frac{2k+1}{2n}$$

Les racines de T_n dans $[-1,1]$ sont donc :

$$\cos\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right) \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

comme $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, on peut se ramener à $k \in [\![0, n-1]\!]$, ce qui donne n racines distinctes de T_n (par injectivité du cosinus) sur $[0,\pi]$:

$$\cos\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right) \text{ pour } k \in [\![0, n-1]\!]$$

comme T_n est de degré n, on a alors trouvé toutes les racines.
On peut donc écrire :

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\pi\frac{2k+1}{2n}\right)\right)$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos x) + T_{n-1}(\cos x) &= \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) \\ &= 2\cos(x)\cos(nx) = 2\cos(x)T_n(\cos x) \end{aligned}$$

lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, $\cos(x)$ varie dans $[-1,1]$, on peut donc écrire :

$$\forall y \in [-1,1],\ T_{n+1}(y) + T_{n-1}(y) = 2yT_n(y)$$

Ainsi, les polynômes $T_{n+1} + T_{n-1}$ et $2XT_n$ ont une infinité de valeurs communes donc sont égaux.

4. Pour l'existence T_n convient.
Pour l'unicité, il faut donc supposer qu'il existe un autre polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et de coefficient dominant 2^{n-1} vérifiant la relation :

$$\forall x \in [-1,1],\ P_n(x) \in [-1,1]$$

On note $Q = P_n - T_n$, qui est donc un polynôme de degré $n-1$ et on considère les nombres $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, on a alors :

$$T_n(x_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

Ainsi :

$$Q(x_k) = P_n(x_k) - (-1)^k$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} Q(x_0) &= P_n(x_0) - 1 \leqslant 0 \\ Q(x_1) &= P_n(x_1) + 1 \geqslant 0 \\ Q(x_2) &= P_n(x_2) - 1 \leqslant 0 \\ &\vdots \\ Q(x_n) &= P_n(x_n) - (-1)^n \end{aligned}$$

On peut donc dire que Q change $n+1$ fois de signe donc a au moins n racines (thm des valeurs intermédiaires). ainsi, Q est nul et on a l'unicité.

5. Considérons P un polynôme unitaire de degré n, alors $2^{n-1}P$ est un polynôme de degré $n-1$. Comme on l'a vu à la question précédente, on peut donc dire que :

$$\forall x \in [-1,1],\ |2^{n-1}P(x)| \leqslant 1 \text{ ie } |P(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ainsi :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ensuite si on considère $P = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$, alors P est unitaire et pour $y \in [-1,1]$,

$$P(y) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(y)$$

on note alors $y = \cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, et on a :

$$P(y) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(nx)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sup_{y\in[-1,1]} |P(y)| &= \frac{1}{2^{n-1}} \sup_{x\in[0,\pi]} \cos(nx)\\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

En effet lorsque y décrit $[-1,1]$, $x = \arccos(y)$ décrit $[0,\pi]$. Ainsi le polynôme $P = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$ vérifie l'égalité. Considérons maintenant par l'absurde un polynôme P unitaire vérifiant l'égalité :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

alors $2^{n-1}P$ est un polynôme de coefficient 2^{n-1} vérifiant : $\|2^{n-1}P\|_\infty^{[-1,1]} = 1$ Ainsi :

$$\forall x \in [-1,1],\ 2^{n-1}P(x) \in [-1,1]$$

Ainsi : $2^{n-1}P = T_n$, d'où l'unicité du polynôme qui vérifie la relation.

R Voici la signification de ce résultat : si on considère $x_1,\dots,x_n$, n réels de $[-1,1]$, on construit le polynôme :

$$Q = \prod_{k=0}^{n}(X - x_k)$$

et on se demande comment choisir les (x_k) pour que $\|Q\|_\infty^{[-1,1]}$ soit la plus faible possible (ie le polynôme Q est le plus proche au sens de la norme infinie de la fonction nulle). La réponse est : il faut prendre pour valeurs de x_k les $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ et donc Q est le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$.

6. On dérive la relation : $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T_n(\cos(x)) &= \cos(nx)\\ -\sin(x)T_n'(\cos(x)) &= -n\sin(nx)\\ -\cos(x)T_n'(\cos(x)) - \sin^2(x)T_n''(\cos(x)) &= -n^2\cos(nx)\end{aligned}$$

La dernière relation s'écrit :

$$\left(\cos^2(x)-1\right)T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) + n^2T_n(\cos(x)) = 0$$

En remplaçant $\cos(x)$ par y, et en utilisant la surjectivité de $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x) \in [-1,1]$, on peut écrire :

$$\forall y \in [-1,1],\ \left(y^2-1\right)T_n''(y) - yT_n'(y) + n^2T_n(y) = 0$$

Puisque qu'il s'agit d'une fonction polynomiale, on peut écrire :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \left(y^2-1\right)T_n''(y) - yT_n'(y) + n^2T_n(y) = 0$$

Ainsi, T_n est solution de l'équation différentielle :

$$\left(x^2-1\right)y'' + xy' - n^2y = 0$$

✯ Polynômes de Legendre

Exercice 8 Polynômes de Legendre

Pour $n \in N$, on considère le polynôme

$$P_n(X) = [X(X-1)]^n$$

et sa dérivée $n$ième :

$$L_n(X) = P_n^{(n)}(X).$$

L_n s'appelle le **n-ième polynôme de Legendre**.

1. *Préliminaire :* Soit $p \leqslant n$, calculer $(X^n)^{(p)}$.
2. *Préliminaire :* Rappelez (sans démonstration) la formule de Leibniz.
3. (a) Calculer L_0, L_1 et L_2.
   (b) Déterminer le terme de plus haut degré de L_n, *i.e.* donner son degré et son coefficient dominant.
   (c) Pour $j < n$, déterminer $P^{(j)}(0)$ et $P^{(j)}(1)$.
   (d) Établir par récurrence que, pour tout entier naturel j compris entre 1 et n, le polynôme $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]0,1[$.
   (e) En déduire que le polynôme L_n admet **exactement** n racines réelles distinctes et que celles-ci appartiennent à l'intervalle $]0,1[$.
   (f) Démontrer que $L_n(1-X) = (-1)^n L_n(X)$.
4. Pour tout $n \in N^*$, on pose : $Q_n(X) = \frac{1}{n!} L_n(X)$.
   (a) En appliquant la formule de Leibniz au calcul de $P_n^{(n)}$. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n(X) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 (X-1)^p X^{n-p}.$$

   (b) Calculer $Q_n(0)$, $Q_n(1)$.
   (c) Montrer que : $\binom{2n}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$. *Indication :* regardez le terme dominant de $Q_n(X)$.

Correction :

1. On a pour $p \leqslant n$:

$$(X^n)^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!} X^{n-p}$$

2. Pour f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, on a fg de classe $\mathscr{C}^n$ et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

3. (a) On a : $P_0 = 1$ et donc $L_0 = 1$. Puis, $P_1 = X(X-1) = X^2 - X$ et donc $L_1 = P_1' = 2x - 1$. Enfin,

$$\begin{aligned} P_2 &= (X(X-1))^2 \\ &= X^2\left(X^2 - 2X + 1\right) \\ &= X^4 - 2X^3 + X^2 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$L_2 = P_2^{(2)} = 12X^2 - 12X + 2$$

   (b) On regarde le terme dominant uniquement :

$$P_n = X^{2n} + \underbrace{\cdots}_{deg<2n}$$

et donc en dérivant n fois :

$$L_n = \frac{(2n)!}{n!} X^n + \underbrace{\cdots}_{deg<n}$$

Ainsi, L_n est de degré n et son coefficient dominant est $\frac{(2n)!}{n!}$.

(c) 0 et 1 sont racines de P_n d'ordre exactement n, donc pour $j < n$, on sait que $P^{(j)}(0) = 0$ et que $P^{(j)}(1) = 0$.

(d) On fixe donc n et on travaille donc par récurrence finie avec la propriété :

$$\mathscr{P}(j) : "P_n^{(j)} \text{ admet au moins } j \text{ racines distinctes dans }]0,1[$$

pour $j \in [\![0,n]\!]$.

R n fixé et j varie dans $[\![0,n]\!]$

Pour $j = 0$ il est clair que 0 et 1 sont les seules racines de P_n. D'où l'initialisation.
Pour l'hérédité, considérons j fixé tel que $0 \leqslant j < n$ et $\mathscr{P}(j)$ est vraie.
On a alors l'existence de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ les racines distinctes de $P^{(j)}$, que l'on ordonne par ordre croissant :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_j < 1$$

On applique alors le théorème de Rolle à de $P^{(j)}$ sur $[0, \alpha_1]$: 0 et α_1 sont racines de $P^{(j)}$, donc de $P^{(j)}(0) = P^{(j)}(\alpha_1)$.
On montre donc l'existence d'un $\beta_1 \in]0, \alpha_1[$, tel que $P^{(j+1)}(\beta_1) = 0$.
De même pour un $l \in [\![1, j-1]\!]$ quelconque, on applique le théorème de Rolle sur $[\alpha_l, \alpha_{l+1}]$, ce qui permet de trouver une racine de β_{l+1} de $P^{(j+1)}$ entre α_l et α_{l+1} (strictement). Enfin, on trouve une racine β_{j+1} de $P^{(j+1)}$ en appliquant le théorème de Rolle sur $[\alpha_j, 1]$.
Au final, on a trouvé $j+1$ racine :

$$0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \cdots < \beta_j < \alpha_j < \beta_{j+1} < 1$$

elles sont bien distinctes et dans dans $]0,1[$. On a l'hérédité.
En conclusion : on a bien pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans $]0,1[$.

(e) Avec $j = n$, cela donne : L_n admet au moins n racines distinctes dans $]0,1[$, mais comme L_n est de degré n, cela implique qu'il n'a pas d'autre racine. Donc L_n admet exactement n racines distinctes dans $]0,1[$.

(f) On a la relation :

$$P_n(1-X) = P_n(X)$$

on dérive une fois :

$$-P_n'(1-X) = P_n'(X)$$

puis par une récurrence (que l'on peut rédiger rapidement) :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ (-1)^j P_n^{(j)}(1-X) = P_n^{(j)}(X)$$

et donc :

$$(-1)^n L_n(1-X) = L_n(X)$$

D'où la relation demandée.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $U = X^n$ et $V = (X-1)^n$ si bien que $P_n = UV$. En dérivant n fois cela donne :

$$L_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} U^{(p)} V^{(n-p)}$$

or :

$$\forall p \in [\![0,n]\!],\ U^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!} X^{n-p}$$

et on peut aussi calculer la dérivée successive quelconque de V :

$$\forall l \in [\![0,n]\!],\ V^{(l)} = \frac{n!}{(n-l)!} (X-1)^{n-l}$$

et donc :

$$\forall p \in [\![0,n]\!],\ V^{(n-p)} = \frac{n!}{p!} (X-1)^p$$

On remplace :

$$L_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{(n!)^2}{p!(n-p)!} X^{n-p}(X-1)^p$$

et donc en divisant par $n!$ et en remplacant $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ par $\binom{n}{p}$, cela donne :

$$Q_n = \sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p}\right)^2 X^{n-p}(X-1)^p$$

(b) On remplace :

$$\begin{aligned} Q_n(0) &= \sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p}\right)^2 0^{n-p} \\ &= 1 \qquad \text{car le seul terme non nul correspond à } p = n \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} Q_n(1) &= \sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p}\right)^2 0^{p} \\ &= 1 \qquad \text{car le seul terme non nul correspond à } p = 0 \end{aligned}$$

(c) Avec la formule :

$$Q_n = \sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p}\right)^2 X^{n-p}(X-1)^p$$

pour chaque $p \in [\![0,n]\!]$, le terme $X^{n-p}(X-1)^p$ s'écrit :

$$X^{n-p}(X-1)^p = X^n + \underbrace{\cdots}_{deg<n}$$

et donc par somme (en ne gardant que les termes dominants) :

$$Q_n = \left(\sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p}\right)^2\right) X^n + \underbrace{\cdots}_{deg<n}$$

D'un autre côté, $Q_n = \frac{1}{n!} L_n$ et on a trouvé le coefficient dominant de L_n. ainsi :

$$Q_n = \frac{1}{n!}\frac{(2n)!}{n!} X^n + \underbrace{\cdots}_{deg<n}$$

et donc :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p}\right)^2$$

✯ Étude d'une suite de polynôme

On utilise généralement des récurrences pour l'existence, l'argument d'une infinité de racines pour l'unicité. Pour le degré et le terme dominant on utilise des raisonnements « avec … » (qui sont ici rigoureux).

Exercice 9 **Dérivée n-ième de la fonction tangente**

Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ qu'il existe un unique polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ et de degré $n+1$, tel que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)),$$

la notation $\tan^{(n)}$ désignant la dérivée n-ième.

Préciser des liens entre P_n et P_{n+1}, et donner le coefficient dominant de P_n.

Correction :

Unicité : Supposons que pour un certain n il y ait deux polynômes P_n et Q_n qui conviennent. On a alors :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ P_n(\tan(x)) = Q_n(\tan(x))$$

la fonction $x \longmapsto \tan x$ est surjective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Donc on peut écrire : $\forall y \in \mathbb{R},\ P_n(y) = Q_n(y)$ donc P_n et Q_n sont égaux sur une infinité de valeurs (leur différence a une infinité de racines), donc $P_n = Q_n$.

Existence : Par récurrence. On note $\mathscr{P}(n)$ la proposition :

$$\exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)),$$

Pour l'initialisation, on constate que $P_1 = 1+X^2$ convient.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai. On a donc :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)),$$

on dérive cette relation, ce qui donne :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n+1)}(x) = \left(1+\tan^2(x)\right)P_n'(\tan(x)),$$

On pose donc $P_{n+1} = (1+X^2)P_n'$ et on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\tan(x)),$$

D'où l'hérédité et la conclusion.

NB : bien comprendre la récurrence où la propriété $\mathscr{P}(n)$ contient l'existence de P_n.

Degré et terme dominant : On utilise encore une récurrence sous la forme :

$$\mathscr{P}(n) : \qquad P_n = n!X^{n+1} + \underbrace{\cdots}_{deg<n+1} =$$

C'est vrai pour $n = 1$.

Soit un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, on a alors.

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1+X^2)P_n' \\ &= (1+X^2)\left((n+1)!X^n + \underbrace{\cdots}_{deg<n}\right) \\ &= (n+1)!X^{n+1} + \underbrace{\cdots}_{deg<n+1} \end{aligned}$$

D'où l'hérédité et la conclusion.

Exercice 10 Polynôme de Laguerre (BCE EMLYON 2011)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les applications :

$$f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n e^{-x}}{n!} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad L_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x f_n^{(n)}(x) \end{array}\right.$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f_n.

1. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$.
2. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k$$

3. En déduire que L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
4. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}'(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

5. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

6. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

7. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x).$$

8. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0.$$

Commentaire : exercice assez simple sur les polynômes. Bien prendre le temps de comprendre l'énoncé avant de commencer.

Correction :

1. On trouve pour $x \in \mathbb{R}$:

$$L_0(x) = e^x f_0^{(0)}(x) = e^x f_0(x) = 1.$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, L_0(x) = 1$.
Pour L_1 :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}, L_1(x) = e^x f_1^{(1)}(x) = e^x f'_1(x) \\ \text{or} \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = xe^{-x} \\ \text{d'où} \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ f'_1(x) = e^{-x}(1-x) \\ \text{ce qui donne} \quad & \forall x \in \mathbb{R}, L_1(x) = 1-x. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, L_1(x) = 1-x$.
Pour L_2 :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} \\ \text{donc,} \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ f'_2(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(2x - x^2) \\ \text{et,} \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(2 - 2x - 2x + x^2) = \frac{1}{2}e^{-x}(2 - 4x + x^2) \\ \text{ce qui donne} \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ L_2 = e^x f_2^{(2)}(x) = \frac{1}{2}(2 - 4x + x^2). \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$.

2. **Commentaire :** le calcul des premiers termes à montrer que la difficulté est la calcul de la dérivée n-ième de f_n, ce qui se fait avec la formule de Leibniz.
On écrit : $f_n(x) = u(x)v(x)$, avec $u(x) = x^n$ et $v(x) = \frac{1}{n!}e^{-x}$.
La formule de Leibniz donne alors :

$$f_n^n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x).$$

Or on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} && \text{formule du cours} \\ \text{et donc } u^{(n-k)}(x) &= \frac{n!}{k!}x^k && \text{en remplaçant } k \text{ par } n-k \\ \text{de plus, } v^{(k)}(x) &= (-1)^k \frac{1}{n!}e^{-x} && \text{de manière évidente.} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} f_n^n(x) =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k (-1)^k \frac{1}{n!} e^{-x} \\ =& e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k. \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} L_n(x) =& e^x f_n^{(n)}(x) \\ =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k. \end{aligned}$$

3. Ainsi, L_n s'écrit : $L_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_k = \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   C'est donc un polynôme de degré n. Son coefficient dominant est :

$$\binom{n}{n} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

4. On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1} =& \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^{-x} \\ \text{d'où } \forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1} =& e^{-x} \left(\frac{1}{n!} x^n - \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \right) \\ =& \frac{e^{-x}}{n!} x^n - \frac{e^{-x}}{(n+1)!} x^{n+1} \\ =& f_n(x) - f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a d'une part : $L_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x)$ et donc :

$$L'_n(x) = e^x \left(f_n^{(n+1)}(x) + f_n^{(n)}(x) \right)$$

   Donc :

$$L'_n(x) - L_n(x) = e^x f_n^{(n+1)}(x)$$

   D'autre part, on dérive donc $n+1$ fois la relation $f'_{n+1} = f_n(x) - f_{n+1}(x)$ obtenue à la question précédente :

$$f_{n+1}^{(n+2)}(x) = f_n^{(n+1)}(x) - f_{n+1}^{(n+1)}(x)$$

   ce qui donne :

$$e^x f_n^{(n+1)}(x) = e^x \left(f_{n+1}^{(n+2)}(x) + f_{n+1}^{(n+1)}(x) \right)$$

   Or on a aussi :

$$L'_{n+1}(x) = e^x \left(f_{n+1}^{(n+2)}(x) + f_{n+1}^{(n+1)}(x) \right)$$

   D'où :

$$e^x f_n^{(n+1)}(x) = L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$$

   Ce qui donne bien la relation demandée.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) =& x^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} e^{-x} \\ =& \frac{x}{(n+1)} \left(x^n \frac{1}{n!} e^{-x} \right) \\ =& \frac{x}{(n+1)} f_n(x). \end{aligned}$$

7. On dérive $n+1$ fois la relation précédente, en utilisant encore la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x) = u(x)v(x)$$

avec $u(x) = \frac{x}{n+1}$ et $v(x) = f_n(x)$. La formule de Leibniz donne alors :

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} u^{(p)} v^{(n+1-p)} \\ &= v^{(n+1)} + (n+1)uv^{(n)} \qquad \text{en enlevant les termes nuls}\end{aligned}$$

Cela donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{x}{n+1} f_n^{(n+1)}(x) + f_n^{(n)}(x)$$

au final $$\forall x \in \mathbb{R},\ L_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} e^x f_n^{(n+1)}(x) + L_n(x)$$

On a aussi la formule :

$$L_n'(x) = e^x \left(f_n^{(n+1)}(x) + f_n^{(n)}(x) \right) = e^x f_n^{(n+1)}(x) + L_n(x)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ L_{n+1}(x) &= \frac{x}{n+1} \left(L_n'(x) - L_n(x) \right) + L_n(x) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(xL_n'(x) + (n+1-x)L_n(x) \right)\end{aligned}$$

On a donc bien la relation demandée.

8. On dérive ce qui précède pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(n+1)L_{n+1}'(x) &= L_n'(x) + xL_n''(x) - L_n(x) + (n+1-x)L_n'(x) \\ &= xL_n''(x) + (n+2-x)L_n'(x) - L_n(x)\end{aligned}$$

on remplace $L_{n+1}'(x)$ par $L_n'(x) - L_n(x)$, ce qui donne :

$$(n+1)\left(L_n'(x) - L_n(x) \right) = xL_n''(x) + (n+2-x)L_n'(x) - L_n(x)$$

et donc :

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$$

Exercice 11 Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \exp\left(\dfrac{1}{1-x} \right)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (*i.e.* indéfiniment dérivable) sur $]-\infty, 1[$.
2. Prouver que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in]-\infty, 1[,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x} \right) \exp\left(\frac{1}{1-x} \right).$$

On donnera l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n.

Indication : dans cette écriture, $P_n\left(\dfrac{1}{1-x} \right)$ désigne la composition de la fonction P_n et de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Remarque : la suite de l'exercice peut être faite en admettant cette question.

3. Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.
4. Déterminer le degré du polynôme P_n ainsi que son coefficient dominant.
5. Montrer que 0 est racine de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit m_n l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine du polynôme P_n. donner en les justifiant les valeurs de m_0, m_1, m_2 et m_3.
7. Établir une relation entre m_n et m_{n+1}, pour $n \in \mathbb{N}$.
8. En déduire que $m_n = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. On a $\forall x \in]-\infty,1[,\ x-1 \neq 0$, donc $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. De plus, on a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty,1[& \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} & & \\ & & y & \mapsto & \exp(y) \end{array}$$

Ainsi, $x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Par produit f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. Commençons par l'unicité de P_n : soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose qu'il existe deux polynômes solutions P_n et Q_n. On note alors $R_n = P_n - Q_n$, et on a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty,1[,\ P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\exp\left(\frac{1}{1-x}\right) &= Q_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\exp\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ \text{et donc } \forall x \in]-\infty,1[,\ P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) &= Q_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ \text{c'est-à-dire } \forall x \in]-\infty,1[,\ R_n\left(\frac{1}{1-x}\right) &= 0. \end{aligned}$$

> ! On ne peut pas s'arrêter ici : par exemple la fonction $x \mapsto x - |x|$ vérifie la relation ci-dessus mais n'est pas nulle. Il faut utiliser l'infinité de racines.

On voit facilement sur le tableau de variation de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ que cette fonction est surjective de $]-\infty,1[$ dans $\mathbb{R}_*^+$:

x	∞		1
Variations de $\frac{1}{1-x}$	0^+	↗	$+\infty$

Autrement dit, lorsque x varie dans $]-\infty,1[$, $\dfrac{1}{1-x}$ varie dans $\mathbb{R}_*^+$.
Soit $y > 0$, on voit alors $\exists x \in]-\infty,1[, \dfrac{1}{1-x} = y$. et donc $R_n(y) = R_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = 0$. Ainsi, $\forall y > 0$, $R_n(y) = 0$, et donc R_n a une **infinité de racines** et donc R_n est nul.
Ce qui prouve que $P_n = Q_n$.
D'où **l'unicité** du polynôme P_n.

Pour l'existence, on raisonne par récurrence en posant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{P}_n :\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in]-\infty,1[,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\exp\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

> R L'égalité $f^n(x) = \ldots$ est une égalité de réels, $P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)$ désigne la **composition** de la fonction polynomiale P_n et de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Pour l'initialisation, On a : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$, d'où la relation en posant $P_0 = X$.
Pour l'hérédité, on considère n fixé, tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie, on a alors :

$$\forall x \in]-\infty,1[,\ f^{(n+1)}(x) = (f^n)'(x)$$

On doit donc dériver : $P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\forall x\in]-\infty,1[,\ f^{(n+1)}(x) &= \left[\frac{1}{(1-x)^2}P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{(1-x)^2}P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]\exp\left(\frac{1}{1-x}\right).\\ &= \left[\frac{1}{(1-x)^2}\left(P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right)+P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\right]\exp\left(\frac{1}{1-x}\right).\end{aligned}$$

On pose alors $P_{n+1}=X^2(P_n+P_n')$ pour obtenir :

$$\forall x\in]-\infty,1[,\ f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\exp\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

D'où l'hérédité, et la conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n solution du problème.
De plus, la démonstration de l'hérédité a montré la relation : $P_{n+1}=X^2(P_n+P_n')$.

R Il faut donner P_{n+1} comme un polynôme, écrire :

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}\left(P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right)+P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)$$

ne définit pas un polynôme !

3. On a vu : $P_0=X$, on en déduit :

$$\begin{aligned}& & P_1 &= X^2(X+1)=X^3+X^2\\ \text{et} & & P_2 &= X^2(3X^2+2X+X^3+X^2)=X^2(X^3+4X^2+2X)=X^5+4X^4+2X^3\\ \text{puis} & & P_3 &= X^2(5X^4+16X^3+6X^2+X^5+4X^4+2X^3)\\ & & &= X^2(X^5+9X^4+18X^3+6X^2)\\ & & &= X^7+9X^6+18X^5+6X^4.\end{aligned}$$

4. On démontre par récurrence que le degré de P_n est $2n+1$, et son coefficient dominant est 1. On pose donc :

$$\mathscr{P}_n:\ P_n=X^{2n+1}+\underbrace{\ldots}_{d<2n+1}.$$

L'initialisation est vraie, on a vérifié les rangs 0,1,2 et 3 à la question précédente.
Pour l'hérédité, on considère n fixé tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. On a alors en raisonnant sur les termes dominants, on voit alors que $P_n=X^{2n+1}+\underbrace{\ldots}_{d<2n+1}$ et $P_n'=(2n+1)X^{2n}+\underbrace{\ldots}_{d<2n}$.
Cela donne :

$$\begin{aligned}P_{n+1} &= X^2(P_n+P_n')\\ &= X^2\left(X^{2n+1}+\cdots+(2n+1)X^{2n}+\ldots\right)\\ &= X^{2n+3}+\underbrace{\ldots}_{d<2n+3}.\end{aligned}$$

D'où l'hérédité et la conclusion : le degré de P_n est $2n+1$ et c'est un polynôme unitaire.

5. On a : 0 est racine de P_0 et $\forall n\geqslant 1$, $P_n=X^2(P_{n-1}+P_{n-1}')$, donc 0 est racine de P_n (d'ordre au moins 2), si $n\geqslant 1$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, 0 est racine de P_n

R Il n'y a pas de récurrence ici ! !

6. On sait que P_n s'écrit avec la décomposition sur $\mathbb{C}$:

$$P_n=X^{m_n}(X-\alpha_1)^{d_1}\ldots(X-\alpha_p)^{d_p}$$

où α_i sont les autres racines (non nulles donc), et d_i leur ordre de multiplicité.
Ainsi, pour démontrer que l'ordre de multiplicité de 0 est m_n, on écrit les polynômes sous la forme $P_n=X^{m_n}Q$, où Q est un polynôme qui n'admet pas 0 comme racine.

On a :

$$\begin{aligned} P_0 &= X && \text{donc} && m_0 = 1 \\ P_1 &= X^2\underline{(X+1)} && \text{donc} && m_1 = 2 \\ P_2 &= X^3\underline{(X^2+4X+2)} && \text{donc} && m_2 = 3 \\ P_3 &= X^4\underline{(X^3+9X^2+18X+6)} && \text{donc} && m_3 = 4. \end{aligned}$$

En effet, les polynômes soulignés sont non nuls en 0.

7. On note m_n l'ordre de 0 dans P_n.
   Montrons que 0 est racine de P_{n+1} d'ordre au moins m_n+1 : On sait que P_n s'écrit $P_n = X^{m_n}Q$, avec $Q(0) \neq 0$, puisque c'est le produit des autres racines.
   Ce qui donne alors : On a alors :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= X^2(P_n + P_n') \\ &= X^2(X^{m_n}Q + m_nX^{m_n-1}Q + X^{m_n}Q') \\ &= X^2(X^{m_n}(Q+Q') + m_nX^{m_n-1}Q) \\ &= X^{m_n+1}(X(Q+Q') + m_nQ). \end{aligned}$$

   On pose alors $R = X(Q+Q') + m_nQ$. On a $P_{n+1} = X^{m_n+1}R$, donc 0 est racine d'ordre au moins m_n+1.
   Comme $R(0) = m_nQ(0) \neq 0$. Ainsi, l'ordre de multiplicité de 0 dans P_{n+1} est exactement m_n+1.
   Au final, on obtient : $m_{n+1} = m_n + 1$.

   R Il s'agit d'une relation de récurrence, on ne la démontre donc pas par récurrence, mais à n fixé.

8. La suite m_n est arithmétique, de premier terme 1, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_n = n+1$.

✯ Théorème de Rolle en cascade

Les polynômes étant à la frontière entre l'analyse et l'algèbre, les exercices utilisent souvent des techniques d'analyse, entre autre le théorème de Rolle et des accroissements finis.

Exercice 12 Montrer que la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$ est un polynôme de degré n dont toutes les racines sont distinctes et comprises entre -1 et 1.

Correction : On considère $f : x \mapsto (x^2-1)^n$ et on montre par récurrence la propriété pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$f^{(k)}$ a au moins k racines dans $]-1,1[$

C'est le théorème de Rolle en cascade avec $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0$.

✯ Équations polynomiales

Pour résoudre les équations dont l'inconnue est un polynôme, on peut commencer par chercher le degré et le coefficient dominant.

Exercice 13 Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

Correction : P est de degré 2 ou nul. On écrit ensuite $P = aX^2 + bX + c$, facilement $b = 0$ et $c = -a$.
D'où l'ensemble des solutions. Attention, P est de degré 2 ou nul (degré $-\infty$).
Un autre type de raisonnement consiste à travailler sur les racines du polynôme inconnu :

Exercice 14 On considère l'équation (E) :

$$(E) : \ P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des polynômes qui vérifient (E).

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $(X^2+X+1)^m$ vérifie (E).

Dans la suite, $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme non constant qui vérifie (E).

2. Quel résultat du cours permet d'affirmer que P a une racine sur $\mathbb{C}$?
3. Le but de cette question est de démontrer que 0 n'est pas racine de P. On raisonne par l'absurde et on suppose que $P(0) = 0$.
   Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

   $$u_0 = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2.$$

   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P(u_n) = 0$,
   (b) Démontrer que la suite u_n est **strictement** croissante,
   (c) En déduire que le polynôme P est nul, et conclure.
4. On veut démontrer que toutes les racines (complexes) de P sont de module 1. On raisonne de nouveau par l'absurde en supposant $\exists \alpha \in \mathbb{C}^*$, racine de P, telle que $|\alpha| \neq 1$.
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\alpha^{2^n}) = 0$.
   (b) Justifier que tous les termes de la suites $\left(\alpha^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont distincts.
   (c) En déduire que P est nul, et conclure.
5. Soient α une racine de P, et A le point du plan complexe d'affixe α.
   (a) Quelle information géométrique peut-on déduire de la question 4 ?
   (b) Vérifier que $(\alpha+1)^2$ est racine et en déduire que $|\alpha+1| = 1$. En déduire une autre information géométrique sur A.
   (c) Démontrer que $\alpha = j$ ou $\alpha = j^2$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (d) Démontrer que j **et** j^2 sont racines de P. Que peut-on dire de leur ordre de multiplicité ?
   (e) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(X) = (X^2+X+1)^m$.
6. Conclure.

Correction : exercice classique de résolution d'équations polynomiales par les racines.

1. simple calcul. Bien vérifier que $m > 0$ dont P non constant.
2. D'alembert-Gauss.
3. (a) Récurrence. Évaluer la relation en $1+u_n$
   (b) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n + 1$ et X^2+X+1 est sans racine réelle, donc strictement positif sur $\mathbb{R}$.
   (c) les valeurs $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ sont distinctes, il y en a donc une infinité. Et toutes ces valeurs sont racines. Donc P a une infinité de racines, donc P est nuls. Bien vérifier l'infinité de racines.
4. (a) Récurrence. Évaluer la relation en α^{2^n}. Bien noter α puissance 2^n.
   (b) On peut considérer i et j tel que $\alpha^{2^i} = \alpha^{2^j}$. On aura alors :

   $$\left|\alpha^{2^i}\right| = \left|\alpha^{2^j}\right| \qquad \text{égalité des modules } 2^i \ln|\alpha| = 2^j \ln|\alpha|$$

   on peut prendre le logarithme car c'est des réels.

   $$2^i = 2^j \text{ puisque } \ln\alpha \neq 0$$

   et donc $i = j$.
   Bien noter que $a^n = a^m$ ne donne pas $n = m$ si a est complexe non nul et différent de 1, il suffit que $a^{n-m} = 1$, ie que a est racine $n-m$-ième de l'unité. Par contre pour des réels, $a^n = a^m$ donne $n = m$ sauf si $a = 1$ ou $a = 0$.
   (c) Même rédaction$\{\alpha^n | n \in \mathbb{N}\}$ sont distincts donc infinité de racines.
5. (a) A est sur le cercle de trigonométrique.
   (b) Évaluer la relation en $1+\alpha$. A est sur le cercle de centre -1 et de rayon 1. Géométriquement, A vaut j ou ^{2}.
   (c) petit calcul en écrivant $\alpha = a+ib$ ou $\alpha = e^{i\theta}$ puis factorisation par angle de moitié.
   (d) P est à coefficients réels, donc si j est racine, $\overline{j}$ aussi et il y a le même ordre.
   (e) m est l'ordre de la racine j. Comme j et j^2 sont les seules racines, P se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme :

   $$P = \lambda(X-j)^m(X-j^2)^m\lambda(X^2+X+1)$$

   Il reste à trouver λ, ce qui se fait en regardant les termes dominants dans la relation. De plus $m > 0$ car P non constant.
6. Écriture propre de l'ensemble des solutions.

Exercice 15 **Polynôme divisibles par leur polynôme dérivée** Le but de cet exercice est de trouver tous les polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivée.

Soit $n \geqslant 1$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, et $a \in \mathbb{C}$. On pose $P = \lambda(X-a)^n$. Montrer que P' divise P, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = P'Q$.
2. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré $n \geqslant 1$, divisible par son polynôme dérivé P', c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = P'Q$.
   (a) Montrer que : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, $P = (\alpha X+\beta)P'$. (1).
   (b) En comparant les coefficients dominants dans (1), déterminer α.
   (c) Montrer que la relation (1) peut alors s'écrire sous la forme : $nP = (X-a)P'$, où a est un nombre complexe que l'on ne cherchera pas à calculer.
   (d) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $(n-k)P^{(k)} = (X-a)P^{(k+1)}$.
   (e) En déduire les valeurs de $P(a)$, $P'(a)$, ..., $P^{(n-1)}(a)$.
   (f) Quelle est alors la multiplicité de la racine a de P ?
   (g) Donner l'écriture factorisée de P.
3. Quel est finalement l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants divisibles par leur polynôme dérivée ?

Commentaire : très classiquement, il s'agit d'une équation polynomiale. Attention, beaucoup ne comprennent pas l'énoncé : question 1 on considère P de la forme ... et on vérifie qu'il est solution, question 2, P est maintenant une solution quelconque de l'équation.

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned} P &= \lambda(X-a)^n \\ \text{donc } P' &= \lambda n(X-a)^{n-1} \\ \text{on a la relation : } \lambda(X-a)^n &= \left(\frac{1}{n}(X-a)\right)\left(\lambda n(X-a)^{n-1}\right) \\ \text{on pose donc : } Q &= \frac{1}{n}(X-a) \in \mathbb{C}[X] \qquad \text{existe car } n \geqslant 1 \\ \text{et on a : } P &= QP'. \end{aligned}$$

2. (a) On a : $P = QP'$, donc $d(P) = d(Q)+d(P') = d(Q)+d(P)-1$, on en déduit $d(Q) = 1$, et Q s'écrit sous la forme $Q = \alpha X+\beta$. D'où le résultat.
   (b) **Commentaire :** la réponse était donné à la question suivante.
   On regarde les termes dominants, avec la notation :

$$P = a_n X^n + \ldots_{d<n}$$

   De $P = (\alpha X+\beta)P'$, on obtient :

$$\begin{aligned} a_n X^n + \ldots_{d<n} &= \Big(\alpha X+\beta\Big)\Big(na_n X^{n-1} + \ldots_{d<n-1}\Big) \\ &= \alpha n a_n X^n + \ldots_{d<n}. \end{aligned}$$

   On en déduit l'égalité : $a_n = \alpha n a_n$, or $a_n \neq 0$, donc $\alpha = \frac{1}{n}$
   (c) On a donc :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{n}X+\beta\right)P' \\ \text{et donc : } nP &= (X+n\beta)\,P' \\ \text{on pose donc : } a &= n\beta \in \mathbb{C} \\ \text{pour obtenir : } nP &= (X+a)P'. \end{aligned}$$

   (d) On procède par récurrence sur k, en posant : $Q(k) : (n-k)P^{(k)} = (X-a)P^{(k+1)}$.
   Initialisation : pour $k = 0$, $Q(0)$ s'écrit $nP = (X-a)P'$, ce qui est la question précédente.

Hérédité : On considère k fixé tel que $Q(k)$ est vrai. On a alors :

$$\begin{aligned}\text{l'hypothèse de récurrence : } (n-k)P^{(k)} &= (X-a)P^{(k+1)}\\ \text{on dérive : } (n-k)P^{(k+1)} &= P^{(k+1)} + (X-a)P^{(k+2)}\\ \text{ce que l'on peut écrire : } (n-k-1)P^{(k+1)} &= (X-a)P^{(k+2)}\\ \text{on a donc bien obtenu } Q(k+1) : \Big(n-(k+1)\Big)P^{(k+1)} &= (X-a)P^{(k+2)}\end{aligned}$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(n-k)P^{(k)} = (X-a)P^{(k+1)}$.

(e) Considérons $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a alors en utilisant la relation précédente :

$$(n-k)P^{(k)}(a) = (a-a)P^{(k+1)}(a) = 0$$

or $n-k \neq 0$ (puisque $k < n$), d'où $P^{(k)}(a) = 0$.
Ainsi, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
Attention : $P^{(n)}(a) \neq 0$. Il faut donc faire apparaître l'argument $n-k \neq 0$.

(f) La racine a est d'ordre au moins n de P. Comme le polynôme P est non nul, cette racine est d'ordre exactement n.
NB : on attends : au moins n puis exactement n.

(g) **NB :** question mal traitée. Il faut vérifier que P n'a pas d'autre racines !
Le polynôme P a n racines comptés avec leur ordre de multiplicité dans $\mathbb{C}$ car il est de degré n. La racine a est d'ordre n, donc le polynôme P n'a donc pas d'autre racine.
D'après la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, on en déduit que P s'écrit sous la forme :

$$P = \lambda(X-a)^n \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \text{ le terme dominant}$$

3. Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$, non constants et divisible par leur polynôme dérivé. On a alors :

$$\mathscr{S} = \left\{ \lambda(X-a)^n \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, n \geqslant 1, a \in \mathbb{C} \right\}.$$

En effet, on a vu question 1 que tout polynôme de cette forme est dans $\mathscr{S}$, et question 2 qu'un polynôme de $\mathscr{S}$ s'écrit sous cette forme.
NB : 3 paramètres dans l'ensemble.

Exercice 16 On se propose de déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$, non nul tel que

$$P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0.$$

Soit donc P un tel polynôme.

1. (a) Soit α une racine de P, montrer que α^2 est racine de P.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha^{(2^n)}$ est racine de P.
   (c) En déduire que le module de α est égal à 0 ou à 1.
2. Que peut-on dire de $(\alpha-2)^2$?
3. Montrer que P n'admet pas d'autre racine que 1. Conclure.

Commentaire : exercice classique :

1. (a) on évalue en α (on remplace X par α).
   (b) récurrence.
   (c) infinité de racines distinctes donc polynômes nuls. On raisonne ici par l'absurde : si le module de α est différent de 0 et 1, alors il y a infinité de racines. D'autre part, le fait que les racines soient distinctes doit être montré clairement.
2. on évalue en $\alpha - 2$.
3. utiliser les questions précédentes. On attends en particulier une conclusion soignée, en utilisant le théorème de d'Alembert pour montrer que α existe (ou la factorisation sur $\mathbb{C}$). Enfin, ne pas oublier la réciproque !

Correction :

1. (a) Puisque P est solution, on a : $\underbrace{P(\alpha)P(\alpha+2)}_{0} + P(\alpha^2) = 0$, donc $P(\alpha^2) = 0$ et α^2 est aussi racine de P.

(b) On procède par récurrence en écrivant pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathscr{P}_n$: $\alpha^{(2^n)}$ est racine de P.
L'initialisation est évidente pour $n = 0$: $\alpha^{(2^0)} = \alpha$ qui est racine par hypothèse.
Pour l'hérédité, considérons $n \in \mathbb{N}$ fixé, tel que $\mathscr{P}_n$ est vrai.
On a alors : $\alpha^{(2^n)}$ est racine de P, et donc en appliquant la question précédente (ou en retrouvant le raisonnement), on en déduit que $\left(\alpha^{(2^n)}\right)^2 = \alpha^{(2^{n+1})}$ est aussi racine de P, d'où l'hérédité. En conclusion, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha^{(2^n)} \text{ est racine de } P.$$

(c) **Commentaire :** question très mal traitée. Pour un complexe α, on peut avoir la suite des $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne prends qu'un nombre finie de valeurs (les racines n-ième de l'unité). Par contre, on va montrer que les modules sont distincts si $|\alpha| \neq 1$.
Supposons par l'absurde que le module de α soit différent de 0 et de 1. Montrons que les valeurs $\left(\alpha^{(2^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors distinctes.
NB : on revient à la définition pour le démontrer.
Pour cela, on considère i et j deux entiers naturels, tel que $\alpha^{(2^i)} = \alpha^{(2^j)}$. Ces deux complexes sont alors égaux en modules, ce qui donne :

$$\left|\alpha^{(2^i)}\right| = |\alpha|^{(2^i)} = |\alpha|^{(2^j)}.$$

Ce qui s'écrit aussi avec la forme exponentielle (puisque $|\alpha| \neq 0$) :

$$\begin{aligned} e^{(2^i)\ln(|\alpha|)} = e^{(2^j)\ln(|\alpha|)} &\text{ soit } 2^i \ln(|\alpha|) = 2^j \ln(|\alpha|) \\ &\text{et donc } 2^i = 2^j \text{ car } |\alpha| \neq 1 \\ &\text{et donc } i = j. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \alpha^{(2^i)} = \alpha^{(2^i)} \Rightarrow i = j$. Et donc les valeurs $\left(\alpha^{(2^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont distinctes. Comme ces valeurs sont racines de P, on en déduit que P a une infinité de racine et donc que P est nul, ce qui est une contradiction avec P, non constant.
Rem : on peut aussi constater que si $|\alpha| < 1$ alors la suite $\left(|\alpha|^{2^n}\right)$ est strictement décroissante, et si $|\alpha| > 1$ alors $\left(|\alpha|^{2^n}\right)$ est strictement croissante.
En conclusion, on en déduit donc que le module de α est soit nul, soit égal à 1.

2. Puisque P est solution, on a en évaluant en $\alpha - 2$:

$$\underbrace{P(\alpha-2)P(\alpha)}_{0} + P\left((\alpha-2)^2\right) = 0,$$

donc $P\left((\alpha-2)^2\right) = 0$ et donc $(\alpha-2)^2$ est racine de P ;

3. La question précédente indique que $(\alpha-2)^2$ est racine, en utilisant la question 1c, on en déduit que $|(\alpha-2)^2|$ est nul ou égal à 1, ce qui signifie que $|\alpha-2|$ est nul ou égal à 1. D'autre part, on sait que $|\alpha|$ est nul ou égal à 1.
On considère donc les différents cas :
   - Si $\alpha = 0$, alors $|\alpha-2| = 2$, ce qui est impossible, donc $|\alpha| = 1$.
   - Si $|\alpha-2| = 0$, *i.e.* $\alpha = 2$, alors $|\alpha| = 2$ ce qui est toujours impossible.

On en déduit donc que $|\alpha| = 1$ et $|\alpha-2| = 1$. Le complexe α est donc sur l'intersection de deux cercles que l'on dessine facilement (pensez à dessiner les cercles sur la copie). On voit sur le dessin que la seul valeur possible est $\alpha = 1$.
Un dessin n'étant pas une démonstration, on le prouve par le calcul : on écrit $\alpha = e^{i\theta}$ (puisqu'on a vu que $|\alpha| = 1$), et on a alors :

$$\begin{aligned} |\alpha-2|^2 &= |e^{i\theta}-2|^2 = (\cos(\theta)-2)^2 + \sin^2(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - 4\cos(\theta) + 4 + \sin^2(\theta) = 5 - 4\cos(\theta). \end{aligned}$$

On déduit donc de la relation $|\alpha-2|^2 = 1$ que $\cos(\theta) = 1$, et donc $\alpha = 1$.
On a donc démontré : si P admets une racine α dans $\mathbb{C}$, alors $\alpha = 1$.

> ! La conclusion est souvent bâclée !

Soit donc P un polynôme solution, on a donc :
- soit P est constant (non nul),

- soit P n'est pas constant et en utilisant le théorème de d'Alembert, il admets une racine α et on a vu dans ce cas que $\alpha = 1$, d'après la factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$, on a donc dans ce cas :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C},\ \exists n \in \mathbb{N},\ P = \lambda (X-1)^n.$$

Si P est constant non nul, on note $P = \lambda \in \mathbb{R}$, et on obtient : $\lambda^2 + \lambda = 0$, d'où $\lambda = 0$, ou $\lambda = -1$.
Ainsi, la seule solution constante non nul est $\lambda = -1$.
Si P n'est pas constant, on écrit :

$$\begin{aligned} P(X)P(X+2) + P(X^2) &= \lambda^2 (X-1)^n (X+1)^n + \lambda (X^2-1)^n \\ &= \lambda^2 (X^2-1)^n + \lambda (X^2-1)^n. \end{aligned}$$

Pour que le polynôme P soit solution, il faut et il suffit que $\lambda^2 + \lambda = 0$, et donc $\lambda = -1$ (puisque $\lambda \neq 0$).
Ainsi, les solutions sont les polynômes de la forme : $-(X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Il reste à faire la réciproque. Soit donc P un polynôme de la forme ci-dessus.

Il ne faut pas oublier la réciproque !

On a alors :

$$\begin{aligned} P(X)P(X+2) + P(X^2) &= -(X-1)^n \times -(X+1)^n - (X^2-1)^n \\ &= \Big[(X-1)(X+1)\Big]^n - (X^2-1)^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

En conclusion, on a donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ -(X-1)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Éléments propres
Polynôme caractéristique
Diagonalisation en dimension finie
Diagonalisation et polynômes annulateurs
Trigonalisation
Exercices

5 — Réduction des endomorphismes

La lettre E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le corps $\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf indication contraire, la lettre u désigne un endomorphisme de E.

Attention dans ce chapitre certains résultats sont différents selon si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I Éléments propres

⋆ Rappels

Les homothéties, ie les applications de la forme λId sont les applications les plus simples, on va donc chercher à écrire un endomorphisme u comme une homothétie.

Proposition I.1 La droite $D = \text{Vect}(x)$ de E est stable par l'endomorphisme u si et seulement si la restriction de u à D est une homothétie.

Démonstration. On a vu cette propriété lorsqu'on a introduit les sous-espace stables.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si D est stable, alors, on a $u(x) \in D$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x$. Si on considère $y \in D$, alors on écrit $y = \alpha x$ et on a :

$$u(y) = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda x = \lambda y$$

Ainsi, la restriction de u à D est la fonction $y \longmapsto \lambda y$, *ie* l'homothétie de rapport λ.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall y \in D,\ u(y) = \lambda y$, Soit $y \in D$, alors $u(y) = \lambda y \in D$ et D est stable. ■

Ainsi, pour trouver les droites stables, il faut trouver les vecteurs x de E non nul vérifiant $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x$.

I.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition I.1 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

On dit que le scalaire λ est valeur propre de l'endomorphisme u si il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.

On dit qu'un vecteur x de E non nul est vecteur propre de l'endomorphisme u si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que : $u(x) = \lambda x$. Le vecteur x est alors un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Le spectre de l'endomorphisme u est l'ensemble des valeurs propres de u.

Comme on l'a vu x est vecteur propre de u si et seulement si $\text{Vect}(x)$ est stable par u.

Si x est vecteur propre de u associé à λ, alors la restriction de u à $\text{Vect}(x)$ est une homothétie de rapport λ.

De plus, un vecteur propre ne peut être associé qu'une seule valeur propre : car si $u(x) = \lambda x$ et $u(x) = \mu x$ alors $(\lambda - \mu)x = 0$ et comme $x \neq 0$ (un vecteur propre est non nul), on a $\lambda = \mu$.

Par contre, une valeur propre a plusieurs vecteurs propres associés (une infinité qui forme un SEV comme on va le voir).

On traduit cette définition avec des matrices si E est de dimension finie :

Définition I.2 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que le scalaire λ est valeur propre de la matrice A si il existe une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}$ non nulle tel que $AX = \lambda X$.

On dit qu'une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}$ non nulle est vecteur propre de la matrice A si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que : $AX = \lambda X$.

La matrice colonne X est alors un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Le spectre de la matrice A est l'ensemble des valeurs propres de A.

Notation I.1. *On note $Sp(u)$ respectivement $Sp(A)$ le spectre d'un endomorphisme u, respectivement d'une matrice A*

Bien entendu ces définitions coïncident en prenant les coordonnées : si $A = mat_{\mathscr{B}}(u)$, alors λ est valeur propre de u si et seulement si λ est valeur propre de A. De même, avec ces notations : x est vecteur propre de u si et seulement si $Mat_{\mathscr{B}}(x)$ est vecteur propre de A.

Dans le cas d'une matrice, on montre de plus que les valeurs propres sont en fait liées à l'endomorphisme et non à la matrice qui le représente.

Proposition I.2 Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres ie le même spectre.

Plus précisément, si $A = P^{-1}BP$, et si $AX = \lambda X$, avec X non nul alors $B(PX) = (PA)X = \lambda(PX)$, donc PX (qui est non nul car P est inversible) est vecteur propre de B.

Ainsi, les valeurs propres de A sont les valeurs propres de B et si X est vecteur propre de A, alors PX est vecteur propre de B (associé à la même valeur propre).

I.2 Sous-espace propre

Proposition I.3 Le scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si $\lambda Id_E - u$ est non injectif.

Démonstration. Démonstration évidente : dire que $u - \lambda Id_E$ est non injectif signifie qu'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. ■

R Dire que $\lambda Id_E - u$ est non injectif revient à dire que $u - \lambda Id_E$ est non injectif, puisque de manière évidente : $\ker(\lambda Id_E - u) = \ker(u - \lambda Id_E)$.

En particulier, l'endomorphisme est injectif si et seulement 0 n'est pas valeur propre, ie $0 \notin Sp(A)$
En dimension finie, on peut dire que l'endomorphisme u est un automorphisme si et sulement si 0 n'est pas valeur propre.

Définition I.3 Si λ est une valeur propre de l'endomorphisme u de E, le sous-espace propre associé à λ est :

$$E_\lambda(u) = \ker(\lambda \mathrm{Id}_E - u) \qquad \text{ou encore : } E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

De même, si λ est une valeur propre de la matrice A, le sous-espace propre associé à λ est :

$$E_\lambda(A) = \ker(\lambda \mathrm{Id}_n - A) \qquad \text{ou encore : } E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda \mathrm{Id}_n)$$

Les éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme sont la donnée de ces valeurs propres (de son spectre) et des espaces propres associés.

C'est donc l'ensemble des vecteurs propres associés à λ (plus le vecteur nul). On peut aussi écrire : λ est valeur propre si et seulement si $E_\lambda(u) \neq \{0\}$. Ou encore :

$$E_\lambda(u) = \left\{ x \in E \,\middle|\, u(x) = \lambda x \right\}.$$

L'espace propre associé à 0, noté E_0 est le noyau $\ker(A)$.

✯ Exemples

Méthode : pour trouver les sous-espace propres et les valeurs propres d'un endomorphisme, on résout l'équation $u(x) = \lambda x$, avec λ comme paramètre et x comme inconnue.

Les valeurs de λ tels que ce système admet des solutions non triviales (ie non nulles), sont les valeurs propres (les éléments du spectre).

Pour un λ dans le spectre, le sous-espace propre associé est l'ensemble des valeurs de x solutions du système. Souvent on cherche une base du sous-espace propre.

■ **Exemple I.1** On fixe $\alpha \in \mathbb{K}$, et on considère l'homothétie de rapport α : $u = \alpha I_d$.

On résout donc le système $u(x) = \lambda x$ de paramètre λ d'inconnue x qui s'écrit donc $\alpha x = \lambda x$ On a :

- si $\lambda \neq \alpha$, la seule solution est le vecteur nul,
- Si $\lambda = \alpha$, tout vecteur est solution.

On peut donc écrire : que α est l'unique valeur propre, ie $Sp(u) = \{\alpha\}$ et et le sous-espace propre associé est E, ie $E_\alpha = E$. ∎

R Il faut éventuellement revoir la résolution de système avec paramètres.

■ **Exemple I.2** Pour la matrice réelle de rotation : $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ et λ tels que :

$$AX = \lambda X$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve donc que l'existence de X non nul tel que $AX = \lambda X$ est équivalente à la non inversibilité de la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix}$ et donc à un dérerminant nul.

On cherche donc λ tel que :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (\cos\theta - \lambda)(\cos\theta - \lambda) + \sin^2\theta &= 0 \\ \cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \sin^2\theta &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Considérons le polynôme $P = X^2 - 2X\cos\theta + 1$. Pour que λ soit valeur propre, il faut et il suffit que $P(\lambda) = 0$. On calcule donc

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta \leqslant 0$$

On voit donc que dans le cas général où $\cos^2\theta \neq 1$, alors $\Delta < 0$ et donc $Sp(A) = \emptyset$. Il n'y a pas de valeurs propres (ni de vecteurs propres). Ce qui est assez intuitif (pas de droite stable car c'est une rotation d'angles θ).

Il reste les cas particuliers.

Si $\cos\theta = 1$ ie $\theta \equiv 0[2\pi]$, et la matrice A est l'identité. $Sp(A) = \{1\}$ et $E_1 = \mathbb{R}^2$.

Si $\cos\theta = -1$ ie $\theta \equiv \pi[2\pi]$, et la matrice $A = -I_2$. $Sp(A) = \{-1\}$ et $E_{-1} = \mathbb{R}^2$.

Remarquons immédiatement que le problème est très différent, si on considère A comme une matrice complexe. Dans ce cas, on cherche $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ non nul, tel que : $AX = \lambda X$.

Le calcul précédent est encore valable, et on se ramène à chercher les racines du polynôme :

$$P = X^2 - 2X\cos\theta + 1 \qquad \text{de déterminant } \Delta = (2i\sin\theta)^2$$

Les racines sont alors :

$$\lambda_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

On a donc deux valeurs propres $Sp(A) = \left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\}$.

On traite le cas le plus général où $\sin\theta \neq 0$. Il y a donc deux valeurs propres distinctes. Cherchons les sous-espaces propres.

Pour la valeur propre $e^{i\theta}$. On résout :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - e^{i\theta} & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{ie } \begin{pmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne puisque $\sin\theta \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $l_2 \leftarrow l_2 - il_1$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$E_{e^{i\theta}} = \text{Vect}\left((1, -i)\right)$$

De même, pour la valeur propre $e^{-i\theta}$. On résout :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - e^{-i\theta} & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{ie } \begin{pmatrix} i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$E_{e^{-i\theta}} = \text{Vect}\left((1, i)\right)$$

■

■ **Exemple I.3** On suppose que l'on peut écrire $E = F \oplus G$ et on considère p le projecteur sur F parallèlement à G.

On sait que $p(x) = u$ où x s'écrit $u + v$.

Cherchons λ une valeur propre et $x = u+v \in E$ un vecteur propre, avec $x \neq 0$. On a alors :

$$p(x) = u = \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$$

puisque la décomposition est unique, cela donne : $u = \lambda u$ et $\lambda v = 0$. Ainsi, si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 0$, on a nécessairement $u = 0$ et $v = 0$ donc la seule solution est $x = 0$.

Pour $\lambda = 1$. On a $E_1 = \ker(p - Id) = F$. Pour $\lambda = 0$. On a $E_0 = G$. Ainsi, $Sp = \{0, 1\}$.

■

■ **Exemple I.4** On reprends les notations précédentes et on traite le cas d'une symétrie.

On cherche λ une valeur propre et $x = u+v \in E$ un vecteur propre , toujours avec $x \neq 0$.

On a alors :

$$s(x) = u - v = \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$$

puisque la décomposition est unique, cela donne : $u = \lambda u$ et $-v = \lambda v$. Comme on sait que u ou v est non nul, on a a donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Dans le cas $\lambda = 1$, et dans ce cas $v = 0$, donc $E_1 = F$. Dans le cas $\lambda = -1$, on a $u = 0$ et $E_{-1} = G$. ■

■ **Exemple I.5** Soit $E = \mathscr{C}^\infty$ et u la dérivation. On cherche donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^\infty$ tel que $f' = \lambda f$.

Cela revient donc à résoudre l'équation différentielle $f' - \lambda f = 0$. On sait que si $\lambda \neq 0$, les solutions sont les fonctions proportionnelles à $x \longmapsto e^{\lambda x}$. Si $\lambda = 0$, les solutions sont les constantes (ce qui est un cas particulier du précédent).

On a donc : $Sp(u) = \mathbb{R}$ et

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ E_\lambda = \text{Vect}\left(x \longmapsto e^{\lambda x}\right)$$

■

■ **Exemple I.6** Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et u l'application :

$$u : P \longmapsto P(X+1)$$

On cherche donc $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P(X) = \lambda P(X+1)$.

On suppose P non nul solution pour un certain λ et on écrit les termes de plus haut degré : $P = a_n X^n + \dots$ avec $a_n \neq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} a_n X^n + \cdots &= \lambda\left(a_n (X+1)^n + \dots\right) \\ &= \lambda a_n X^n \end{aligned}$$

Donc $\lambda = 1$. La seule valeur propre candidate est donc 1.

On regarde donc maintenant le cas $\lambda = 1$. L'équation s'écrit : $P(X) = P(X+1)$. Soit un polynôme P non nul solution, on a P périodique donc P borné donc P constant. Réciproquement, tout polynôme constant est vecteur propre associé à 1.

Ainsi, $Sp(u) = 1$ et

$$E_A(u) = \mathbb{R}_0[X]$$

■

■ **Exemple I.7** On cherche les valeurs propres de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Là aussi, cela revient à chercher $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = \lambda X$, ou encore $(A - \lambda I_3)X = 0$.

On échelonne le système :

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 & 3 \\ 4 & 3-\lambda & 6 \\ 4 & 6 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & 3-\lambda \\ 4 & 3-\lambda & 6 \\ 4-\lambda & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_3 \\ l_2 \\ l_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & 3-\lambda \\ 0 & -3-\lambda & 3+\lambda \\ 0 & -12+6\lambda & 7\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \leftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \leftarrow 4l_3 - (4-\lambda)l_1 \end{matrix}$$

On considère le cas $\boxed{\lambda \neq -3}$ pour simplifier la deuxième ligne :

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & -12+6\lambda & 7\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \leftarrow \frac{1}{-\lambda-3} l_2 \\ l_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \leftarrow l_3 + (12-6\lambda)l_2 \end{matrix}$$

NB : ne pas hésiter à faire le calcul de $P(\lambda)$ à part pour ne pas faire d'erreurs de calculs.

On trouve :

$$P(\lambda)) = 7\lambda - \lambda^2 - 12 + 6\lambda = -12 + 13\lambda - \lambda^2 = (1-\lambda)(\lambda - 12).$$

On obtient donc : Si $\boxed{\lambda \neq 1}$ et $\boxed{\lambda \neq 12}$, le rang de la matrice est alors 3 :

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{(1-\lambda)(\lambda-12)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système (homogène) est alors de Cramer, et l'unique solution est $\mathscr{S}_\lambda = (0,0,0)$. Ainsi, $\lambda \notin Sp(A)$.

Il reste à traiter les cas particuliers.

Si $\boxed{\lambda = -3}$, le système devient (on reprends le calcul là où on a supposé $\lambda \neq -3$) :

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système est alors de rang 2 et s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & 6 \\ 0 & \boxed{\text{-30}} & -30 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{cases} 4x+6y+6z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 4x=0 \\ y=-z \end{cases}$$

On trouve donc $\mathscr{S}_{-3} = \left\{(0,-z,z) \middle| z \in \mathbb{R}\right\}$. Ce qui signifie que $-3 \in Sp(A)$ et

$E_{-3}(A) = \text{Vect}((0,-1,1))$.

Si $\boxed{\lambda = 1}$, la matrice est de rang 2 et le système se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} 4x+6y+2z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x=-2z \\ y=z \end{cases}$$

D'où : $\mathscr{S}_1 = \left\{(-2z,z,z) \middle| z \in \mathbb{R}\right\}$. Ce qui signifie que $1 \in Sp(A)$ et :

$E_1(A) = \text{Vect}((-2,1,1))$

Si $\boxed{\lambda = 12}$, le système se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 6 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} 4x+6y+-9z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x=\frac{3}{4}z \\ y=z \end{cases}$$

D'où : $\mathscr{S}_{12} = \left\{ \left(\frac{3}{4}z,z,z\right) \middle| z \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, $12 \in Sp(A)$ et :

$$E_{12}(A) = \text{Vect}\left(\left(\frac{3}{4},1,1\right)\right).$$

En conclusion : $Sp(A) = \{12,-3,1\}$ avec :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \text{Vect}((-2,1,1)) \\ E_{-3}(A) &= \text{Vect}((0,-1,1)) \\ E_{12}(A) &= \text{Vect}\left(\left(\frac{3}{4},1,1\right)\right). \end{aligned}$$

■

Comme on le voit sur cet exemple, on applique souvent le théorème du rang en dimension finie :

$$\dim(E_\lambda(u)) = \dim(E) - \mathrm{Rg}(u - \lambda Id_E)$$

■ **Exemple I.8** Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites complexes.

On définit $\Delta \in \mathscr{L}(E)$ par $\Delta((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on cherche les suites (u_n) telles que $\Delta((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela signifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lambda u_n.$$

C'est donc l'ensemble des suites géométriques.

On voit que que tout complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

On écrit :

$$Sp(\Delta) = \mathbb{C} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{C},\ E_\lambda = \mathrm{Vect}\left((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

■

⋆ Propriétés des sous-espaces propres

De manière évidente, les sous-espaces propres sont stables par u, en fait ils sont stables par tout endomorphisme qui commute avec u.

Proposition I.4 Soit u et v deux endomorphismes qui commutent.

Soit λ une valeur propre de u et $E_\lambda(u)$ espace propre associé à λ.

On a alors $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Autrement dit : si deux endomorphismes commutent, alors **les sous-espace propres de l'un sont stables par l'autre.**

Démonstration. Soit $x \in E_\lambda(u)$, alors on sait que $u(x) = \lambda x$. On a :

$$u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

D'où $v(x) \in E_\lambda(u)$. On a bien prouvé le résultat. ■

On peut aussi remarque que si u et v commutent, alors $\lambda Id - u$ et v commutent. Ainsi, $E_\lambda(u) = \ker(\lambda Id - u)$ est stable par v.

En particulier : $E_\lambda(u)$ est stable par u ce qui est évident. On peut aussi retrouver le fait que si u et v commutent $\ker(u)$ (ie $E_0(u)$) est stable par v.

Ce résultat est à utiliser avec le premier résultat de ce chapitre : si λ est une valeur propre de u telle que $E_\lambda(u)$ est une droite (ie un SEV de dimension 1) et si u et v commutent, alors $E_\lambda(u)$ est une droite stable par v.

On peut donc considérer x_0 une base de $E_\lambda(u)$, x_0 est donc un vecteur propre u, mais comme la droite $E_\lambda(u)$, ie la droite $Vect(x_0)$ est stable par v, on en déduit

que x_0 est aussi vecteur propre de v (associé à une valeur propre qui peut être différente de λ).

Attention : si le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ n'est plus une droite (ie si sa dimension est supérieure ou égale à 2), alors, on sait simplement que c'est un espace stable. Par exemple si $E_\lambda(u)$ est de dimension 2 et que $E_\lambda(u) = Vect(x_0, x_1)$, alors x_0 et x_1 sont vecteurs propres de u associés à λ, et le plan $E_\lambda(u)$ est stable par v, mais la restriction de v à ce plan peut être une rotation, et dans ce cas ni x_0 ni x_1 ne sont vecteurs propres de v.

On a aussi : les sous-espaces propres sont en somme directe.

Proposition I.5 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), E_{\lambda_2}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur p. On note $P(p)$ la proposition : « *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), E_{\lambda_2}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe* ».

Initialisation pour $p = 2$: Soit deux valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes. On veut montrer que $E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u) = \{0\}$.

Pour cela, on considère $x \in E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u)$. On a alors :

$$u(x) = \lambda_1 x \qquad \text{et} \qquad u(x) = \lambda_2 x$$

et donc $\lambda_1 x = \lambda_2 x$ ou encore $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on obtient $x = 0$ et donc $E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u)$.

Hérédité : Soit p fixé tel que $P(p)$ est vraie. On considère donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ $p+1$ valeurs propres distinctes.

On doit montrer que $E_{\lambda_1}(u), E_{\lambda_2}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u), E_{\lambda_{p+1}}(u)$ sont en somme directe.

Pour cela, on considère $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) \in \prod_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0$$

On applique u, ce qui donne :

$$u\left(\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0\right) = 0 \text{ ie } \sum_{i=1}^{p+1} u(x_i) = 0 \text{ ou encore } \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = 0$$

On a donc deux « lignes » :

$$\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0 \qquad \text{ie} \qquad \sum_{i=1}^{p} x_i + x_{p+1} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = 0 \qquad \text{ie} \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0$$

On fait $l_2 \leftarrow l_2 - \lambda_{p+1} l_1$ pour obtenir :

$$\sum_{i=1}^{p} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_{p+1})x_i}_{\in E_{\lambda_i}(u)} = 0$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ (\lambda_i - \lambda_{p+1})x_i = 0 \text{ et donc } x_i = 0 \text{ car } \lambda_i \neq \lambda_{p+1}.$$

On en déduit alors que $x_{p+1} = 0$, puis que la somme est directe. D'où l'hérédité. ■

! Attention, la somme est directe ce qui ne signifie pas que la somme fait l'espace entier : cela signifie que la décomposition sous la forme $\sum_{i=1}^{p} x_i$ où chaque $x_i \in E_{\lambda_i}$ est unique si elle existe.

Corollaire I.6 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u.

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs vérifiant : pour tout i, x_i est un vecteur propre associé à λ_i, alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Autrement dit lorsqu'on construit une famille en réunissant des vecteurs pris dans des sous-espaces propres différents, on obtient une famille libre.

Démonstration. On considère l'équation :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$$

Or $\lambda_i x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ et les sous espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directes.

Ainsi : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i x_i = 0$ et donc $\lambda_i = 0$ car x_i étant un vecteur propre, il est non nul. ■

■ **Exemple I.9** En appliquant les résultats précédents, on obtient le résultat suivant : si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ sont p complexes distincts, alors :

La famille de suites complexes $\left((\lambda_1^n)_n, (\lambda_2^n)_n, \ldots, (\lambda_p^n)_n\right)$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

La famille de fonctions $\left(x \longmapsto e^{\lambda_1 x}, x \longmapsto e^{\lambda_2 x} \ldots, x \longmapsto e^{\lambda_p x}\right)$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$

■

■ **Exemple I.10** Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, on obtient que la famille :

$\left((-2,1,1), (0,-1,1), (\frac{3}{4}, 1, 1)\right)$ est libre donc une base de $\mathbb{R}^3$

dans cette base, la matrice de l'endomorphisme associé à A est diagonale. Ainsi, A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

■

Corollaire I.7 Si E est de dimension finie et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de u, alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leqslant \dim(E).$$

De plus, on a :

$$\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E \iff \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim(E).$$

Démonstration. On a :

$$\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) \subset E$$

et donc :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)\right) \leqslant \dim(E)$$

or la dimension d'une somme directe est la somme des dimensions, ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leqslant \dim(E).$$

De plus, comme on a l'inclusion évidente $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) \subset E$, on a égalité si et seulement si ils ont la même dimension.

■

Corollaire I.8 En particulier, dans un espace de dimension n, un endomorphisme a au plus n valeurs propres distinctes. Ou encore : une matrice carré de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration. Si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de endomorphisme u, alors par définition $\dim(E_{\lambda_i}(u)) \geqslant 1$ puisqu'il contient un élément non nul.

Ainsi, de $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leqslant \dim(E)$, on tire : $p \leqslant n$. ■

I.3 Valeurs propres et polynôme d'endomorphisme

La proposition suivante fait le lien entre les valeurs propres de u et les valeurs propres de $P(u)$. avec comme cas particulier, le cas où $P(u)=0$, ie P annule u.

Proposition I.9 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si λ est valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$. De plus, si x est vecteur propre de u associé à λ, alors x est vecteur propre de $P(u)$ associé à $P(\lambda)$.

Si P est annulateur de u et λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda)=0$. Autrement dit, les valeurs propres sont racines des polynômes annulateurs.

Ou encore : si P annule u, alors toutes valeurs propres de u annule P.

Le même résultat est valable pour des matrices.

Démonstration. Soit $\lambda \in SP(u)$. On sait alors qu'il existe $x \in E$ non nul, tel que : $u(x)=\lambda x$.

On a alors $u^2(x)=\lambda^2 x$ et $u^3(x)=\lambda^3 x$. On montre ainsi facilement par récurrence que $u^k(x)=\lambda^k x$ pour toute valeur de $k \in \mathbb{N}$ (c'est vrai pour $k=0$).

Ce qui montre que

$$\begin{aligned} P(u)x &= \sum_{k=1}^{n} u^k(x) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda^k\right)(x) = P(\lambda)x \end{aligned}$$

Ainsi, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ et x est un vecteur propre associé.

Supposons maintenant que P soit annulateur de u, ie $P(u)=0$. On considère toujours λ valeur propre de u et x vecteur propre associé.

On a alors :

$$P(u)(x)=0 = P(\lambda)x$$

comme $x \neq 0$ c'est nécessairement que $P(\lambda)=0$. ■

Il peut y avoir des racines du polynôme annulateur qui ne sont pas valeurs propres. Par exemple, si P est annulateur, alors QP est aussi annulateur pour tout polynôme Q. On peut donc ajouter des racines à P qui ne sont pas nécessairement des valeurs propres. De plus, rien n'est indiqué sur la multiplicité.

Méthode : Lorsqu'on dispose un polynôme P annulateur de u, on restreint la recherche des valeurs propres de u aux racines de P

II Polynôme caractéristique

II.1 Définition

On se restreint pour cette section à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

Définition II.1 Le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

ou encore :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n)$$

Notation II.1. *Par abus de langage, on note :* $\chi_A = \det(XI_n - A)$ *comme si on mettait l'inconnue* X *dans les coefficients de la matrice.*

R Selon les cas, il sera plus simple d'utiliser l'une ou l'autre formule.

Autant que possible il faut séparer la fonction polynomiale du polynôme : on écrit $\chi_A(\lambda)$ pour la valeur du polynôme en λ (en particulier pour chercher des racines), et χ_A « avec des grands X » pour le polynôme lui-même.

Pour faire les calculs de polynôme caractéristique, on peut soit utiliser la lettre X (et donc faire une matrice dont les coefficients sont dans l'ensemble des polynômes), soit utiliser la lettre λ puis revenir au X lorsqu'on donne le polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique se calcule donc à l'aide d'un déterminant qui dépends d'un paramètre.
Pour prouver que $\chi_A(\lambda)$ est une fonction polynomiale en λ on peut simplement remarquer qu'un déterminant d'une matrice est un polynôme en les coefficients de la matrice.
Cela peut se prouver par récurrence en utilisant le développement selon une ligne ou en utilisant la formule :

$$det(M) = \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} M_{1\sigma(1)} M_{2\sigma(2)} \dots M_{n\sigma(n)}$$

Proposition II.1 Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Démonstration. En effet pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A = P^{-1}BP$:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I_n - A) &= \det\left(\lambda I_n - P^{-1}BP\right) \\
&= \det\left(P^{-1}(\lambda I_n - B)P\right) \\
&= \det\left(P^{-1}\right)\det(\lambda I_n - B)\det(P) \\
&= \underbrace{\det\left(P^{-1}\right)\det(P)}_{=1}\det(\lambda I_n - B)
\end{aligned}$$

■

R On peut aussi dire que $\lambda I_n - A$ et $\lambda I_n - B$ sont semblables puisque :

$$\lambda I_n - A = P^{-1}(\lambda I_n - B)P$$

Ainsi le polynôme caractéristique est lié à l'endomorphisme et non à la matrice, on peut donc définir :

Définition II.2 Soit E de dimension finie.
Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est le polynôme caractéristique de la matrice de l'application u dans une base quelconque.
Cela ne dépend pas de la base choisie.
On peut écrire : $\chi_u = \det(XId_E - u)$.

■ **Exemple II.1** Pour une matrice de taille 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On calcule pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda) - cb \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb \end{aligned}$$

Ce que l'on écrit (avec un polynôme formel) :

$$\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - cb = X^2 - Tr(A)X + det(A)$$

■

II.2 Lien avec les valeurs propres

Proposition II.2 — Polynôme caractéristique et valeurs propres. Les valeurs propres de l'endomorphisme u (respectivement de la matrice A) sont les racines de son polynôme caractéristique.

On a donc un moyen « simple » de donner les valeurs propres : calculer le polynôme caractéristique puis déterminer les racines.

Démonstration. λ est valeur propre si et seulement si $\lambda Id_E - u$ n'est pas injectif, si et seulement si le déterminant de $\lambda Id_E - u$ est nul. ■

■ **Exemple II.2** Si on reprends l'exercice sur les valeurs propres de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ On peut calculer le déterminant pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 3 \\ 4 & 3-\lambda & 6 \\ 4 & 6 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Cela peut se faire avec la règle de Sarus ou par manipulation sur les lignes et les colonnes ou encore par développement selon une ligne / colonne.

Ici par exemple :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) =&(4-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda)+4\times6\times3+4\times3\times6\\ &-3\times(3-\lambda)\times4-6\times6\times(4-\lambda)-(3-\lambda)\times3\times4\\ =&\dots\\ =&\lambda^3-10\lambda^2-27\lambda+36\\ =&(\lambda-12)(\lambda+3)(\lambda-1)\end{aligned}$$

■

Notons que cette méthode consiste donc à calculer un déterminant avec un paramètre (on obtient alors un polynôme), puis à calculer les racines de ce polynôme. Cette méthode est donc difficile à utiliser directement (en dehors des dimension 2 et 3).
De plus, elle ne donne pas les sous-espace propre.

R Pour la culture c'est en fait le contraire. Pour obtenir numériquement les racines d'un polynôme P, on construit la matrice compagnon (une matrice A vérifiant $\chi_A = P$) et on calcule numériquement les valeurs propres de A.

On a donc une situation différente entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$:

- sur $\mathbb{C}$ tout polynôme (non constant) a une racine, donc tout endomorphisme a une valeur propre (si $n \geqslant 2$).
- sur $\mathbb{R}$ certain polynômes n'ont pas de racines, donc certain endomorphismes n'ont pas de valeur propre réelle, mais ces endomorphismes ont une valeur propre complexe !

Par exemple, on sait que si le degré du polynôme est impair, alors le polynôme a une racine réelle. Donc si la taille de la matrice est impaire, alors elle a une valeur propre réelle.
Comme on l'a vu une matrice de rotation n'a pas de valeurs propres réelles mais elle a deux valeurs propres complexes.

Proposition II.3 — cas particulier d'une matrice triangulaire. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \begin{pmatrix}\alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n\end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure de diagonale $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

On connaît alors son polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$$

et

$$Sp(A) = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$$

Ainsi, pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont les coefficients diagonaux.

Ce résultat est aussi valable pour une matrice triangulaire inférieure.

Démonstration. Il suffit d'écrire le déterminant de $\lambda I_n - A$ pour le voir. ■

Ainsi, pour une matrice triangulaire supérieure c'est tout simple : les valeurs propres sont sur la diagonale !

✯ Cas d'une matrice triangulaire par bloc

Considérons le cas d'une matrice triangulaire par blocs : si la matrice M s'écrit sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \qquad \text{avec } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$$

On a alors :

$$M - \lambda I_n = \begin{pmatrix} A - \lambda I_p & C \\ 0 & D - \lambda I_q \end{pmatrix} \text{ avec } p+q = n$$

En utilisant le déterminant par blocs (que l'on verra au chapitre déterminant), cela donne :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda I_n) \\ &= \det(A - \lambda I_p)\det(D - \lambda I_q) \\ &= \chi_A(\lambda)\chi_D(\lambda) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\chi_M = \chi_A \chi_D$$

le polynôme caractéristique est le produit des polynômes caractéristiques de la diagonale.

On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème II.4 — Élément propre d'un endomorphisme induit. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\tilde{u}$ l'endomorphisme de F induit par u.

C'est-à-dire :

$$\tilde{u} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

Alors le polynôme caractéristique de $\tilde{u}$ divise celui de u.

En particulier, toute valeur propre de $\tilde{u}$ est valeur propre de u et l'espace propre associé est l'intersection de celui de u avec F.

Démonstration. Puisque F est stable par u, alors la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$ adapté est triangulaire par bloc. Comme ci-dessus, on note donc :

$$M = Mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

A est la matrice de l'endomorphisme induit $\tilde{u}$. On a vu : $\chi_M = \chi_A \chi_D$. Ce qui signifie que $\chi_{\tilde{u}} = \chi_A$ divise $\chi_u = \chi_M$.

En particulier, une valeur propre de $\tilde{u}$ est racine de $\chi_{\tilde{u}}$ donc racine de χ_u donc valeur propre de u.

On considère maintenant λ une valeur propre de $\tilde{u}$ (donc de u), on note $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E)$ et $\tilde{E}_\lambda = \ker(\tilde{u} - \lambda Id_F)$ les sous-espaces propres associés. Montrons que :

$$\tilde{E}_\lambda = E_\lambda \cap F$$

Soit $x \in \tilde{E}_\lambda$, alors $x \subset F$ (puisqu'il est vecteur propre de $\tilde{u}$ qui est définie sur F). de plus $\tilde{u}(x) = \lambda x$, ie $u(x) = \lambda x$ et donc $x \in E_\lambda$.

Réciproquement, si $x \in E_\lambda \cap F$, alors $u(x) = \lambda x$ et $x \in F$, donc on peut calculer $\tilde{u}(x)$ et $\tilde{u}(x) = \lambda x$, ainsi, $x \in \tilde{E}_\lambda$, d'où l'égalité. ■

L'idée est que lorsque l'on a des sous-espaces stables (en particulier si ils sont supplémentaires), on peut découper le problème de la recherche d'éléments propres de l'application u à la recherche d'éléments propres des endomorphismes induits.

II.3 Coefficients

Proposition II.5 — Quelques coefficients du polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire de degré n.

On a aussi pour une matrice A et un endomorphisme u :

$$\chi_A = X^n - Tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$
$$\chi_u = X^n - Tr(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

En particulier pour une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\chi_A = X^2 - Tr(A)X + \det(A).$$

Démonstration. En prenant $\lambda = 0$, on obtient que le terme constant est égal à $(-1)^n \det(A) = \det(-A)$.

La formule se démontre en écrivant pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & & -a_{2n} \\ & \ddots & & & \\ -a_{n1} & \dots & \dots & & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

On utilise alors la formule suivante (qui est hors-programme) :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S(n)} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} M_{1\sigma(1)} M_{2\sigma(2)} \dots M_{n\sigma(n)}$$

On constate que si σ est l'identité, alors le terme est un polynôme de degré n en λ, si $\sigma \neq I_d$, alors il y a deux termes qui ne sont pas sur la diagonale, donc le terme est un polynôme de degré au plus $n-1$ en λ. Ainsi :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\dots(\lambda - a_{nn}) + \underbrace{\dots}_{deg \leqslant n-2}$$

en développant, cela donne :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \underbrace{\dots}_{deg \leqslant n-2}$$

■

Pour une matrice 2×2, on a : si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors :

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) = X^2 - Tr(A)X + \det(A).$$

Pour une matrice 3×3, la formule est la suivante : si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ alors

$$\chi_A = X^3 - Tr(A)X^2 + \Big((ae - db) + (ai - gc) + (ei - hf)\Big)X - \det(A)$$

Remarquez que le coefficient devant X est une somme de mineurs : il s'agit des déterminants extraits de la matrice comme si on développait par rapport à la diagonale.

Ce résultat permet de déduire parfois le polynôme caractéristique sans calcul en raisonnant sur les coefficients du polynôme.

Corollaire II.6 On suppose que le polynôme caractéristique est scindé : on note $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.

Dans cette écriture, les valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes, elles sont écrites autant de fois que leur ordre de multiplicité comme racine de χ_A (leur multiplicité algébrique définie plus loin).

Dans ce cas, la matrice A a autant de valeur propre (compté autant de fois que leur multiplicité) que sa taille. On a aussi :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{ie la trace est la somme des valeurs propres}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{ie le déterminant est le produit des valeurs propres}$$

Dans cette écriture, on compte les valeurs propres autant de fois que leur multiplicité comme racine de χ_A (multiplicité algébrique).

Ce résultat est particulièrement utile dans $\mathbb{C}$ où tous les polynômes sont scindés.

Démonstration. Cela provient des relations coefficients / racines :

$$\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) = X^n - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

On identifie ensuite avec les coefficients précédemment calculés. ■

■ **Exemple II.3** Pour comprendre l'écriture avec « autant de fois que leur multiplicité » : Si $\chi_A = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)^4$, alors :

$$\begin{aligned} Tr(A) =& 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \\ \det(A) =& \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3^4 \end{aligned}$$

■

Si on veut des valeurs propres distinctes, il faut écrire :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$$

et donc :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i}\lambda_i \qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{p}\lambda_i^{m_{\lambda_i}}$$

m_{λ_i} est l'ordre de multiplicité de la valeur propre comme racine de χ_A (ordre de multiplicité algébrique).

II.4 Mutliplicité d'une valeur propre

Puisque les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, on peut faire un lien entre le chapitre Polynôme (et les notions d'ordre des racines) et l'algèbre linéaire.

On rappelle que :

- λ est une racine d'ordre d de P, si λ annule P, P', ..., P^{d-1} et pas P^d. Avec le lien entre racine et divisibilité, cela s'écrit : $(X-\lambda)^d$ divise P mais $(X-\lambda)^{d+1}$ ne divise pas P.
- λ est une racine d'ordre au moins d de P, si λ annule P, P', ..., P^{d-1}, ce qui signifie que $(X-\lambda)^d$ divise P.

Définition II.3 — Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme u.

On appelle l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_u.

On définit de même l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ d'une matrice A : c'est l'ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme χ_A.

Notation II.2. *La multiplicité d'une valeur propre est noté m_λ.*

On a deux manière de mesurer l'importance d'une valeur propre :

- en considérant **l'ordre de la valeur propre dans le polynôme caractéristique** : il s'agit de la multiplicité telle qu'elle est définie ci-dessus et notée m_λ. On parle parfois de multiplicité algébrique.
- en considérant **la dimension du sous-espace propre** : $\dim(E_\lambda)$. On parle de multiplicité géométrique.

R Lorsqu'on ne précise pas c'est l'ordre algébrique qui est utilisé.

■ **Exemple II.4** Si on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors son polynôme caractéristique est $\chi_A = (X-1)^2$, son spectre est $\{1\}$, l'ordre algébrique de 1 est $m_1 = 2$, comme $rg(A - I_2) = 1$, son ordre géométrique est 1. ■

Les liens entre ces deux mesures sont dans la proposition suivante :

Théorème II.7 — Dimension d'un sous-espace propre et ordre de multiplicité. Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme u et E_λ l'espace propre associé, m_λ l'ordre de la valeur propre λ.

On a alors :

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$$

Autrement dit la dimension du sous-espace propre est au plus l'ordre de multiplicité de la valeur propre.

Démonstration. Déjà les inégalités $1 \leqslant \dim(E_\lambda)$ et $1 \leqslant m_\lambda$ sont évidentes.

Considérons ensuite l'espaces E_λ. On construit une base $\mathscr{B}$ de cet espace. Puis on ajoute des vecteurs à $\mathscr{B}$ pour construire une base $\mathscr{C}$ de E (autrement dit, on a construit une base $\mathscr{C}$ adaptée à E_λ).

La matrice de u dans cette base est triangulaire par bloc :

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & * & * \\ & \ddots & & * & * \\ & & \lambda & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda Ir & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Le bloc en haut à gauche est de taille $r = \dim(E_\lambda)$.

Considérons $t \in \mathbb{C}$ et calculons $\chi_A(t)$:

$$\chi_A(t) = (-1)^n \begin{pmatrix} \lambda - t & & & * & * \\ & \ddots & & * & * \\ & & \lambda - t & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\chi_A(t) = (\lambda - t)^r(-1)^n \det(\lambda I_{n-r} - C)$. Ainsi, $(\lambda - X)^r$ divise le polynôme χ_A (autrement dit λ est racine d'ordre au moins r). et donc $r \leqslant m_\lambda$. On en déduit que la dimension de l'espace propre E_λ est inférieur à la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique. ■

Une démonstration alternative (en fait la même), consiste à écrire que E_λ est stable par u, donc on peut considérer l'endomorphisme induit sur E_λ noté $\tilde{u}$. Cet endomorphisme est une homothétie. Donc $\chi_{\tilde{u}} = (X - \lambda)^r$ avec $r = \dim(E_\lambda)$. Comme $\chi_{\tilde{u}}$ divise χ_u, on retrouve que $(X - \lambda)^r$ divise χ_u et donc que λ est racine d'ordre au moins r de χ_u.

■ **Exemple II.5** Supposons que u soit de rang $r < n$, alors $\ker(u) = E_0$ est de dimension $n - r$, donc la racine 0 de P est d'ordre au moins $n - r$ et donc χ_u est divisible par X^{n-r}.
■

Corollaire II.8 Si λ est valeur propre simple de u (ie son ordre de multiplicité est 1), alors $\dim(E_\lambda) = 1$.

Ces résultats sont très utiles pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice A : on voit des valeurs propres « évidentes » sur la matrice (en particulier 0, 1 ou en regardant la diagonale) et on en déduit des propriétés de χ_A.
En utilisant les coefficients connus on en déduit entièrement χ_A.

■ **Exemple II.6** On considère la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose les $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}$ non tous nuls.

On veut calculer le polynôme caractéristique de A_n noté χ_n.

Le rang de A_n est 2, donc X^{n-2} divise le polynôme χ_n. Comme on sait qu'un polynôme caractéristique est unitaire et de degré n, on en déduit qu'il s'écrit sous la forme $\chi_n = X^{n-2}(X^2 + a_n X + b_n)$.

Il reste à calculer a_n et b_n.

On développe, cela donne :

$$\chi_n = X^n + a_n X^{n-1} + b_n X^{n-2}$$

Ainsi, a_n est la trace, et donc $a_n = 0$ ie $\chi_n = X^{n-2}(X^2 + b_n)$

Pour b_n, on peut procéder par récurrence.

On sait : $\chi_n = X^{n-2}(X^2 + b_n)$.

Pour $n = 2$, on a :

$$\chi_2 = \begin{vmatrix} X & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & X \end{vmatrix} = X^2 - \alpha_1^2$$

d'où $b_2 = -\alpha_1^2$.

Pour $n=3$, on essaie de se ramener au cas précédent :

$$\begin{aligned}\chi_3 &= \begin{vmatrix} X & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & X & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & X \end{vmatrix} \\ &= X\begin{vmatrix} X & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & X \end{vmatrix} + (-1)^4(-\alpha_2)\begin{vmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ X & -\alpha_1 \end{vmatrix} \qquad \text{dvlp colonne 1} \\ &= X\chi_2 - \alpha_2^2 X \\ &= X\left(X^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\right)\end{aligned}$$

On pose donc :

$$\mathscr{P}(n) : "\chi_n = X^{n-2}\left(X^2 - \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2\right)"$$

et on démontre que la propriété est vraie pour toutb $n \geqslant 2$ par récurrence. On a déjà vu le cas $n=2$.

Soit $n \geqslant 2$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On calcule donc :

$$\chi_{n+1} = \begin{vmatrix} X & & & & -\alpha_n \\ & X & & & -\alpha_{n-1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & X & -\alpha_1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 & X \end{vmatrix}$$

on utilise la même méthode que pour le cas $n=3$ et on développe donc selon la première colonne :

$$\begin{aligned}\chi_{n+1} &= X\begin{vmatrix} X & & & -\alpha_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & X & -\alpha_1 \\ -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 & X \end{vmatrix} + (-1)^{n+2}(-\alpha_n)\begin{vmatrix} 0 & X & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & X \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 \end{vmatrix} \\ &= X\chi_n + (-1)^n(-\alpha_n)(-1)^{n+1}(-\alpha_n)\begin{vmatrix} X & & \\ & \ddots & \\ & & X \end{vmatrix} \\ &= X\chi_n + \left(-\alpha_n^2\right)X^{n-1}\end{aligned}$$

(attention à bien noter les tailles des matrices /déterminants que l'on peut mettre éventuellement en indice).

On a donc bien montré la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \chi_n = X^{n-2}\left(X^2 - \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2\right)$$

■

III Diagonalisation en dimension finie

On considère toujours le cas où E est de dimension finie n.

III.1 Définitions

Définition III.1 On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $Mat_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale.

On dit qu'une matrice carré de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable autrement dit si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. C'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire diagonale telle que : $A = PDP^{-1}$.

On a aussi un lien évident entre ces deux définitions :

Proposition III.1 Un endomorphisme u est diagonalisable, si et seulement si pour tout choix de la base $\mathscr{C}$ la matrice de u dans la base $\mathscr{C}$ est diagonalisable.

Plus intéressant, on a le résultat suivant (qui est parfois pris comme définition d'un endomorphisme diagonalisable) :

Proposition III.2 Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}$ constituée de valeurs propres de u.

Démonstration. Si il existe une base de valeurs propres alors dans cette base la matrice de u est diagonale.

Réciproquement : la base $\mathscr{B}$ telle que $Mat_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale n'est constituée que de vecteurs propres. ■

L'un des intérêts des matrices diagonalisables est que l'on peut facilement calculer les puissance n-ième :

Proposition III.3 Si $A = PDP^{-1}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration. Par une récurrence immédiate. ■

R Rappel : pour mettre une matrice diagonale à la puissance n-ième, il suffit de mettre les coefficients à la puissance n-ième.

Si une matrice est diagonale, alors les valeurs propres sont sur la diagonale. (en fait si la matrice est triangulaire supérieure, alors les valeurs propres sont sur la diagonale).

Si une matrice A est diagonalisable, et si A se réduit en la matrice diagonale D (ie si il existe P tel que $A = PDP^{-1}$), alors les valeurs propres sont sur la diagonale de la matrice D.

On peut se demander combien de fois elles sont écrites. Supposons que :

$Mat_{\mathscr{B}}(u) = D$ avec D diagonale.

Déjà, on peut toujours changer l'ordre des vecteurs de $\mathscr{B}$ pour organiser les valeurs propres dans l'ordre :

$$Mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_p & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Comme on l'a vu les valeurs propres sont sur la diagonale, ainsi $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ (dans cette écriture les valeurs propres sont distinctes).

Notons k le nombre de fois où λ_1 est écrite. On a :

$$Mat_{\mathscr{B}}(u) - \lambda_1 I_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & \lambda_2 - \lambda_1 & & & & \\ & & & & \lambda_2 - \lambda_1 & & & \\ & & & & & \lambda_p - \lambda_1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_p - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Il y a $n-k$ termes diagonaux non nuls (puisque les autres valeurs propres sont différentes de λ_1). Ainsi,

$$Rg(u - \lambda_1 I_d) = n - k$$

et donc E_{λ_1} est de dimension k, ie la valeur propre λ_1 est écrite autant de fois que la dimension du sous-espace propre.

Ainsi, lorsqu'on réduit un endomorphisme diagonalisable en trouvant une base $\mathscr{B}$ telle que $Mat_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale, alors sur cette matrice diagonale, se trouve les valeurs propres écrites autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé (ie que l'ordre géométrique).

De la même manière, pour une matrice A que l'on réduit à une matrice diagonale D, alors on va trouver dans D les valeurs propres de A écrites autant de fois que leur ordre géométrique.

R Le même raisonnement peut être fait à l'identique pour une matrice qui se réduit à une matrice triangulaire supérieure (matrice trigonalisable vue plus loin).

La matrice identité (comme toute matrice diagonale) est diagonalisable, ainsi que la matrice nulle.
La matrice : $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, sinon ce serait l'identité.
En effet, son spectre est $\{1\}$, donc si elle était diagonalisable, nécessairement, on aurait :

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = PI_2P^{-1} = I_2$$

Notons que : $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+\varepsilon\end{pmatrix}$ avec $\varepsilon > 0$ est diagonalisable. Ainsi, si on modifie un tout petit peu une matrice diagonalisable, on peut avoir une matrice non diagonalisable.

Pour bien repérer l'expression $A = PDP^{-1}$ il est plus simple d'écrire $AP = PD$, en effet :

- AP est le produit de A par chaque colonne de P, comme les vecteurs propres sont dans la colonne, c'est très simple à calculer : avec des notation évidentes :

$$A\begin{pmatrix}| & | & & |\\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n\\ | & | & & |\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}| & | & & |\\ AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}$$

- PD est obtenue en multipliant la colonne i de P par λ_i (ie la valeur propre associée) :

$$\begin{aligned}PD &= \begin{pmatrix}| & | & & |\\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}| & | & & |\\ \lambda_1C_1 & \lambda_2C_2 & \cdots & \lambda_nC_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, la relation $AP = PD$ signifie que la matrice P contient des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres écrites dans le même sur la diagonale de D.

Lorsqu'on réduit une matrice A en une matrice diagonale en écrivant $A = PDP^{-1}$, alors P contient les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres écrites dans la diagonale de D, dans le même ordre. Ces vecteurs doivent former une base.

La matrice P est donc construite en cherchant des bases de chaque espace propre.

■ **Exemple III.1** Pour $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, on a vu :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \text{Vect}((-2,1,1)) \\ E_{-3}(A) &= \text{Vect}((0,-1,1)) \\ E_{12}(A) &= \text{Vect}\left(\left(\frac{3}{4},1,1\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi la matrice A se réduit sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on change l'ordre des valeurs propres dans D, alors il faut changer l'ordre des vecteurs propres dans P. ■

⋆ Théorème spectral

Le théorème suivant sera vu et reformulé dans le cours sur les espaces euclidiens :

Théorème III.4 — Théorème spectral. Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$.

En particulier, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

III.2 Lien avec la dimension des sous-espaces propres

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $Sp(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ avec $(\lambda_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ les p valeurs propres distinctes de u.

On peut rappeler que :

- les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe,
- comme ils sont inclus dans E, on a donc toujours : $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leqslant \dim(E)$.
- On a l'égalité des dimensions si et seulement si les sous-espaces propres sont supplémentaires dans E :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim(E) \iff \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E$$

On a le résultat suivant :

Proposition III.5 Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimension de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace E.

On a dans ce cas : $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E$.

Démonstration. On suppose $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim(E)$.

Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, cela donne :

$$\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = E$$

On construit alors une base de E en réunissant une base de chacun des E_{λ_i}. Cette base est constituée de vecteurs propres. On en déduit que u est diagonalisable.

Réciproquement, si u est diagonalisable, alors dans une base $\mathscr{B}$ constituée de vecteurs propres, la matrice de u est diagonale.

Sur la diagonale sont écrites les valeurs propres autant de fois que la dimension du sous-espace propre (multiplicité géométrique). Autrement dit la valeur propre E_{λ_i} est écrite $\dim(E_{\lambda_i})$ fois. Comme il y a $\dim(E)$ coefficients sur la diagonale, on en déduit que $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim(E)$.

■

■ **Exemple III.2** Pour un projecteur p, on a $\ker p \oplus \operatorname{Im} p = E$.

Or, p a deux valeurs propres 0 et 1 et $E_0 = \ker p$ et $E_1 = \operatorname{Im} p$. Donc :

$$\dim(E_0) + \dim(E_1) = \dim(E)$$

et au final : p est diagonalisable. ■

■ **Exemple III.3** Pour une symétrie s. On a deux valeurs propres 1 et -1. et on a $E_1 \oplus E_{-1} = E$, donc de même s est diagonalisable. ■

■ **Exemple III.4** Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il n'y a qu'une valeur propre (1) avec $dim(E_1) = 1$. Elle n'est pas diagonalisable. ■

III.3 Lien avec le polynôme caractéristique

Soit une matrice diagonale D.

On reprend le raisonnement précédent : on l'écrit avec des coefficients diagonaux (ie des valeurs propres) $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ tous distincts, et pour simplifier les notations, on ordonne les coefficients diagonaux :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

On note k le nombre fois où est écrit λ_1. En étudiant le rang de $D - \lambda_1 I_n$, on voit que $k = \dim(E_{\lambda_1})$ ie l'ordre géométrique de λ_1. En calculant le polynôme caractéristique χ_D, on voit que k est l'ordre de λ_1 comme racine de χ_D ie l'ordre algébrique de λ_1.

Ainsi dans une matrice diagonale, les valeurs propres sont sur la diagonale et sont écrites autant de fois que l'ordre de multiplicité algébrique et géométrique qui sont les mêmes.

Dans une matrice triangulaire supérieure U, les valeurs propres sont sur la diagonale, mais si on utilise des notations similaires :

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * & \dots & * \\ & \lambda_1 & * & * & & \vdots \\ & & \ddots & * & \dots & \vdots \\ & & & \lambda_1 & * & \vdots \\ & & & & \lambda_2 & * \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

On voit que λ_1 est écrite autant de fois que l'ordre algébrique, qui n'est pas l'ordre géométrique dès que le « triangle » au dessus des λ_1 n'est pas constitué uniquement de 0.

Proposition III.6 L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si :
- le polynôme caractéristique de u est scindé sur le corps $\mathbb{K}$.
- et pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que l'endomorphisme u soit diagonalisable. On considère la base $\mathscr{B}$ constituée de vecteurs propres.

Dans cette base la matrice A de u est diagonale donc le polynôme caractéristique de A (et donc de u) est scindé. De plus, l'ordre de multiplicité algébrique d'une valeur propre λ est le nombre de fois où cette valeur est écrite sur la diagonale, c'est-à-dire la dimension de E_λ.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$ avec $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $m_i = \dim(E_i)$.

Alors en regardant le degré : $\sum_{i=1}^{p} m_i = \deg(\chi_u) = n$.

Donc l'endomorphisme est diagonalisable.

■

Ici encore, on va avoir une différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: certains polynômes sont scindés sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$.
Par exemple une rotation est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

Corollaire III.7 En dimension n, un endomorphisme admettant n valeurs propres deux à deux distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont alors de dimension 1.

Ainsi, si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, alors l'endomorphisme est diagonalisable.

Démonstration. Dans le cas de n valeurs propres deux à deux distinctes notées $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, on sait :

$$\chi = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_n)$$

et pour chaque valeur propre λ, on a $m_\lambda = 1 = \dim(E_\lambda)$. ■

III.4 Calcul effectif de la diagonalisation

Soit une matrice A et u l'endomorphisme associé.

Réduire la matrice c'est trouver une matrice inversible telle que $B = P^{-1}AP$ soit une matrice simple. Autrement dit c'est trouver une base pour laquelle l'endomorphisme u a une matrice simple.

Dans le cadre d'une matrice diagonalisable, on cherche P et D telle que $A = PDP^{-1}$.

voici un procédé général à adapter :

- On calcule le polynôme caractéristique χ_A,
- On cherche les valeurs propres (les racines de χ_A) et leur ordre (ordre algébrique).
- Pour chaque valeur propre λ, on calcule le rang de $A-\lambda I_n$, ce qui va donner $\dim(E_\lambda)$ ie l'ordre géométrique.

On peut alors savoir si A est diagonalisable. Ensuite :

- pour chaque valeur propre λ, on cherche une base du sous-espace propre en résolvant le système $(A-\lambda I_n)X = 0$.
- En réunissant chaque base construite ci-dessus, on obtient une base de E. On met les coordonnées de ces vecteurs dans une matrice P qui est donc inversible.
- On a alors $AP = PD$ et donc $A = PDP^{-1}$

■ **Exemple III.5** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

On voit que A est de rang 2, donc 0 est valeur propre (avec un sous-espace propre de dimension 1). On regarde ensuite :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & -2 & 1 \\ 3 & X-4 & 3 \\ 4 & -4 & X+4 \end{vmatrix}$$

On voit que pour $X = 1$ il y a une chute de rang : $rg(I_3 - A) = 2$ ainsi, 1 est dans le spectre. On en déduit que χ_A s'écrit $\chi_A(X) = X(X-1)(X-\alpha)$, la dernière valeur propre s'obtient par la trace. Et donc :

$$\chi_A(X) = X(X-1)(X+2)$$

ainsi $Sp(A) = \{0,1,-2\}$, A a trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable (et les sous-espaces propres sont des droites).

On cherche une base des sous-espaces propre qui sont tous des droites vectorielles :

$$E_0 = \ker(A) = \text{Vect}((-1,0,1))$$

R On peut voir cela sans calculs car $C_1 = C_3$ où C_i désigne la colonne i de A. Il faut essayer d'éviter les calculs.

$$E_{-2} = \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}((0,1,2))$$

Enfin :

$$E_1(A) = \ker\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}((1,1,0))$$

On pose alors :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a $A = PDP^{-1}$.

Il reste à calculer P^{-1} (par gauss Jordan), on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1+(-2)^n & 2-(-2)^n & -1+(-2)^n \\ 2(-2)^n & -2(-2)^n & 2(-2)^n \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemple III.6** Pour une rotation d'angle θ avec θ non multiple de π :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \chi_A = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$$

Dans $\mathbb{R}$ le polynôme n'est pas scindé (puisqu'il n'a pas de racine), donc A n'est pas diagonalisable.

Dans $\mathbb{C}$, le polynôme est scindé (comme tout polynôme de $\mathbb{C}$), ses racines sont :

$$\chi_A = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)$$

(il est scindé à racines simples). On en déduit que A est diagonalisable. Il reste plus qu'à déterminer les sous-espaces propres en cherchant des solutions de :

$$AX = e^{i\theta}X$$

comme on l'a fait précédemment. ■

■ **Exemple III.7** Pour la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a vu :

$$\begin{aligned} \chi_n =& X^{n-2}\left(X^2 - \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2\right) \\ =& X^{n-2}\left(X - \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2}\right)\left(X + \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2}\right) \end{aligned}$$

on note $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2}$, et on a donc : $Sp(A) = \{0, \lambda, -\lambda\}$.

Pour 0, on a un ordre algébrique de $n-2$ et on a vu que $Rg(A) = 2$ donc $\dim(E_0) = n-2$, donc l'ordre algébrique est égal à l'ordre géométrique.

Pour faciliter les notation, supposons que α_{n-1} soit non nul (il y a un terme non nul).

On voit des relations sur des colonnes :

$$\begin{aligned} &\alpha_{n-2}C_1 - \alpha_{n-1}C_2 = 0 \\ &\alpha_{n-3}C_1 - \alpha_{n-1}C_3 = 0 \end{aligned}$$

D'une manière générale :

$$\forall j \in [\![2, n-1]\!],\ \alpha_{n-j}C_1 - \alpha_{n-1}C_j = 0$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} (& \alpha_{n-j}, & 0\dots 0 & , -\alpha_{n-1}, & 0\dots 0 &) \\ & & & \uparrow & & \\ & & & j & & \end{array}$$

est un vecteur de E_0 pour $j \in [\![2, n-1]\!]$. Ces $n-2$ vecteurs forment une famille libre. On en déduit que c'est une base de E_0.

Pour λ, on a un ordre algébrique de 1 donc un ordre géométrique de 1. Calculons $A_n - \lambda I_n$:

$$A_n - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & 0 & \alpha_{n-1} \\ \vdots & -\lambda & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \alpha_1 \\ \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Il faut trouver une relation sur les colonnes en gardant en tête la relation : $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2}$. Cela ne semble pas évident.

On voit ici une technique usuelle : quand le rang de la matrice est plutôt faible, il vaut mieux chercher les vecteurs propres en résolvant : $A_nX = \lambda X$. On note alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et on obtient les relations :

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1}x_n &= \lambda x_1 \\ \alpha_{n-2}x_n &= \lambda x_2 \\ \vdots &= \vdots \\ \alpha_1 x_n &= \lambda x_{n-1} \\ \alpha_{n-1}x_1 + \ldots \alpha_1 x_{n-1} &= \lambda x_n \end{aligned}$$

on pose donc $x_n = \lambda$, et on obtient un vecteur solution :

$$(\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \lambda)$$

Rétrospectivement, on voit la relation :

$$\alpha_{n-1}C_1 + \cdots + \alpha_1 C_{n-1} + \lambda C_n = 0$$

sur la matrice $A_n - \lambda I_n$. On a donc trouvé un vecteur non nul de E_λ et donc une base de cet espace propre.

On recommence avec la valeur propre $-\lambda$. son ordre algébrique est 1 et donc son ordre géométrique est 1.

On regarde la matrice $A + \lambda I_n$:

$$A_n + \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & \ldots & 0 & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \lambda & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ddots & \alpha_1 \\ \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_1 & \lambda \end{pmatrix}$$

On voit la relation :

$$\alpha_{n-1}C_1 + \alpha_{n-2}C_2 + \cdots + \alpha_1 C_{n-1} - \lambda C_n = 0$$

ainsi, le vecteur :

$$(\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, -\lambda)$$

est une base de $E_{-\lambda}$.

On en déduit que $A_n = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \ldots & \alpha_2 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ -\alpha_{n-1} & & & & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-2} \\ & -\alpha_{n-1} & & & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-4} \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & -\alpha_{n-1} & \alpha_1 & \alpha_1 \\ & & & & \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & -\lambda & \end{pmatrix}$$

■

IV Diagonalisation et polynômes annulateurs

IV.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème IV.1 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors le polynôme caractéristique de u annule u. Autrement dit : $\chi_u(u) = 0$

De la même manière, pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice A admet son polynôme caractéristique χ_A comme polynôme annulateur. Autrement dit : $\chi_A(A) = 0$.

Démonstration. Admis conformément au programme. ■

En fait ce théorème peut sembler évident. On sait : $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda I_d - u)$ et donc :

$$\chi_u(u) = \det(uI_d - u) = \det(0) = 0$$

La difficulté est que l'on remplace le scalaire λ par l'endomorphisme u.

Tout endomorphisme et toute matrice carré admet donc un polynôme annulateur de degré n. Notons que cela signifie que la famille de $n+1$ vecteurs :

$$\left(I_d, u, u^2, \ldots, u^n\right) \text{ est liée dans } \mathscr{L}(E).$$

On savait déjà qu'il admettait un polynôme annulateur de degré n^2+1 puisque la famille de n^2+1 vecteurs :

$$\left(I_d, u, u^2, \ldots, u^{n^2}\right) \text{ est nécessairement liée dans } \mathscr{L}(E) \text{ car } \dim(\mathscr{L}(E)) = n^2.$$

On rappelle que connaître un polynôme annulateur d'une matrice A ou d'un endomorphisme permet :

- de calculer A^n avec la division euclidienne des polynômes,
- de calculer A^{-1}.

IV.2 Condition de diagonalisation et polynôme annulateur

On cherche des manières simples de savoir si une matrice est diagonalisable.

Proposition IV.2 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

De la même manière, pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Démonstration. Admis conformément au programme. ■

Cette proposition nous donne un moyen simple de savoir si une matrice est diagonalisable.

Proposition IV.3 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ ses valeurs propres (distinctes).

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement il admet $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$ pour polynôme annulateur.

Le même résultat est vrai pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Déjà, si u admet $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$ pour polynôme annulateur alors il annule un polynôme scindé à racines simples et donc il est diagonalisable.

Supposons u soit diagonalisable. On écrit alors :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$$

Soit $x \in E$ quelconque, on décompose x sous la forme :

$$x = \sum_{i=k}^{p} x_k \text{ avec } \forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k \in E_{\lambda_k}$$

On doit montrer que : $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$ annule u, c'est-à-dire que :

$$\bigcirc_{i=1}^{p}(u-\lambda_i I_d)(x) = 0 \text{ ie } (u-\lambda_1 I_d)\dots(u-\lambda_p I_d)(x) = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\bigcirc_{i=1}^{p}(u-\lambda_i I_d)(x) &= \bigcirc_{i=1}^{p}(u-\lambda_i I_d)\left(\sum_{i=k}^{p} x_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{p}\bigcirc_{i=1}^{p}(u-\lambda_i I_d)(x_k)\end{aligned}$$

En effet, $\bigcirc_{i=1}^{p}(u-\lambda_i I_d)$ est une application linéaire.

On commence par calculer :

$$\bigcirc_{i=1}^{p}(u-\lambda_i I_d)(x_1) = ((u-\lambda_2 I_d)\circ\dots\circ(u-\lambda_p I_d))\circ(u-\lambda_1 I_d)(x_1)$$

On utilise le fait que ces endomporphismes commutent, on peut donc appliquer dans l'ordre que l'on veut et en particulier commencer par $u-\lambda_1 I_d$.

Or $(u-\lambda_1 I_d)(x_1) = 0$, car $x_1 \in E_{\lambda_1}$ d'où :

$$\bigcirc_{i=1}^{p}(u-\lambda_i I_d)(x_1) = (u-\lambda_2 I_d)\circ\dots\circ(u-\lambda_p I_d)(0) = 0$$

On procède de même pour calculer $\bigcirc_{i=1}^{p}(u-\lambda_i I_d)(x_2)$, etc. Il faut utiliser la commutativité pour appliquer en premier $(u-\lambda_k I_d)$ à (x_k) qui donne 0.

Au final, on voit que :

$$\bigcirc_{i=1}^{p}(u-\lambda_i I_d)(x)=0 \qquad \text{et comme } x \text{ est quelconque :} \qquad \bigcirc_{i=1}^{p}(u-\lambda_i I_d)=0$$

Ainsi, $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$ annule u. ■

Méthode : lorsque l'on connaît un polynôme P annulateur de u scindé.

Déjà on sait que les valeur propres sont racines de P.

On trouve donc les valeurs propres juste en vérifiant si les racines de P sont bien des valeurs propres.

On note $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ les valeurs propres ainsi obtenues. L'endomorphisme u est alors diagonalisable si et seulement si il annule $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$.

■ **Exemple IV.1** Exemple basique : si on sait que $P=(X-\alpha)^2(X-\beta)$ annule u, alors les valeurs propres sont à chercher parmi (α,β). Si les deux sont valeurs propres, il reste à regarder si $(X-\alpha)(X-\beta)$ annule u. ■

IV.3 Application aux endomorphisme induit

Proposition IV.4 L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Démonstration. Supposons u diagonalisable, alors il annule un polynôme scindé à racines simples. Son endomorphisme induit annule le même polynôme donc il est aussi diagonalisable. ■

V Trigonalisation

On se place toujours dans le cas d'un espace vectoriel E de dimension finie.

V.1 Définitions

Définition V.1 Soit $u\in\mathscr{L}(E)$.

On dit que l'endomorphisme u est trigonalisable si il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est trianguliare supérieure.

Une matrice carrée $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. C'est-à-dire qu'il existe $P\in GL_n(\mathbb{K})$ et $U\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telle que : $A=PUP^{-1}$.

Les liens entre ces deux définitions sont :

Proposition V.1 L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si pour toute base $\mathscr{C}$ de E, la matrice $Mat_{\mathscr{C}}(u)$ est trigonalisable.

La matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.

Pour montrer qu'une matrice A (un endomorphisme u) est trigonalisable, il faut donc construire une base $(e_1,\dots,e_n)$ telle que :

$u(e_1) \in \text{Vect}(e_1)$	ie e_1 est vecteur propre
	$\text{Vect}(e_1)$ est stable par u
$u(e_2) \in \text{Vect}(e_1,e_2)$	$\text{Vect}(e_1,e_2)$ est stable par u
$u(e_3) \in \text{Vect}(e_1,e_2,e_3)$	$\text{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ est stable par u
$\dots$	

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si une telle base existe.
En pratique pour calculer la trigonalisation, il faut donc construire une telle base, les vecteurs de la base sont mis dans la matrice P (qui est donc inversible) et la matrice U contient à la ligne i les coefficient $(\alpha_1,\dots,\alpha_i)$ tels que :

$$u(e_i) = \alpha_1 e_1 + \dots, +\alpha_i e_i.$$

Ici encore, c'est plus la relation $AP = UP$ qu'il faut avoir en tête que $A = PUP^{-1}$.

V.2 Lien avec le polynôme caractéristique

Proposition V.2 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est donc trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Conformément au programme la démonstration est admise.
On peut remarquer que l'implication $\boxed{\Rightarrow}$ est évidente : si l'endomorphisme u est trigonalisable alors on dispose d'une base $\mathscr{B}$ telle que $Mat_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure. On sait alors que le polynôme caractéristique χ_u est aussi le polynôme caractéristique de cette matrice triangulaire supérieure. Il est donc scindé. ■

Corollaire V.3 Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est triagonalisable.

Démonstration. Le théorème de d'Alembert-Gauss assure que tout polynôme à coefficients complexes est scindé. D'où le résultat. ■

On a donc deux choix pour une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
- la regarder comme une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et alors elle est trigonalisable au sens où il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}UP$.
- la regarder comme une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et dans ce cas il peut arriver qu'elle ne soit pas triagonalisable.

Par exemple, une matrice d'une rotation n'est pas trigonalisable alors qu'elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

V.3 Exemple de réalisation de la trigonalisation

Extrait du programme : *La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.*

Il n'y a donc pas de technique à connaître juste quelques exemples.

■ **Exemple V.1** Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme canoniquement associé.

Première étape, on calcule χ_A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 & 2 \\ 0 & X-6 & 3 \\ 1 & -4 & X \end{vmatrix}$$

On peut tenter différentes valeurs : 0, 1, -1 et 2, la chute de rang n'est pas claire. (en fait pour 2 on peut la voir).

On va donc calculer le déterminant en développant selon la première colonne :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) =& (-1)^{1+1}(X-1)\begin{vmatrix} X-6 & 3 \\ -4 & X \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ X-6 & 3 \end{vmatrix} \\ =& (X-1)\left((X(X-6)+12)\right) + (-12-2(X-6)) \\ =& (X-1)(X^2-6X+12) - 2X \\ =& X^3 - 7X^2 + 16X - 12 \end{aligned}$$

Au passage on vérifie toujours le coef en X^3 et X^2, on a aussi la formule générale (cofacteur diagonaux) qui est hors-programme mais peut vous permettre de vérifier.

Il reste à déterminer les racines, on test donc les racines évidentes et on constate que 2 est racine. On écrit donc :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) =& X^3 - 7X^2 + 16X - 12 = (X-2)(X^2-5X+6) \\ =& (X-2)^2(X-3) \end{aligned}$$

On calcule $A - 2I_3$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

On constate que le rang est 2 (car les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires), mais que :

$$3C_2 + 4C_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -4C_1$$

et donc $4C_1+3C_2+4C_3=0$. Ainsi, E_2 est de dimension 1, et donc A n'est pas diagonalisable (ordre algébrique de 2 est 2 mais ordre géométrique est 1).

Méthode 1 : Mais on sait que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ (puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$). On en déduit qu'il existe P et U avec $A=PUP^{-1}$ et U est de la forme :

$$U=\begin{pmatrix}3 & * & *\\ 0 & 2 & *\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

avec la condition : les $*$ n'étant pas tous nuls (car A n'est pas diagonalisable).

> L'idée est de choisir P (ie la base $\mathscr{B}$) pour que U (ie $Mat_{\mathscr{B}}(f)$) soit la plus simple possible .
>
> On peut prendre comme premier vecteur e_1 un vecteur propre associé à 3, et comme e_2 un vecteur propre associé à 2. Dans ce cas, déjà e_1, e_2 sera une famille libre.
>
> De plus, U aura comme forme :
>
> $$\begin{pmatrix}3 & 0 & a\\ 0 & 2 & b\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

On calcule :

$$A-3I_3=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -2\\ 0 & 3 & -3\\ -1 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

On a :

$$C_2+C_3=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=-C_1$$

Ainsi, $C_1+C_2+C_3=0$ et donc $(1,1,1)$ est dans $E_3(A)$. On peut donc poser $e_1=(1,1,1)$.

On prend $e_2=(4,3,4)$, car on a vu que $e_1\in E_2(A)$. Pour e_3, il suffit en fait de compléter la famille libre (e_1,e_2) pour en faire une base. On peut par exemple constater que $(1,0,0)$ n'est pas dans $\text{Vect}(e_1,e_2)$, et donc on peut poser $e_3=(1,0,0)$.

> Pourquoi il suffit de compléter la famille (e_1,e_2) ? Tout simplement parce que quelque soit le choix de e_3 (du moment que (e_1,e_2,e_3) forme une base), on aura :
>
> $$Mat_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}3 & 0 & u_{31}\\ 0 & 2 & u_{32}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{pmatrix}$$
>
> mais comme le polynôme caractéristique de f est le polynôme caractéristique de la matrice de f dans toutes les bases, il faut que $(X-2)^3(X-3)$ soit le polynôme

caractéristique de cette matrice, donc $u_{33} = 2$.

il faut donc calculer $f(1,0,0)$. On a :

$$\begin{aligned} f(1,0,0) =& (1,0,-1) \\ =& \alpha(1,1,1) + \beta(4,3,4) + \gamma(1,0,0) \\ =& 3(1,1,1) - (4,3,4) + 2(1,0,0) \qquad \text{après résolution du système} \\ =& 3e_1 - e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

Avec cette méthode on obtient alors :

$$A = PUP^{-1} \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : On va plutôt chercher à écrire :

$$A = PUP^{-1}$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(on change donc l'ordre des valeurs propres dans la matrices U).

on va prendre $e_1 = (4,3,4)$ et $e_3 = (1,1,1)$, ainsi, on est sûr que U a pour forme :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & \square & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

avec $\square$ non nul **on admet** que l'on peut prendre $\square = 1$.

Ainsi, on cherche e_2, tel que $f(e_2) = 2e_2 + e_1$, ie $(f - 2Id)(e_2) = e_1$, ce qui impose de résoudre le système avec second membre :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

une solution est : $b = 0$, $c = -1$ et $a = -2$. On trouve donc : $e_2 = (-2,0,-1)$, ce qui donne :

$$A = PUP^{-1} \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemple V.2** On considère :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

et g l'endomorphisme canoniquement associé.

On calcule χ_B :

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 1 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -3 & 1 & X+2 \end{vmatrix}$$

On voit clairement une chute de rang pour $X = 1$. On a :

$$I_3 - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

le rang de cette matrice est 2 car $C_1 + C_3 = 0$ et les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Donc E_1 est de dimension 1 et $(1,0,1)$ est base de E_1.

On voit aussi (un peu plus difficilement) que -1 est valeur propre, puis que :

$$B + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

le rang est encore 2 et $C_1 + C_2 + 2C_3 = 0$, donc $(1,1,2)$ est base de E_{-1}. Il reste à calculer la dernière valeur propre avec la trace, on constate que :

$$\chi_B = (X-1)^2(X+1)$$

et donc B n'est pas diagonalisable.

B est trigonalisable.

Méthode 1 : on pose $e_1 = (1,1,2)$ et $e_2 = (1,0,1)$ et on complète par exemple avec $e_3 = (1,0,0)$. On constate que :

$$\begin{aligned} g(e_3) &= (2,2,3) \\ &= 2(1,1,2) - (1,0,1) + (1,0,0) \\ &= 2e_1 - e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Cela donne :

$$A = PUP^{-1} \text{ avec } U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : on pose plutôt $e_1 = (1,0,1)$ et $e_3 = (1,1,2)$. On cherche e_2 pour que $g(e_2) = e_2 + e_1$. On résoud donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on constate que : $(0,-1,0)$ est solution. On obtient donc :

$$A = PUP^{-1} \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Réduction des endomorphismes

Pelletier Sylvain PSI, LMSC

⋆ Réduction en dimension infinie

Exercice 1 Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

On considère l'endomorphisme T de E défini par :

$$T : f \longmapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right)$$

Donner les valeurs propres de T

Correction : On considère $f \neq 0$ et λ tel que $T(f) = \lambda f$.

Si $\lambda \neq 0$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)dt = \lambda f(x)$$

On a donc $f(0) = 0$ et on dérive :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda f'(x)$$

donc f est solution de l'équation $y' - \frac{1}{\lambda}y = 0$ et $y(0) = 0$. D'où f est la fonction nulle !

Si $\lambda = 0$, alors $T(f) = 0$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)dt = 0$$

en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$$

et f est nulle.

Au final, le spectre est vide.

Exercice 2 Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\varphi :\ P \longmapsto XP' - P$$

Correction : On étudie l'équation $XP' = (1+\lambda)P$ d'inconnue P et de paramètre λ.

Si on considère λ tel qu'il existe une solution P non nulle, alors l'étude des termes dominants donne : $(1+\lambda) = deg(P)$ et donc nécessairement $\lambda = -1$ ou $\lambda \in \mathbb{N}$.

On considère un tel λ et on pose $n = 1+\lambda$ et on considère $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ solution on a :

$$XP' = \sum_{k=0}^n k a_k X^k$$

$$(1+\lambda)P = \sum_{k=0}^n (1+\lambda) a_k X^k$$

ce qui donne : $P = a_n X^n$.

Cela donne : $Sp(\varphi) = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{-1\},\ E_k = \text{Vect}(X^{k+1})$.

Autre méthode : soit donc λ et P solution. On note $\tilde{P}$ la restriction de la fonction polynomiale à $\mathbb{R}_*^+$. On a alors une équation différentielle vérifiée par $\tilde{P}$:

$$xy' - (\lambda+1)y = 0$$

Donc $\tilde{P}$ s'écrit :

$$\tilde{P} : x \longmapsto Cx^{\lambda+1} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Mais $\tilde{P}$ est une fonction polynomiale donc $\lambda + 1 \in \mathbb{N}$. Puis, sous cette condition, $\tilde{P}$ détermine P, donc $P \in \text{Vect}(X^{k+1})$

Exercice 3 Soit l'application :

$$a : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{cases}$$

Montrer que $a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ et donner $Sp(A)$.

Correction : Soit P non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que : $a(P) = \lambda P$, ie $XP = \lambda P$
alors en regardant le degré, on a $\lambda = 0$ puis P est nul. Ainsi, le spectre est vide.

⋆ Calcul de réduction de matrice 3×3

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de A. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Donner les éléments propres de A.

Correction : Le rang de A est 1, donc $X^2 | \chi_A$, puis on utilise la trace, ce qui donne : $\chi_A = X^2(X+7)$. Base de E_0 : $((-2,1,0),(-3,0,-1))$, base de E_{-7} : $(1,2,4)$.

⋆ Calcul de réduction de matrice $n \times n$

Exercice 5 Soit f un endomorphisme bijectif d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tel que f^2 soit diagonalisable. Montrer à l'aide d'un polynôme annulateur que f est diagonalisable.
Trouver des contre-exemples si f n'est pas bijectif ou si f est un endomorphisme bijectif d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Correction : On suppose donc f^2 diagonalisable. On sait alors que f^2 annule :

$$\prod_{\lambda \in Sp(f^2)} (X - \lambda)$$

on note $Sp(f^2) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ et on peut donc écrire :

$$\bigcirc_{i=1}^{p} (f^2 - \lambda_i I_d) = 0$$

mais f^2 est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre. Comme on est dans $\mathbb{C}$, tout nombre a deux « racines carrées » opposées, on peut donc trouver $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tels que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \alpha_i^2 = \lambda_i \text{ avec } \alpha_i \neq 0 \text{ et donc } \alpha_i \neq -\alpha_i$$

Et on peut donc écrire :

$$\bigcirc_{i=1}^{p} (f^2 - \alpha_i^2 I_d) = 0 \text{ et donc : } \bigcirc_{i=1}^{p} (f - \alpha_i Id) \bigcirc_{i=1}^{p} (f + \alpha_i Id) = 0$$

f annule donc :

$$\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i) \prod_{i=1}^{p} (X + \alpha_i)$$

comme aucun des α_i n'est nuls, on en déduit que f annule un polynôme scindé à racines simples.
contre-exemple : Soit f l'endomorphisme canoniquement associé dans $\mathbb{C}^2$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors f n'est pas diagonalisable (sinon $A = 0$ car $Sp(A) = \{0\}$), mais $f^2 = 0$ est diagonalisable.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$). Alors $f^2 = -I_2$ est diagonalisable, mais pas f puisque $\chi_f = X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie tel que $af^2+bf+cId=0$ où 0 est l'endomorphisme nul et a, b et c sont trois réels, avec a non nul. On note :

$$\Delta = b^2-4ac.$$

1. Montrer que si c est non nul alors f est bijective.
2. Montrer que si λ est valeur propre de f alors λ est solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$.
3. Que peut-on en déduire si $\Delta<0$?
4. On suppose que $\Delta>0$ et $c\neq 0$.
   On note λ_1 et λ_2 les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$. Montrer que :
   $$\ker(f-\lambda_1 Id)\oplus\ker(f-\lambda_2 Id)=E$$
   En déduire que f est diagonalisable.
5. En déduire que si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\Delta<0$ alors f est diagonalisable.
6. Que peut-on dire si $\Delta=0$?

---

correction :

1. si c est non nul alors $af^2+bf+cId=0$ s'écrit :
$$\begin{aligned} Id &= \left(\frac{1}{c}(af+bId)\right)\circ f \\ &= f\circ\left(\frac{1}{c}(af+bId)\right)\end{aligned}$$
2. C'est du cours (les valeurs propres sont à chercher parmi les racines du polynôme annulateur.
3. Si $\Delta<0$, alors il n'y a pas de valeurs propres réelles.
4. Considérons $x\in\ker(f-\lambda_1 Id)\cap\ker(f-\lambda_2 Id)$, on a alors : $f(x)=\lambda_1 x=\lambda_2 x$, comme $\lambda_1\neq\lambda_2$, on en déduit que $x=0$.
   D'où la somme directe.
   Soit $x\in E$, on cherche $(u,v)\in\ker(f-\lambda_1 Id)\times\ker(f-\lambda_2 Id)$ tel que $x=u+v$, cela donne :
$$\begin{aligned} x &= u+v \\ f(x) &= \lambda_1 u+\lambda_2 v \\ f^2(x) &= \lambda_1^2 u+\lambda_2^2 v\end{aligned}$$
   REM : λ_1 et λ_2 sont non nuls !
   avec les deux premières lignes, on obtient les valeurs de u et v (la troisième servira plus tard) :
$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(f(x)-\lambda_1 x) \\ u &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(f(x)-\lambda_2 x)\end{aligned}$$
   Pour la synthèse :$x=u+v$ est clair,
$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(f^2(x)-\lambda_1 f(x)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(-\frac{b}{a}f(x)-\frac{c}{a}x-\lambda_1 f(x)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left((\lambda_2+\lambda_1)f(x)-\lambda_2\lambda_1 x-\lambda_1 f(x)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_2 f(x)-\lambda_2\lambda_1 x) \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(f(x)-\lambda_1 x) \\ &= \lambda_2 v\end{aligned}$$
   idem pour u.

Ainsi :

$$\ker(f-\lambda_1 Id)\oplus\ker(f-\lambda_2 Id)=E$$

Si aucun des espaces $\ker(f-\lambda_1 Id)$ et $\ker(f-\lambda_2 Id)$ est réduit au vecteur nul, alors on a obtenu une décomposition en sous-espace propre donc f est diagonalisable. Si $\ker(f-\lambda_1 Id)$ est réduit au vecteur nul alors $f=\lambda_2 Id$, et donc f est diagonalisable. **REM :** il doit être clair que λ_1 peut ne pas être valeur propre !

5. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\Delta<0$ alors on peut reprendre le même raisonnement car l'équation a deux racines distinctes.
6. Il n'y a aucun résultat si $\Delta=0$. Faire des contre exemples avec $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

Exercice 7 Soit la matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j}=1$ pour tout couple (i,j).

Diagonaliser M.

Correction : Le rang est 1, donc la polynôme caractéristique s'écrit : $\chi_M=X^{n-1}(X-\alpha)$.

L'autre valeur propre est n, on peut le voir en considérant $X=(1,1,\dots,1)$, qui est vecteur propre associé à n, ou par la trace.

La matrice est donc diagonalisable.

Pour une base du sous-espace propre associé à 0, on peut prendre :

$$\begin{matrix}(1,-1,0,\dots,0)\\(1,0,-1,0,\dots,0)\\(1,0,0,-1,\dots,0)\\\vdots\\(1,0,\dots,0,-1)\end{matrix}$$

Exercice 8 Donner les éléments propres de la matrice $A=(a_{i,j})$ vérifiant :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\forall j\in[\![1,n]\!],\ a_{i,j}=ij.$$

Donner P et D telle que $A=PDP^{-1}$.

Correction : La matrice A est de rang 1 , donc $X^{n-1}|\chi_A$.

On écrit alors : $\chi_A=X^{n-1}(X-\alpha_n)$.

L'étude de la trace donne $\alpha_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a donc :

$$Sp(A)=\left\{0,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

on voit déjà que A est diagonalisatble.

On voit que les $n-1$ vecteurs :

$$(2,-1,0\dots,0),\quad(3,0,-1,0,\dots,0),\quad(4,0,0,-1,0,\dots,0),\quad(n,0\dots,0,-1)$$

forment une base de $E_0=\ker(A)$.

On peut voir que le vecteur $(1,2,\dots,n)$ forme une base de E_{α_n}. D'où P et D. Pour cela, on peut résoudre : $AX=\alpha_n X$ et deviner la solution ou écrire :

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\end{pmatrix}$$

et donc :

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}}_{=\alpha_n\in\mathbb{R}}$$

$$=\alpha_n\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}$$

Exercice 9 Soit la matrice $M=(m_{ij})$ définie par $m_{i,j}=1$ si $j=1, j=i$ ou $j=n$, $m_{i,j}=0$ sinon.

Donner les éléments propres de M.

Correction :

On calcule

En étudiant la matrice, on voit que 0 et 1 sont valeurs propres.

Le rang est $n-1$. De plus, on a $C_1=C_n$, donc $(1,0,\dots,0,-1)$ est une base du noyau.

On calcule $M-I_n$, on contate que $rg(M-I_n)=2$, et que la matrice contient $n-2$ colonne nulle, ainsi : $(e_2,\dots,e_{n-1})$ est une base de E_1.

Avec la trace, cela donne : $\chi_M=X(X-1)^{n-2}(X-2)$. donc M diagonalisable. Il faut enfin écrire $M-2I_n$ et constater que l'on a la relation : $C_1+2c_2+\cdots+2C_{n-1}+C_n=0$.

Cela donne : $M=PDP^{-1}$ avec :

$$D=\begin{pmatrix}0&&&&\\&2&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}1&1&&&\\0&2&1&&\\\vdots&2&&1&\\\vdots&\vdots&&&\ddots\\0&2&&&1\\-1&1&&&\end{pmatrix}$$

Exercice 10 Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2+M+4I_n=0$.

Calculer le déterminant et la trace de M.

Correction : L'idée est de chercher le polynôme caractéristique. Le polynôme X^2+X+4 annule M, donc les valeurs propres sont racines de ce polynôme.

On trouve facilement les solutions :

$$\Delta=1-16=-15\qquad\alpha=\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}\qquad\overline{\alpha}=\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$$

On a donc $Sp(M)\subset\{\alpha,\overline{\alpha}\}$.

Considérons le polynôme caractéristique χ_M.

On sait que $\chi_M\in\mathbb{R}[X]$ et qu'il est de degré n et que ses racines sont le spectre de M, donc ces racines sont α et/ou $\overline{\alpha}$. On va montrer que les deux sont racines et qu'elles ont le même ordre.

La théorème de d'Alembert-Gauss indique alors que χ_M a donc une racine dans $\mathbb{C}$ notée β. On a donc $\beta=\alpha$ ou $\beta=\overline{\alpha}$ Comme χ_M est réel, on sait que β et $\overline{\beta}$ sont racines du même ordre. Ainsi, α et $\overline{\alpha}$ sont racine et elles ont le même ordre noté m.

Comme χ_M n'a pas d'autres racines et qu'il est unitaire, il s'écrit :

$$\chi_M=(X-\alpha)^m(X-\overline{\alpha})^m$$

Il reste à faire le lien coefficients / racines :

$$\chi_M = X^n - m(\alpha+\overline{\alpha})X^{n-1} + \cdots + (-1)^n(\alpha\overline{\alpha})^m$$

car $m(\alpha+\overline{\alpha})$ est la somme des racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) et $(\alpha\overline{\alpha})^m$ est le produit des racines (idem).

Donc $n = 2m$ et en particulier n est pair. Puis la trace de M est $\frac{n}{2}(\alpha+\overline{\alpha}) = -\frac{n}{2}$ et le déterminant de M est $(\alpha\overline{\alpha})^{\frac{n}{2}} = 2^n$.

✯ Applications de la réduction à l'algèbre linéaire

Quelques applications de la réduction :

- calcul de A^n,
- dire si deux matrices sont semblables,
- résoudre des équations matricielles.

Exercice 11 Un résultat important

Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension n ($n > 1$) possédant n valeurs propres distinctes et g un endomorphisme qui commute avec f.

Montrer que g est diagonalisable.

Commentaire : c'est un exemple de réduction simultanée : on réduit deux matrices en même temps.

Correction : Comme f a n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1.

On peut donc écrire :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}$$

On considère aussi une base $\mathscr{B}$ de E :

$$\mathscr{B} = (x_1, \ldots x_n) \text{ avec } x_i \text{ base de } E_{\lambda_i}$$

Comme e et g commutent, les E_{λ_i} sont stable par g, et donc les vecteurs (x_i) sont aussi vecteurs propres de g. En conséquence g est diagonalisable.

REM : plus précisément, la base $\mathscr{B}$ diagonalise les endomorphismes f et g en même temps. notons qu'elle diagonalise aussi $f \circ g$.

Exercice 12 Montrer que deux matrices sont semblables

Les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Correction : Réduire les deux matrices. Vérifier $\chi_A = \chi_B$. Regarder les dimensions des sous-espaces propres.

Rappels : si A et B sont semblables alors elles ont :

- Même déterminant même trace,
- même polynôme caractéristique,
- Même spectre et pour chaque valeur propre même ordre algébrique,
- Pour chaque valeur propre même ordre géométrique.
- Si l'une est diagonalisable alors l'autre l'est.
- Si les deux sont diagonalisables, alors elles se réduisent en la même matrice.

Ici :

$$\chi_A = \chi_B = (X-2)^2(X-1)$$

On calcule :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ de rang 2}$$

On fait de même :

$$B-2I_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&-2\\0&1&1\end{pmatrix} \text{ de rang 1}$$

A n'est pas diagonalisable, tandis que B l'est. Donc A et B ne sont pas semblables.

Exercice 13 Résolution d'équations matricielles

1. Diagonaliser la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
2. On cherche à résoudre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2+X=A$ d'inconnue $X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si X est une solution alors X et A ont les mêmes vecteurs propres. Préciser alors une matrice P qui les diagonalise simultanément.
   (b) Poser $Y=P^{-1}XP$ et résoudre l'équation proposée.

1. On obtient :

$$\chi_A=X(X-2)\qquad P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$$

on inverse P :

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

2. On voit que X et A commutent, donc les sous-espace propre de A sont stable par X. Si on note $e_1=(1,-1)$, alors $E_0=\text{Vect}(e_1)$ est stable par X. Donc e_1 est aussi vecteur propre de X. idem, on note $e_2=(1,1)$, alors $E_2=\text{Vect}(e_2)$ est stable par X. Donc e_2 est aussi vecteur propre de X.
   Ainsi, la matrice P les diagonalise simultanément.
   On note alors Y telle que $X=PYP^{-1}$, Y est diagonale, on peut donc écrire : $Y=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ puis on résout l'équation :
   qui s'écrit $Y^2+Y=D$, ce qui donne $a^2+a=0$ donc $a=0$ ou $a=-1$. et $b^2+b=2$, ce qui donne $b=1$ ou $b=-2$.
   On a donc 4 solutions candidates pour Y :

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

   Réciproquement, chacune de ses matrices vérifient bien $Y^2+Y=D$.
   On a donc 4 solutions X à l'équation (multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1}).

Exercice 14 Résolution d'équations matricielles

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

1. Montrer que A est trigonalisable mais non diagonalisable et donner une base qui trigonalise A.
2. Montrer que si $M^2=A$ alors les valeurs propres de M sont parmi 0, 1 et -1.
   Trouver toutes les matrices $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2=A$.

Correction :

1. On trouve $\chi_A=(X-1)^2X$, on a $\dim(E_1)=1$, donc la matrice A n'est pas diagonalisable mais elle est triagonalisable.
   Méthode 1 : Pour trouver une base qui trigonalise A, on cherche (e_1,e_2,e_3) qui forment une base telle que :

$$Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(f)=\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \alpha\in\mathbb{R} \text{ à déterminer}$$

   (f est l'endomorphisme canoniquement associé à A).
   On procède ainsi :

- On cherche déjà un vecteur e_1 non nul dans E_1. En regardant

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  on voit que l'on peut prendre $e_1 = (0,1,0)$.
- On cherche ensuite un vecteur $e_3$dans E_0 (ie dans le noyau). On voit la relation dans A : $C_1 - 2C_2 = 0$. On prend alors $e_3 = (1,-2,0)$.
- Pour e_2, on doit trouver un vecteur e_2 et un $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que : $Ae_2 = e_2 + \alpha e_1$. On cherche donc une solution du système : $(A - I_3)e_2 = \alpha e_1$. Qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} e_2 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  On trouve facilement une solution : $\alpha = 2$ et $e_2 = (1,0,1)$.

On a donc bien les relations :

$$f(e_1) = e_1, \qquad f(e_2) = e_2 + 2e_1, \qquad f(e_3) = 0$$

Ainsi :

$$Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$A = PUP^{-1} \quad \text{avec :} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : On construit $e_1 = (0,1,0)$ et $e_3 = (1,-2,0)$ comme ci-dessus on voit que (e_1, e_3) est nécessairement libre (les vecteurs vivent dans des espaces dans des espaces différents). Or on veut que (e_1, e_2, e_3) soit une base. On pose donc $e_2 = (0,0,1)$, pour compléter avec un vecteur de la base canonique pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$.
On vérifie que

$$\begin{aligned} u(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2e_1 + e_3 + e_2 \end{aligned}$$

On a donc les relations :

$$f(e_1) = e_1, \qquad f(e_3) = 0, \qquad f(e_2) = 2e_1 + e_3 + e_2$$

On prend donc la base (e_1, e_3, e_2) (attention à l'ordre) et on a :

$$Mat_{(e_1,e_3,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$A = PUP^{-1} \quad \text{avec :} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R Le programme n'indique qu'aucune méthode de trigonalisation n'est à connaître, mais vous devez être capable de proposer des idées.

2. Soit M telle que $M^2 = A$. Soit λ une valeur propre de M. On sait alors qu'il existe X non nul, tel que $MX = \lambda X$. On a alors : $M^2X = \lambda^2 X = AX$, donc λ^2 est valeur propre de A, donc $\lambda^2 = 0$ ou 1 et donc $Sp(M) \subset \{0, 1, -1\}$.
Soit M solution. Alors déjà $MA = AM$, ie A et M commutent.
Avec la méthode 1 : On note encore (e_1, e_2, e_3) la base obtenue précédemment (avec la méthode 1).
Comme A et M commutent, Vect(e_1) est stable par M, donc e_1 est aussi vecteur propre de M. La valeur propre de M associé à e_1 noté λ vérifie d'après le calcul précédent : $\lambda^2 = 1$, donc $\lambda = 1$ ou -1. Donc $Me_1 = e_1$ ou $Me_1 = -e_1$.
e_3 est aussi vecteur propre et on vérifie qu'il est associé à 0.
On obtient ainsi la forme de :

$$M = P \begin{pmatrix} s & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } s = \pm 1$$

comme on sait que M est solution, on calcule et on remplace :

$$M^2 = P \begin{pmatrix} 1 & sa+ab & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & cb & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

D'où : $b^2 = 1$ et donc $b = \pm 1$ et $c = 0$. Il reste à déterminer a.
- Si $b = 1$ et $s = 1$, alors $2a = 2$ et $a = 1$,
- si $b = 1$ et $s = -1$, alors on a une contradiction.
- Idem si $b = -1$ et $s = 1$.
- Enfin, si $b = -1$ et $s = -1$, alors $a = -1$

D'où nos deux solutions candidates :

$$M = PT_1P^{-1} \text{ et } M = PT_2P^{-1} \text{ avec } T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier (rapidement) que ces deux matrices sont bien solutions. Comme $T_2 = -T_1$, il suffit donc de vérifier que $T_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Avec la méthode 2 : On note (e_1, e_3, e_2), la base obtenue précédemment (attention à l'ordre et e_2 n'est plus le même vecteur, la matrice P est aussi différente). On utilise alors le même argument pour avoir la forme de M : e_1 est vecteur propre associé à ± 1 et e_3 est dans le noyau. Ainsi, la forme de M est :

$$M = P \begin{pmatrix} s & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } s = \pm 1$$

On calcule alors M^2 :

$$M^2 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & sa+ac \\ 0 & 0 & bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

d'où les relations :

$$\begin{cases} c^2 = 1 \\ bc = 1 \\ sa + ac = 2 \end{cases}$$

d'où $c = \pm 1$ et $b = c$.
- Si $s = 1$ et $c = 1$, alors $a = 1$
- Si $s = 1$ et $c = -1$, alors on a une contradictoin
- Si $s = -1$ et $c = 1$, alors on a une contradictoin
- Si $s = -1$ et $c = -1$, alors $a = -1$.

D'où deux solutions candidates :

$$M = PT_1P^{-1} \text{ et } M = PT_2P^{-1} \text{ avec } T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il faut ensuite vérifier (idem avec $T_2 = -T_1$).

Exercice 15 Calcul de puissance et de commutant d'une matrice 3×3 par trigonalisation

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f n'est pas diagonalisable.
2. Construire une base (e_1, e_2, e_3) de E telle que la matrice M de f dans cette base (e_1, e_2, e_3) est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Calculer M^n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$
4. Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Correction :

1. On voit facilement que :

$$\chi_A = (X-1)(X-2)^2$$

on calcule donc le rang de $A - 2I3$:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2 donc la dimension du sous espace propre est 1 et donc l'ordre géométrique est différent de l'ordre algébrique.

2. On peut prendre :

$$e_1 = (0,1,0), \quad e_2 = (1,1,1)$$

on cherche donc e_3 tel que : $(f - 2Id)e_3 = e_2$. On peut prendre $e_3 = (0,0,-1)$ ainsi : $f(e_3) = 2e_3 + e_2$
La matrice M est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. On peut écrire :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$$

puis appliquer Newton. (bien vérifier avant que D et N commutent !).
On calcule alors M^n,
De plus, on a la relation :

$$A = PMP^{-1}$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne A^n.

4. On cherche B telle que $BA = AB$. On voit alors que : $\ker(A - I_3)$ est stable par B, comme c'est une droite, on en déduit que e_1 est vecteur propre. D'autre part $\ker(A - 2I_E)$ est aussi stable par B. Ainsi, B s'écrit $B = PM'P^{-1}$ avec :

$$M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$$

La relattion $AB = BA$ donne : $M'M = MM'$ et donc :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$$

on voit alors que a est quelconque et on obtient les relations sur (b,c,d,e).

Exercice 16 Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A.
2. Trouver le commutant de A, c'est à dire :

$$\left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \middle| AM = MA \right\}$$

3. Résoudre $M^2 = A$.
4. Donner un polynôme annulateur de f de plus petit degré possible.
5. Calculer A^n par deux méthodes.

Correction :

1. On calcule facilement :

$$\chi_A = (X-1)^2(X-4)$$

puis :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

on voit donc que $rg(A - I_3) = 1$, donc $\dim(E_1) = 2$ et A est diagonalisable. En étudiant les relations sur les colonnes, on obtient facilement :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

2. Soit $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = XA$.On note g l'endomorphisme canoniquement associé. Alors E_1 et E_4 sont stables par g.
Donc :

$$M = P \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} P^{-1}$$

On vérifie que toute matrice de cette forme vérifie $AX = XA$.
3. Soit M telle que $M^2 = A$, alors en particulier M et A commutent. Ainsi, M s'écrit :

$$M = P \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} P^{-1}$$

comme $M^2 = A$, on a : $e^2 = 4$ et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On est donc ramené à l'équation $Y^2 = I_2$ d'inconnue $Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Pour une telle matrice, on a $Y^2 - I_2 = 0$, donc Y annule $(X-1)(X+1)$ donc est diagonalisable. et s'écrit : $Y = Q\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$ avec Q inversible. Si 1 est la seule valeur propre alors $Y = I_2$, idem si -1 est la seule valeur propre. Si c'est $+1$ et -1 qui sont valeurs propres, alors on se ramène en changeant l'ordre des colonnes dans Q à $(-1,+1)$. Cela donne :

$$Y = I_2 \text{ ou } Y = -I_2 \text{ ou } Y = Q\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

On en déduit la forme des solutions.
Autre méthode : pour la partie $Y^2 = I_2$, on peut constater que $\det(Y) = \pm 1$ et que l'équation est équivalente à $Y = Y^{-1}$.
Si $\det(Y) = 1$, alors en écrivant $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la relation $Y = Y^{-1}$ donne (avec l'expression de l'inverse d'une matrice 2×2) :

$$a = d, \qquad c = 0, \qquad d = 0$$

comme $\det(Y) = 1$, cela donne $a = \pm 1$ et donc $Y = I_2$ ou $Y = -I_2$.
Si $\det(Y) = -1$, alors avec les mêmes notations, on a $d = -a$. et la relation $-a^2 - cb = -1$
d'où $a = \pm\sqrt{cb-1}$. D'où les solutions :

$$Y = \begin{pmatrix} \sqrt{cb-1} & b \\ c & -\sqrt{cb-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{cb-1} & b \\ c & \sqrt{cb-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } cb \leqslant 1$$

4. Le polynôme minimal est $(X-1)(X-4)$: il annule A et tout polynôme non nul qui annule A a 1 et 4 pour racine.
5. On peut écrire avec la réduction :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

sinon avec le polynôme annulateur, on démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$$

(on utilise le fait que $A^2 - 5X + 4I_3 = 0$). On a facilement une relation de récurrence linéaire (croisée) entre α_n et β_n puis les suites (α_n) et (β_n) sont récurrentes linéaires d'ordre 2.
On peut aussi faire la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-4)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, X^n = Q(X-1)(X-4) + a_n X + b_n$$

avec les relation : $\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 4a_n + b_n = 4^n \end{cases}$ on trouve alors (a_n, b_n), puis :

$$A^n = a_n A + b_n$$

⋆ Théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 17 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$.
On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$. Montrer que $f^n = 0$.

Correction : 0 est la seule valeur propre de f, donc $\chi_n = X^n$ donc $f^n = 0$

Exercice 18 Soit A une matrice carré d'ordre n inversible. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Correction : On écrit $\chi_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on sait $a_0 \neq 0$.
On écrit :

$$I_n = A\left(\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k A^{k-1}\right)$$

d'où le résultat : $A^{-1} = \frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k A^{k-1}$

Exercice 19 $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ n'ayant aucune valeur propre commune. On note χ_A le polynôme caractéristique de A.

1. Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $AX = XB$ si et seulement si X est la matrice nulle.

Correction :

1. On écrit :

   $$\chi_A = (X-\lambda_1)^{m_1} \dots (X-\lambda_p)^{m_p} \text{ car } \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{C}.$$

   d'où :

   $$\chi_A(B) = (B-\lambda_1 I_n)^{m_1} \dots (B-\lambda_p I_n)^{m_p}$$

   produit de matrice inversibles.
2. Soit X solution.
   On vérifie $AX = XB$, puis par récurrence, on vérifie $\forall \in \mathbb{N}$, $A^n X = XB^n$, et donc par linéarité :

   $$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(A)X = XP(B)$$

   On remplace P par χ_A.

✯ Exercices de concours

Exercice 20 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice.

1. On pose $g = f - 9\text{Id}$. Déterminer les matrice de g^2 et de g^3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. L'endomorphisme f est-elle diagonalisable ?
3. Justifier l'existence d'un vecteur u_3 tel que $g^2(u_3) \neq 0$. Montrer que $\left(g^2(u_3), g(u_3), u_3\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. En déduire que A est trigonalisable en donnant une matrice triangulaire qui lui est semblable.

Correction :

1. On vérifie avec le calcul matriciel que :

   $$(A-9I_3) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad (A-9I_3)^2 = 9\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   et $(A-9I_3)^3$ est la matrice nulle.
2. 9 est valeur propre.
   On peut donc écrire : $\chi_A = (X-9)\left(X^2 - \alpha X + \beta\right)$, on détermine α et β avec la trace et le déterminant.
   On peut aussi faire (c'est pareil) : le spectre dans $\mathbb{C}$ est $\{9, \alpha, \beta\}$ $Tr(A) = 9+\alpha+\beta = 27$ $\det(A) = 9\alpha\beta = 729$. d'où $\alpha = \beta = 9$ et $\chi_A = (X-9)^3$.
   On voit que A n'est pas $9I_3$ donc A n'est pas diagonalisable.
   On peut aussi écrire : $(X-9)^3$ annule f, donc $Sp(f) = \{9\}$. Si f est diagonalisable, alors $f = 9Id$, ce qui n'est pas le cas. ainsi, f n'est pas diagonalisable.
3. $g^2 \neq 0$ donc il existe un vecteur u_3 tel que $g^2(u_3) = 0$. On part de $\alpha u_3 + \beta g(u_3) + \gamma g^2(u_3) = 0$ on applique g^2 pour avoir $\alpha = 0$ puis pas g pour avoir $\beta = 0$ et enfin $\gamma = 0$.
   Famille lire de 3 vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. A est triagonalisable car χ_A est scindé. La matrice de g dans la base est :

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   d'où A est semblable à :

   $$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f\circ(f^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=(f^2+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\circ f=f^3+f=0$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3=\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.
2. (a) Montrer que si λ est valeur propre de f, alors $\lambda^3+\lambda=0$. En déduire la seule valeur propre réelle de f.
   (b) En considérant le degré du polynôme caractéristique de f, expliquer pourquoi f admet effectivement au moins une racine réelle. Conclure sur $Sp(f)$.
3. Montrer que l'on peut trouver une base dans laquelle f a pour matrice $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$

Correction :

1. intersection vide : soit $y\in\mathrm{Im}(f)\cap\ker(f)$. On écrit : $y=f(x)$ et $f(y)=0$ On obtient $f^3(x)=0$ donc $f(x)=y=0$.
   On peut ensuite utiliser l'égalité des dimensions, ou écrire pour $x\in\mathbb{R}^3$:
   $$x=\big(x+f^2(x)\big)-f^2(x)$$
2. (a) X^3+X annule f donc les valeurs propres vérifient $\lambda^3+\lambda=0$. Ainsi, la seule valeur propre réelle est $\lambda=0$.
   (b) χ_f est de degré 3 donc admet une valeur propre réelle, ainsi $Sp(f)=\{0\}$ (spectre dans $\mathbb{R}$).
3. Faire une analyse rapide pour voir que nécessairement e_1 est dans le noyau, e_2 dans $\ker(f^2+Id)$ et $e_3=-f(e_2)$.
   f^2+Id n'est pas inversible.
   On choisit alors un vecteur e_2 non nul dans $\ker(f^2+Id)$, et on pose $e_3=-f(e_2)$.
   Et on prend e_1 non nul dans le noyau de f.
   On vérifie rapidement que $f(e_3)=e_2$. En particulier $e_3\neq 0$.
   Il reste à vérifier que (e_1,e_2,e_3) est une base. Pour cela, on forme l'équation :
   $$\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3=0$$
   ce qui donne :
   $$\gamma e_2-\beta e_3=0 \text{ on applique } f$$
   $$-\beta e_2-\gamma e_3=0 \text{ on applique } f^2$$
   ainsi $\alpha=0$, puis en faisant : $\beta l_2-\gamma l_1$, on a : $(\beta^2+\gamma^2)e_3=0$ d'où $\alpha=\beta=\gamma=0$.
   ainsi, (e_1,e_2,e_3) est une base et la matrice de f dans cette base est A.

Exercice 22 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit f un endomorphisme tel que $f^3=f$. Montrer que f est diagonalisable.
2. Soit f un endomorphisme tel que $f^4=f^2$.
   Montrer que si f est diagonalisable alors $f^3=f$.
3. Soit f un endomorphisme tel que $f^2+f+Id=0$.
   Calculer $\det(f)$ et $tr(f)$. Donner le polynôme caractéristique de f. Montrer que n est pair.
4. Soit f un endomorphisme tel que $f^3+f^2+f=0$.
   Montrer que $\mathrm{Im}(f)\oplus\ker(f)=E$. Montrer que $rg(f)$ est pair.

Correction :

1. On a f annule $X^3-X=X(X^2-1)=X(X+1)(X-1)$ scindé à racines simples donc f est diagonalisable.
2. On suppose donc $f^4=f^2$ et f diagonalisable.
   On a que f annule $X^4-X^2=X^2(X-1)(X+1)$.
   Donc $Sp(f)\subset\{0,1,-1\}$.
   Comme f est diagonalisable, f annule $Q=\prod_{\lambda\in Sp(f)}(X-\lambda)$. Ce polynôme Q vérifie : $Q|X(X+1)(X-1)$, et donc
   Ainsi, f annule $X^3-X=X(X+1)(X-1)$
3. On voit que f annule $X^2+X+1=(X-j)\left(X-\overline{j}\right)$.
   Son spectre complexe est donc inclus dans $\{j,\overline{j}\}$, qui sont donc les seules racines de χ_f.
   Mais comme on se place sur $\mathbb{R}$, le polynôme χ_f est réel et les ordres de multiplicité algébrique de j et de $\overline{j}$ sont les mêmes. Ainsi :
   $$\begin{aligned}\chi_f&=(X-j)^{\frac{n}{2}}\left(X-\overline{j}\right)^{\frac{n}{2}}\\&=\left(X^2+X+1\right)^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

ce qui prouve que n est pair. On a aussi :

$$\det(f) = j^{\frac{n}{2}}\bar{j}^{\frac{n}{2}} = 1$$
$$tr(f) = \frac{n}{2}j + \frac{n}{2}\bar{j} = -\frac{n}{4}$$

4. f annule $X^3+X^2+X = X\left(X^2+X+1\right) = X\left(X-j\right)\left(X-\bar{j}\right)$.
On vérifie que $\ker(f)\cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit $y \in \ker(f)\cap \mathrm{Im}(f)$, on a donc y s'écrit $y = f(x)$ et $f(y) = 0$. Ainsi :

$$\text{d'une part : } \left(f^3+f^2+f\right)(x) = f(x) = y \text{ d'autre part : } \left(f^3+f^2+f\right)(x) = 0$$

donc $y = 0$. On en déduit : $\ker(f)\cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et la somme est directe.
Comme on a les bonnes dimensions : $\ker(f)\oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
On a : $Sp(f) \subset \{0, j, \bar{j}\}$. Comme l'endomorphisme est réel, on se place sur $\mathbb{R}$, l'ordre algébrique de j noté m_j est aussi l'ordre algébrique de $\bar{j}$.

$$\chi_f = X^{n-2m_j}\left(X-j\right)^{m_j}\left(X-\bar{j}\right)^{m_j} = X^{n-2m_j}\left(X^2+X+1\right)^{m_j}$$

On considère maintenant l'endomorphisme comme un endomorphisme complexe. Il est alors diagonalisable (puisqu'il annule un polynôme scindé à racines simples). La dimension de son noyau est donc $n-2m_j$, mais c'est aussi la dimension du noyau de f vu comme un endomorphisme réel. On en déduit $rg(f) = n-(n-2m_j) = 2m_j$

Exercice 23 Soit les endomorphismes :

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (XP)' \end{array}\right. \qquad g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (XP)'' \end{array}\right.$$

1. Soit P un polynôme non nul.
Déterminer $\deg(f(P))$ et $\deg(g(P))$ en fonction de $\deg(P)$.
2. Montrer que g est nilpotent.
3. Montrer que f est diagonalisable et déterminer son spectre.
4. Soit maintenant un autre polynôme A, que l'on notera $A = \sum_{k=0}^{r} a_k K^k$.
On considère maintenant :

$$F : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (AP)' \end{array}\right. \qquad G : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (AP)'' \end{array}\right.$$

Les résultats précédents restent-ils vrais ?

Correction :

1. On écrit $P = \alpha_n x^n + \ldots$ avec $\alpha_n \neq 0$ On a alors :

$$XP = \alpha_n x^{n+1} + \ldots$$
$$(XP)' = (n+1)\alpha_n X^n + \ldots$$
$$(XP)'' = (n+1)n\alpha_n X^{n-1} + \ldots$$

comme $(n+1)\alpha_n \neq 0$, on a $\deg(f(P)) = \deg(P)$ et de même $\deg(g(P)) = \deg(P)-1$.
REM : si $\deg(P) = 0$, alors $g(P) = 0$ et $\deg(g(P)) = -\infty$.
2. Avec l'étude précédente, on a donc

$$\deg\left(g^2(P)\right) = \deg(P)-2$$
$$\deg\left(g^3(P)\right) = \deg(P)-3$$

Ainsi, $\deg\left(g^{n+1}(P)\right) = -\infty$. Ainsi, $g^{n-1} = 0$.
3. Calculons $f\left(X^k\right)$ pour $k \in ii0n$.

$$f\left(X^k\right) = (k+1)X^k$$

Ainsi, X^k est vecteur propre associé à la valeur propre $k+1$.
On en déduit que $Sp(f) = \{1, \ldots, n+1\}$.
f a n valeurs propres donc elle est diagnonalisale. On a même : f diagonalise la base canonique.

4. On regarde les degrés :

$$\begin{aligned} P &= \alpha_n X^n + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \\ PA &= \alpha_n a_r X^{n+r} + \dots \\ F(P) = (PA)'' &= \alpha_n (n+r)(n+r-1) a_r X^{n+r-1} + \dots \end{aligned}$$

Déjà, si $r \neq 1$

Exercice 24

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est diagonalisable.

2. Soit f un endomophisme d'un espace vectoriel E de dimension n admettant $(X-4)(X-1)^2$ comme polynôme annulateur.
Montrer que si f est diagonalisable alors $(X-4)(X-1)$ est annulateur de f.

3. Soit f un endomophisme d'un espace vectoriel E de dimension n admettant $(X-4)(X-1)^2$ comme polynôme annulateur.
On suppose que f n'est pas diagonalisable.
   (a) Vérifier que $(X-1)^2 - (X-4)(X+2) = 9$.
   (b) En déduire que $\ker(f-4Id) \oplus \ker\left((f-Id)^2\right) = E$.
   (c) En déduire que $\ker(f-Id) \subset \ker\left((f-Id)^2\right)$ et $\ker(f-Id) \neq \ker\left((f-Id)^2\right)$.
   (d) On suppose que $Sp(f) = \{1,4\}$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et 3 entiers naturels (r,s,t) non nuls tels que $r+s+t = n$ et

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_s & A \\ 0 & 0 & I_t \end{pmatrix} \text{ où } A \in \mathscr{M}_{s,t}(\mathbb{R})$$

Correction :

1. On a $Rg(A-I_3) = 1$ donc 1 est valeur propre d'ordre géométrique 2. La trace fait 6, donc l'autre valeur propre est 4.
Au final :

$$\chi_A = (X-1)^2(X-4) \qquad m_1 = \dim(E_1) = 2 \quad m_4 = \dim(E_4) = 1$$

D'où A est diagonalisable.

2. Supposons donc f diagonalisable. Comme f annule $(X-1)^2(X-4)$ son spectre est inclus dans $\{1,4\}$. Comme f est diagonalisable, son spectre est non vide.
Si $Sp(f) = \{1\}$ alors $f = I_d$ et donc annule $(X-1)(X-4)$. Si $Sp(f) = \{4\}$ alors $f = 4I_d$ et donc annule $(X-1)(X-4)$.
Si $Sp(f) = \{1,4\}$ alors f annule $(X-1)(X-4)$ (ie $\prod_{\lambda \in Sp(f)} (X-\lambda)$).

3. (a) Simple calcul (NB : c'est une relation de Bezout sur les polynôme, et cela s'obtient par division euclidienne successive algo d'Euclide).
   (b) Déjà soit $x \in \ker(f-4Id) \cap \ker(f-Id)$ alors :

$$(f-Id)^2(x) = 0 \text{ et } (f-4Id)(f-2Id)(x) = 0 \text{ donc } 9x = 0 \text{ puis } x = 0$$

Soit maintenant $x \in E$, on écrit :

$$9x = 9Id(x) = (f-Id)^2(x) - (f-4Id)(f+2Id)(x)$$

Ainsi :

$$x = (f-Id)^2\left(\frac{x}{9}\right) - (f-4Id)(f+2Id)\left(\frac{x}{9}\right)$$

Or :

$$(f-Id)^2\left(\frac{x}{9}\right) \in \ker(f-4Id) \text{ puisque } f \text{ annule } (X-4)^2(X-1)$$

$$(f-4Id)(f+2Id)\left(\frac{x}{9}\right) \in \ker(f-Id)^2 \text{ idem}$$

(c) La relation : $\ker(f-Id) \subset \ker\left((f-Id)^2\right)$ est claire.
Supposons par l'absurde : $\ker(f-Id) = \ker\left((f-Id)^2\right)$. On aurai alors

$$\ker(f-4Id) \oplus \ker(f-Id)) = E$$

et l'espace E serait somme directe de sous-espace propre donc f serait diagonalisable.

(d) On note : $r = \dim(\ker(f-4Id)) = \dim(E_4)$. On construit alors $(e_1,\dots,e_r)$ base de E_4. On a bien pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $f(e_i) = 4e_i$. $s = \dim(\ker(f-Id)) = \dim(E_1)$, On construit alors $(f_1,\dots,f_s)$ base de E_1. On a bien pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $f(f_i) = f_i$.
On considère maintenant H un supplémentaire de E_1 dans $\ker(f-Id)^2$, on note t sa dimension, si bien que :

$$\dim\left(\ker(f-Id)^2\right) = s+t$$

On construit alors $(g_1,\dots,g_t)$ base de H. Considérons $i \in [\![1,t]\!]$, on a alors :

$$g_i \in (f-Id)^2 \text{ donc } (f-Id)(f(g_i)-g_i) = 0$$

Donc $f(g_i)-g_i \in \ker(f-Id) = Vect(f_1,\dots,f_s)$. En prenant pour base de E, $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_r,f_1,\dots,f_s,g_1,\dots g_t)$, on voit que la matrice de f dans cette base a bien la forme demandée.
NB : autre rédaction :

$$\ker(f-4Id) \oplus \ker\left((f-Id)^2\right) = E$$

est une décomposition de E en deux sous-espace stable par f. Si on prend une base adaptée à cette décomposition, alors la matrice de f est diagonale par bloc. En bas à droite de cette matrice, on trouve l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f sur $\ker(f-Id)^2$.

$$\ker(f-Id)^2 = \ker(f-Id) \oplus H$$

est une décomposition de $\ker(f-Id)^2$, avec $\ker(f-Id)$ stable par f (donc par l'endomorphisme $\tilde{f}$) donc la matrice de $\tilde{f}$ dans une base adaptée à cette décomposition est triangulaire par bloc.
Il reste à vérifier que les blocs sur la diagonale sont bien les matrices $4I_r$, I_s et I_t.

Exercice 25

Soit un espace vectoriel E de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E, et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ f(e_i) = e_{i+1}$$

1. Montrer par l'absurde que f n'a pas de polynôme non nul annulateur de degré strictement inférieur à n.
2. En déduire que si f est diagonalisable alors son polynôme caractéristique est scindé à racine simple.
3. On suppose maintenant que $f(e_n) = e_1$. Montrer que $f^n = Id$.
4. Calculer $f\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)$.
5. On suppose que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Que peut-on dire de $Sp(f)$?
6. On suppose que E est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
   (a) Montrer que f est diagonalisable. Donner son spectre.
   (b) Soit k un entier.
   Calculer :
   $$f\left(\sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2ijk\pi}{n}} e_j\right)$$
   (c) Conclure.

Correction :

1. Considérons, par l'absurde, un polynôme P de degré $l < n$ annulateur de f, on peut toujours prendre P unitaire, et on note :

$$P = X^l + a_{l-1}X^{l-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

en appliquant à f, cela donne :

$$f^l + a_{l-1}f^{l-1} + \cdots + a_1 f + a_0 Id = 0$$

on évalue en e_1, ce qui donne :

$$e_{l+1} + a_{l-1}e_l + \cdots + a_1 e_2 + a_0 e_1 = 0$$

Ainsi, la famille $(e_1, \ldots, e_{l+1})$ est liée. Contradiction.

2. Si f est diagonalisable, alors f annule

$$\prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)$$

ce polynôme est alors de degré n et donc f a n valeurs propres distinctes.

3. Il suffit de vérifier que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ f^n(e_i) = e_n$$

ou de faire le calcul matricielement.

4. Clairement :

$$f(e_1 + \cdots + e_n) = e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_1 = e_1 + \cdots + e_n$$

5. Si n est impair, l'équation $X^n = 1$ n'admet que $\{1\}$ comme solution, 1 est bien valeur propre (un vecteur propre associé est $(1,1,\ldots,1)$). C'est la seule.
Si n est pair, l'équation $X^n = 1$ admet deux solutions : $\{1,-1\}$ comme solution. 1 est bien valeur propre. On peut vérifier que -1 est bien valeur propre en calculant :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i e_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i e_i\right) + (-1)^n e_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i e_{i+1} - e_1 \\ &= -\sum_{i=2}^{n}(-1)^i e_i - e_1 \\ &= -\sum_{i=1}^{n}(-1)^i e_i \end{aligned}$$

6. (a) Le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples (ses n racines sont les racines n-ième de l'unité). Ainsi, f est diagonalisable puisqu'il annule un polynôme scindé à racine simple. Avec les premières questions, on en déduit que son polynôme caractéristique est scindé à racines simples, et les valeurs propres sont nécessairement des racines n-ième de l'unité. Ainsi,

$$Sp(f) = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \middle| k \in [\![0,n-1]\!] \right\}$$

Pour faciliter les notations, on note $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ si bien que :

$$Sp(f) = \left\{ \xi^k \middle| k \in [\![0,n-1]\!] \right\}$$

(b) On calcule donc :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2ijk\pi}{n}} e_j\right) &= f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi^{jk} e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \xi^{jk} e_{j+1} + \xi^{nk} e_1 \\ &= e_1 + \xi^{-k} \sum_{j=1}^{n} \xi^{jk} e_j \\ &= \xi^{-k} \sum_{j=1}^{n} \xi^{jk} e_j = \xi^{n-k} \sum_{j=1}^{n} \xi^{jk} e_j \end{aligned}$$

(c) On en déduit que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ ξ^{n-k} est bien valeur propre et qu'un vecteur propre associé est :

$$\left(\xi^k, \xi^{2k}, \ldots, \xi^n\right)$$

On a donc trouvé n valeurs propres distincts, et donc f est diagonalisable. De plus les sous-espaces sont de dimension 1, et on a trouvé une base :

$$x_k = \left(\xi^k, \xi^{2k}, \ldots, \xi^n\right) \text{ base de } E_k(f) \text{ espace propre associé à } \xi^{n-k}$$

avec $(x_1, \ldots, x_n)$ base de E
NB : on va plutôt utiliser les vecteurs propres : $\left(1, \xi^k, \xi^{2k}, \ldots, \xi^{n-1}\right)$ et décomposer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & 0 & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} = VDV^{-1}$$

Avec D la matrice diagonale (avec les puissances décroissantes) :

$$D = \begin{pmatrix} \xi^{n-1} & & & & \\ & \xi^{n-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \xi^2 & \\ & & & & \xi \end{pmatrix}$$

et V une vandermonde :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi & \xi^2 & \xi^3 & \ldots & \xi^{n-1} \\ \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 & \ldots & \xi^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \xi^{n-1} & \xi^{2(n-1)} & \xi^{3(n-1)} & & \xi^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} = V\left(\xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\right)$$

Exercice 26 Soit f l'endomorphisme :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & aM + bM^T \end{array} \right. \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

1. Montrer que f admet un polynôme annulateur de degré 2. En déduire que f est diagonalisable.
2. Déterminer les espaces propres de f.

Exercice 27 Etudier les variations de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f : x \longmapsto x^3 - x - 1$$

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Correction :

La fonction f a la forme usuelle d'une cubique, croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, puis décroissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ puis croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$. On constate que $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$, donc f ne s'annule sur $\mathbb{R}$ qu'en un unique point $\alpha \in [1,2]$.

On en déduit la factorisation de $X^3 - X - 1$ sur $\mathbb{C}$:

$$X^3 - X - 1 = (X - \alpha)(X - \beta)\left(X - \overline{\beta}\right)$$

où $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

On en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (car annule un polynôme scindé à racines simple). Ainsi, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = PDP^{-1} \text{ où } D \text{ est une matrice diagonale}$$

D contient un certain nombre de α, β et $\overline{\beta}$ sur sa diagonale.

On écrit ensuite χ_A, comme c'est un polynôme réel, l'ordre de β et de $\overline{\beta}$ est le même :

$$\chi_A = (X-\alpha)^{n_1}(X-\beta)^{n_2}\left(X-\overline{\beta}\right)^{n_2}$$

Ainsi, D contient n_1 fois α, n_2 fois β et n_2 fois $\overline{\beta}$ sur sa diagonale. Notons que n_1 ou n_2 peut être nul mais que $n_1 + 2n_2 = n$.

Cela donne alors :

$$\det(A) = \alpha^{n_1}\beta^{n_2}\overline{\beta}^{n_2} = \alpha^{n_1}|\beta|^{2n_2} > 0$$

Exercice 28 Soit u un endomorphisme tel que $u \circ P(u) = 0$ où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(0)$ soit non nul.

1. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \ker(P(u))$.
3. On suppose que P n'a pas de racine réelle, en utilisant un endomorphisme induit, montrer que $rg(u)$ est pair.

Correction :

1. En dimension finie, il suffit de montrer que $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$. Soit donc $x \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, ainsi $u(x) = 0$ et $x = u(a)$ pour un certain a. On en déduit que $u^2(a) = 0$, e donc que pour tout $k \geqslant 2$, $u^k(a) = 0$.
   On écrit alors $P = a_0 + \sum_{k=1}^{d} a_k X^k$, avec donc $a_0 \neq 0$. Ainsi, $XP = a_0 X + \sum_{k=1}^{d} a_k X^{k+1}$. en appliquant à u puis à a, cela donne :

   $$(u \circ P(u))(a) = a_0 u(a) = 0$$

   comme $a_0 \neq 0$, cela donne $u(a) = 0$ ie $x = 0$.
   En dimension infinie, il faut en plus faire l'analyse synthèse. Pour cela, on écrit la relation de Bezout : $P - X\sum_{k=1}^{d} a_k X^{k-1} = a_0$ donc pour un $x \in E$ quelconque : :

   $$\begin{aligned} x =& \frac{1}{a_0}(a_0)x \\ =& \frac{1}{a_0}P(u)(x) - \frac{1}{a_0}\left(u \circ \sum_{k=1}^{d} a_k u^{k-1}\right)(x) \end{aligned}$$

   La premier terme :

   $$\frac{1}{a_0}P(u)(x) \in \ker(u)$$

   tandis que :

   $$\left(u \circ \sum_{k=1}^{d} a_k u^{k-1}\right)(x) \in \mathrm{Im}(u)$$

2. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors x s'écrit $x = u(a)$, on a alors

   $$\begin{aligned} P(u)(x) =& P(u)(u(a)) \\ =& P(u) \circ u(a) = 0 \end{aligned}$$

   donc $x \in \ker(P(u))$.
   Soit maintenant $x \in \ker(P(u))$, on en déduit :

Exercice 29 Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et a et b deux éléments distincts de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $Ker(f-aId)$ et $Ker\left((f-bId)^2\right)$ sont en somme directe.
2. Montrer que $Ker(f-aId) = Ker\left((f-aId)^2\right)$.
3. Vérifier que :

$$\forall x \in E,\ x = \frac{1}{b-a}\left(bx - f(x) + f(x) - ax\right)$$

4. En déduire que :

$$Ker\left((f-aId)\circ(f-bId)\right) = \ker(f-aId) \oplus \ker(f-bId)$$

5. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tel que f^2 soit diagonalisable, en décomposant E en somme directe, montrer que f est diagonalisable si et seulement si $Ker(f) = Ker(f^2)$.

Exercice 30 Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 + f = 0$, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction : En gros, il faut trouver une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ tel que e_1 dans le moyau, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_2$.
L'endomorphisme f annule $X^3 + X = X(X-j)(X-\bar{j})$. Ainsi :

$$\chi_f = X^a(X-j)^b(X-\bar{j})^b$$

avec $a+2b=3$. On en déduit qu'il y a deux possibilités : $a=1, b=2$ et $a=3, b=0$.

Supposons $a=3$ et $b=0$, $\chi_f = X^3$, donc $f^3 = 0$ et $f = 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc, ce n'est pas possible et $a=1$ et $b=2$.

Ainsi, $\dim(E_0) = 1$ (ie $\dim(\ker(f) = 1$).

On vérifie alors que :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + Id)$$

Montrons que la somme est directe : si $x \in \ker(f) \cap \ker(f^2+Id)$, alors $f(x) = 0$, et $f^2(x) = -x$, on en déduit que $x = 0$.
soit maintenant $x \in E$, on vérifie (éventuellement après analyse synthèse) :

$$x = \underbrace{f^2(x) + x}_{a} + \underbrace{-f^2(x)}_{b}$$

on a :

$$f(a) = f^3(x) + f(x) = 0 \text{ et donc } a \in \ker(f)$$
$$f^2(b) = -f^4(x) = -f^3(f(x)) = f(f(x)) = f^2(x) = -b \text{ et donc } b \in \ker(f^2+Id)$$

D'où la relation : $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2+Id)$. On prend donc e_1 base de $\ker(f)$ (qui est de dimension 1).. Considérons maintenant e_2 vecteur quelconque non nul de $\ker(f^2+Id)$, et notons $e_3 = f(e_2)$. On doit vérifier que (e_2, e_3) est libre. On considère donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tels que :

$$\alpha e_2 + \beta e_3 = 0$$

on applique f :

$$\alpha e_3 - \beta e_2 = -\beta e_2 + \alpha e_3 = 0$$

(rappel e_2 et e_3 sont dans $\ker(f^2+Id)$) on fait $\beta l_1 + \alpha l_2$, cela donne :

$$(\beta^2 + \alpha^2)e_3 = 0$$

il reste à vérifier que $e_3 \neq 0$: comme $e_2 \neq 0$ et $e_2 \in \ker(f^2+Id)$ alors $e_2 \notin \ker(f)$, donc $e_3 \neq 0$.

On en déduit $(\beta^2+\alpha^2) = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$. Ainsi, (e_2, e_3) est libre, puis comme on a la décomposition en somme directe, on en déduit que (e_1, e_2, e_3) est une base. Dans cette base la matrice de f a la forme demandée.

Exercice 31 Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On considère :

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

1. Soit P un polynôme, déterminer $P(B)$ en fonction de $P(A)$.
2. Montrer que si B est diagonalisable alors A est diagonalisable et $Sp(A) = 0$.
3. En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est nulle.
4. Montrer que B est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.

Exercice 32 **Étude des endomorphismes de rang 2**

1. Soit g un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 2, écrire son polynôme caractéristique en fonction de $tr(g)$ et $det(g)$.Utiliser alors le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Soit f un endomorphisme de rang 2.
   (a) Montrer qu' il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} C & 0_{2,n-2} \\ E & 0_{n-2,n-2} \end{pmatrix} \text{ avec } C \in \mathscr{M}_2 \text{ et } E \in \mathscr{M}_{n-2,2}$$

   (b) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\chi_f = X^n + aX^{n-1} + bX^{n-2}$$

   (c) Montrer que f possède un polynôme annulateur de degré 3.
   (d) Qu' en déduire pour $card(Sp(f))$?
   (e) On suppose que $card(Sp(f)) = 1$. Montrer que f est nilpotent d'ordre 3 et qu' il n'est pas diagonalisable.
   (f) On suppose que $card(Sp(f)) = 3$, montrer que f est diagonalisable.
   (g) On suppose que $card(Sp(f)) = 2$, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle :

$$Mat_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & a_3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

   Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^2 = a_1 f$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de A' pour que f soit diagonalisable.

✯ Calcul numérique de la valeur propre de plus grand module

Exercice 33 **Lien avec le cours d'informatique**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On suppose que A est diagonalisable et on note $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. On suppose aussi que la valeur propre λ_n de plus grand module est simple, ie $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $|\lambda_i| < |\lambda_n|$.

Justifier alors que :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{Tr(A^{p+1})}{Tr(A^p)} = \lambda_n.$$

Application en informatique : en utilisant la fonction `dot(A,B)` qui calcule le produit de deux `2d-array` A et B, écrire une fonction donnant une approximation de λ_n.

On a :

$$tr(A^p) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p \underset{p \to +\infty}{\sim} \lambda_n^p$$

D'où :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{Tr(A^{p+1})}{Tr(A^p)} = \lambda_n.$$

Cela donne le programme suivant :

```
from pylab import *

def tr(A):
    """
    entrée: A = array nxn
              = matrices réelle
    sortie: s = float = la trace de A
    """
    n, m = shape(A)
    S = sum([ A[i,i] for i in range(n)])
    return S


def vp(A, eps):
    """
    entrée: A = array nxn
              = matrices réelle
            A doit avoir sa valeur propre de plus haut module simple
            eps = float >0 = précision
    sortie:  un = float
            plus grande valeur propre (en valeur absolue de A)
    """
    An = A.copy() # valeur courante de A**n
    Anp1 = dot(A,An)  # valeur courante de A**(n+1)

    un = tr(Anp1)/tr(An)
    An = Anp1
    Anp1 = dot(A, An)
    unp1 = tr(Anp1)/tr(An)

    while abs(unp1 - un) > eps:
        un  = unp1
        An = Anp1
        Anp1 = dot(A, An)
        unp1 = tr(Anp1)/tr(An)

    return un




# matrice aléatoire 5x5
A = array([ [rand() for i in range(5)] for j in range(5) ])
lam = vp(A, 10**(-3))
print("plus grande valeur propre de A:", lam)
W, V = eig(A)
print("valeurs propres trouvées par la bibliothèque:", W)
```